Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **539.3**

ПРОЩЕЛКИВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПОЛОГОЙ АРКИ

Л. Ф. Фатуллаева

Статья посвящается столетнему юбилею выдающегося математика С.М. Никольского

В геометрически нелинейной постановке предлагается вариационный метод смешанного типа для определения напряженно-деформируемого состояния. В качестве примера дается постановка и указывается способ решения задачи об устойчивости неоднородной по толщине упругой пологой арки.

1. Введение

Создание и широкое применение в технике, машиностроении, станкостроении, авиастроении и т. д. композитных материалов приводит к необходимости определения напряженно-деформируемого состояния (НДС) в средах, изготовленных из различных, нелинейно-упругих материалов, сопряженных между собой посредством полного сцепления либо посадки. Когда тело имеет сложную пространственную конфигурацию, составлено из нескольких частей, деформации конечны, а распределение внешних нагрузок имеет довольно сложный вид, возникают большие трудности математического характера. Это обстоятельство связано с тем, что теоретические исследования в этой области приводят к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в частных производных с разрывными коэффициентами при нелинейных краевых условиях. Получение здесь точных решений весьма затруднительно, иногда, даже невозможно. Поэтому первостепенное значение приобретает развитие приближенных, в частности, вариационных методов.

В этой связи здесь разработан вариационный принцип смешанного типа для определения НДС тел, составленных из конечного числа элементов. Эффективность предложенного метода иллюстрируется на примере решения задачи прощелкивания линейно-упругой кусочно-неоднородной по толщине пологой арки, шарнирно опертой по концам, которая подвержена равномерно распределенной вертикальной нагрузке.

2. Задача устойчивости неоднородной по толщине пологой арки

Допустим, что имеем шарнирно опертую на двух концах пологую арку, ось которой образована дугой синусоиды

$$\omega = c\sin(\pi z/l).$$

Сечение арки предполагается прямоугольным с высотой $2h$ и шириной b. Положим теперь, что арка, имеющая пролет l и стрелу подъема c_0, составлена из n чередующихся различных по толщине слоев с различными модулями упругости $E_{k+1}[k = 0, 1, \dots, (n-1)]$. Будем считать, что в каждом слое модуль упругости зависит от поперечной координаты y, т. е. $E_{k+1} = E_{k+1}(y)$. Толщину каждого слоя обозначим через δ_{k+1}, причем $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} = 2h$.

Запишем уравнение состояния для пакета в целом в виде одного равенства [1]:

$$\varepsilon^v = \frac{\sigma}{E_{k+1}(y)}\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma^0_{k+1}(y)}\right)^m\right),$$

$$-h + \sum_{i=0}^{k} \delta_i \leqslant y \leqslant -h + \sum_{i=0}^{k+1} \delta_i \quad (\delta_0 = 0), \quad k = 0,\, 1, \dots,\, (n-1),$$

где m — коэффициент нелинейности, принимающий только четные значения.

В дальнейшем ограничимся моделью линейной упругости, т. е. когда $m = 0$. Арка несет равномерно распределенную вертикальную нагрузку интенсивности q. В этом случае функционал имеет вид [1]:

$$J = b\int_{-h}^{h}\int_{0}^{l}\left(\dot\sigma\dot\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma\dot\omega_{,z}\right)\,dydz - \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot\sigma^2\,dydz}{E_{k+1}(y)} + \int_0^l \dot q\dot\omega\,dz, \tag{1}$$

где

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^{k}\delta_i, \quad a_{k+1} = -h + \sum_{i=0}^{k+1}\delta_i.$$

Запятая в нижнем индексе означает частное дифференцирование по продольной координате z, а точка над буквой — дифференцирование по q, т. е. $\dot q = 1$.

Вследствие закона плоских сечений запишем

$$\dot\varepsilon = \dot u_{,z} + \omega_{,z}\dot\omega_{,z} - y\dot\omega_{,zz}. \tag{2}$$

Чтобы найти стационарные значения функционала (1), используем метод Релея — Ритца. Аппроксимирующие функции запишем следующим образом:

$$u = 0, \tag{3}$$

$$\omega = \eta c_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \tag{4}$$

$$\sigma = E_1\left(\sigma_0 + \sigma_1^v\left(\frac{2y}{h}\right) + \nu\sigma_2^v\left(\frac{2y}{h}\right)^2\right), \tag{5}$$

где $\sigma_1^v = \sigma_1\sin(\pi z/l)$, $\sigma_2^v = \sigma_2\sin(\pi z/l)$, или в скоростях

$$\dot\omega = \dot\eta c_0\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \tag{6}$$

$$\dot{\sigma} = E_1 \left(\dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}_1^v \left(\frac{2y}{h} \right) + \nu \dot{\sigma}_2^v \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right). \tag{7}$$

Подставляя (2)–(7) в функционал (1) и введя следующие обозначения

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{y^i dy}{E_{k+1}}, \quad i = 0, \ldots, 4,$$

после интегрирования, получим следующую формулу для функционала:

$$J = \frac{bhE_1\pi^2}{l}\, c_0^2 \dot{\sigma}_0 \eta \dot{\eta} + \frac{16}{9}\, \nu bhE_1 c_0^2 \frac{\pi}{l} \dot{\sigma}_2 \eta \dot{\eta} + \frac{2}{3}\, bh^2 E_1 \frac{\pi^2}{l} c_0 \dot{\eta} \dot{\sigma}_1 + bhE_1 \sigma_0 \frac{\pi^2}{2l}\, c_0^2 \dot{\eta}^2$$
$$+ \frac{8}{9}\, bh\nu E_1 \frac{\pi}{l}\, c_0^2 \sigma_2 \dot{\eta}^2 - \frac{bl}{2}\, E_1^2 \dot{\sigma}_0^2 \Phi_0 - \frac{bl}{2h^2}\, E_1^2 \Phi_2 \dot{\sigma}_1^2 - \frac{4bl}{h^4}\, E_1^2 \nu^2 \Phi_4 \dot{\sigma}_2^2$$
$$- \frac{8lb}{\pi h^2}\, \nu E_1^2 \Phi_2 \dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_2 - \frac{4l}{\pi h}\, bE_1^2 \dot{\sigma}_0 \Phi_1 \dot{\sigma}_1 - \frac{4bl}{h^3}\, \nu E_1^2 \Phi_3 \dot{\sigma}_1 \dot{\sigma}_2 + \dot{\eta} c_0 \frac{2l}{\pi}.$$

Далее, варьируя J по $\dot{\eta}$, $\dot{\sigma}_0$, $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2$, и интегрируя полученные формулы при начальных условиях

$$\eta(0) = 1, \quad \sigma_0(0) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0,$$

получаем следующую систему четырех уравнений:

$$\pi^3 \lambda^2 \xi \sigma_0 \eta + 1.8\pi^2 \lambda^2 \nu \xi \sigma_2 \eta + 0.7\pi^3 \lambda^2 \sigma_1 + 2\tau = 0,$$
$$\varphi_0 \sigma_0 + 4\pi^{-1} \varphi_1 \sigma_1 + 8\pi^{-1} \nu \varphi_2 \sigma_2 = 0.5\pi^2 \lambda^2 \xi^2 \left(\eta^2 - 1 \right),$$
$$4\pi^{-1} \varphi_1 \sigma_0 + \varphi_2 \sigma_1 + 4\nu \varphi_3 \sigma_2 = 0.7\pi^2 \lambda^2 \xi \left(\eta - 1 \right),$$
$$\pi^{-1} \nu \varphi_2 \sigma_0 + 0.5\nu \varphi_3 \sigma_1 + \nu^2 \varphi_4 \sigma_2 = 0.1\pi \lambda^2 \nu \xi^2 \left(\eta^2 - 1 \right).$$

Исключая из последней системы σ_0, σ_1, σ_2, приходим к следующему алгебраическому уравнению для определения η:

$$15.48\lambda^2 \xi \sigma_0 \eta + 8.87\lambda^2 \nu \xi \sigma_2 \eta + 10.84\lambda^2 \sigma_1 + \tau = 0, \tag{8}$$

где

$$\xi = \frac{c_0}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{l}, \quad \tau = \frac{q}{E_1 b}, \quad \varphi_0 = \frac{E_1}{h}\, \Phi_0,$$

$$\varphi_1 = \frac{E_1}{h^2}\, \Phi_1, \quad \varphi_2 = \frac{E_1}{h^3}\, \Phi_2, \quad \varphi_3 = \frac{E_1}{h^4}\, \Phi_3, \quad \varphi_4 = \frac{E_1}{h^5}\, \Phi_4,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\varphi_0(ad-bc)}\big(4.93(ad-bc)\lambda^2\xi^2(\eta^2-1) - 6.9\varphi_1\varphi_2\xi\lambda^2 a(\eta-1)$$
$$+ 1.26\varphi_1^2\lambda^2\xi^2 a(\eta^2-1) + 6.26\varphi_1^2\lambda^2\xi^2 c(\eta^2-1) - 6.9\varphi_0\varphi_1\xi\lambda^2 c(\eta-1)$$
$$- 12.57\nu\varphi_1\varphi_2\lambda^2\xi^2 d(\eta^2-1) + 13.85\nu\varphi_0\varphi_2\lambda^2\xi d(\eta-1)$$
$$+ 13.85\nu\varphi_2^2\lambda^2\xi b(\eta-1) - 2.52\nu\varphi_1\varphi_2\lambda^2\xi^2 b(\eta^2-1)\big),$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{(ad-bc)}\big(5.43\xi\lambda^2\varphi_2 a(\eta-1) - 0.99\lambda^2\xi^2\varphi_1 a(\eta^2-1)$$
$$- 4.93\lambda^2\xi^2\varphi_1 c(\eta^2-1) + 5.43\lambda^2\xi\varphi_0 c(\eta-1)\big),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{(ad-bc)}\big(4.93\xi^2\lambda^2\varphi_1 d(\eta^2-1) - 5.43\lambda^2\xi\varphi_0 d(\eta-1)$$
$$- 5.43\lambda^2\xi\varphi_2 b(\eta-1) + 0.99\lambda^2\xi^2\varphi_1 b(\eta^2-1)\big).$$

Здесь

$$a = 2.55\nu\varphi_1\varphi_2 - 3.14\nu\varphi_0\varphi_3, \quad b = 1.27\varphi_1^2 - 0.79\varphi_0\varphi_2,$$
$$c = 3.14\nu\varphi_2\varphi_3 - 3.14\nu\varphi_1\varphi_4, \quad d = 0.79\varphi_2^2 - 1.57\varphi_1\varphi_3.$$

Из (8) следует, что τ как функция η принимает экстремальное значение при

$$\frac{d\tau}{d\eta} = 0. \tag{9}$$

При достижении критического значения безразмерной нагрузки $\eta_{\text{кр}}$ происходит хлопок. Величина этой критической нагрузки находится по формуле (8), если внести в нее значение $\eta_{\text{кр}}$, получаемое формулой (9). Дальнейшее связано с заданием числа слоев n и последовательным решением полученных уравнений.

Таким образом, задача устойчивости упругой пологой арки сводится к решению алгебраического уравнения.

Литература

1. *Амензаде Р. Ю., Гусиев Х. Т.* Вариационный метод решения задачи устойчивости неоднородной по толщине пологой арки // Тр. Азерб. мат. о-ва.—1996.—Т. 2.—С. 223–230.

Статья поступила 29 апреля 2004 г.

Фатуллаева Лаура Фаик кызы
г. Баку, Институт прикладной математики
Бакинского государственного университета
E-mail: laura_fat@rambler.ru