Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2002, Том 4, Выпуск 1

УДК **517.98**

ЧИСЛА И ПРОСТРАНСТВА КАНТОРОВИЧА

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Обзор современного состояния исследований в области функционального анализа, развивающих эвристический принцип Л. В. Канторовича. Особое внимание уделено внутренним взаимосвязям пространств Канторовича, алгебр Буля и континуум-проблемы Кантора.

1. Введение

Научное наследие Л. В. Канторовича огромно. Его математические исследования оказали фундаментальное влияние на становление и развитие функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций. Л. В. Канторович по праву входит в число основоположников современного экономико-математического направления.

Столь впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Л. В. Канторовича, но и единством его методических установок. Он всегда подчеркивал внутреннее единство своего творчества, взаимопроникновение идей и методов, используемых им при решении самых разнообразных теоретических и прикладных проблем в математике и экономике. Вместе с тем характерной чертой творчества Л. В. Канторовича является его тесная взаимосвязь с наиболее трудными проблемами и самыми перспективными идеями современной ему математики и экономики. Анализ методологии творчества Л. В. Канторовича заслуживает специальных исследований. Ниже мы остановимся коротко лишь на некоторых фундаментальных идеях Л. В. Канторовича которые, несомненно, следует отнести к лучшим образцам математики двадцатого столетия. При этом ограничимся обзором современного состояния исследований в области функционального анализа, развивающих эвристический принцип Л. В. Канторовича, сосредоточив внимание на пограничных вопросах теории пространств Канторовича и приложений, булевозначного анализа и выпуклого анализа. Особое внимание уделено внутренним взаимосвязям пространств Канторовича, алгебр Буля и континуум-проблемы Кантора. Обзор других аспектов научного наследия Л. В. Канторовича см. в [26, 41]. Здесь отметим лишь несколько работ Л. В. Канторовича [23, 24, 25, 29], каждая из которых послужила фундаментальными вкладом в соответствующий раздел математики и экономики.

2. Булевы алгебры

Основным объектом нашего рассмотрения служит K-пространство или, полнее, пространство Канторовича. Неразлучной спутницей K-пространства является алгебра Буля. Пространства Канторовича и алгебры Буля были созданы в разные эпохи, для обслуживания разного круга задач и на основе различных теоретических установок и технических средств. Однако математические идеи, составляющие суть этих структур, оказались взаимосвязанными настолько, что по сей день продолжается их плодотворное взаимодействие. В этой связи следует коротко остановиться на понятии булевой алгебры.

Теория булевых алгебр берет свое начало от классического сочинения Дж. Буля «Исследование законов мысли, на которых основана математические теории логики и теории вероятностей», изданного в 1854 году, см. [52]. Цель и задачи этой книги автор сформулировал так: *«В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений, дабы выразить их в символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод»*. Следуя такой установке, Дж. Буль провел, по существу, алгебраизацию той логической системы, которая лежит в основе классических математических рассуждений. Таким образом возникла алгебраическая структура, именуемая ныне *булевой алгеброй* или, реже, *алгеброй Буля.* Напомним определение булевой алгебры.

Упорядоченное множество X называют *решеткой,* если любая пара элементов x и y из X имеет как супремум $x \vee y := \sup\{x, y\}$, так и инфимум $x \wedge y := \inf\{x, y\}$. (Здесь и ниже символ $:=$ означает «равняется по определению».) Решетку X называют *дистрибутивной,* если

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

для любых ее трех элементов x, y и z. Допустим, что в решетке имеются наибольший элемент $\mathbf{1}$ и наименьший элемент $\mathbf{0}$. Элемент x^* называют *дополнением* x, если $x \vee x^* = \mathbf{1}$ и $x \wedge x^* = \mathbf{0}$. В случае, когда для каждого элемента $x \in X$ существует дополнение, говорят, что X есть *решетка с дополнениями.* При этом каждый элемент имеет единственное дополнение, следовательно, возникает отображение $(\cdot)^* : x \mapsto x^*$ $(x \in X)$. *Булевой алгеброй* называют дистрибутивную решетку с дополнениями. Таким образом, в булевой алгебре имеются два выделенных (особых) элемента $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, называемые нулем и единицей, и три операции — две двухместные операции $\vee$, $\wedge$ и одна одноместная операция $(\cdot)$, причем выполняются правила (аксиомы):

(1) *коммутативные законы*

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

(2) *ассоциативные законы*

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z);$$

(3) *дистрибутивные законы*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \vee z) \wedge (y \vee z), \quad (x \wedge y) \vee z = x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$

(4) *законы поглощения (абсорбции)*

$$x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x;$$

(5) *нейтральность нуля и единицы*

$$\mathbf{0} \vee x = x, \quad \mathbf{1} \wedge x = x;$$

(6) *свойства дополнения*

$$x \vee x^* = \mathbf{1}, \quad x \wedge x^* = \mathbf{0}.$$

Булеву алгебру можно определить и как алгебраическую систему

$$(B, \vee, \wedge, (\cdot)^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}),$$

где B — множество, $\vee$ и $\wedge$ — двухместные операции в B, $(\cdot)^*$ — одноместная операции в B, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — фиксированные элементы из B, для которой выполнены аксиомы (1)–(6).

Булеву алгебру называют *полной*, если в ней любое порядково ограниченное множество имеет супремум и инфимум.

Примером булевой алгебры служит совокупность всех подмножеств некоторого фиксированного непустого множества X, которую принято обозначать символом $\mathcal{P}(X)$. При этом под булевыми операциями понимаются теоретико-множественные операции объединения $A \vee B := A \cup C$, пересечения $A \wedge B := A \cap C$ и дополнения $A^* := X \setminus A$. Нулем в $\mathcal{P}(X)$ служит пустое множество, а единицей — само X. Булева алгебра $\mathcal{P}(X)$ полна. Часть булевой алгебры $\mathcal{P}(X)$ называют полем множеств, если она содержит пустое множество, все множество X и замкнута относительно указанных теоретико-множественных операций. Поле множеств является булевой алгеброй с теми же булевыми операциями, что и в $\mathcal{P}(X)$. Один из важнейших теорем теории булевых алгебр утверждает, что всякая булева алгебра может быть реализована в виде поля множеств. Этот факт установил М. Стоун в 1936 г.

Булевы алгебры имеют многочисленные связи с различными направлениями математической науки. Общетеоретическое и прикладное значение булевых алгебр определяется той существенной ролью, которую они играют в математической логике, теории вероятностей и кибернетике. Живо и увлекательно о булевых алгебрах рассказано в книге [48] (см. также процитированную там литературу). Для первоначального знакомства с теорией множеств, булевыми алгебрами и математической логикой может послужить книга [46]. Основательное изложение теории булевых алгебр имеется в монографиях [7, 45, 55]. Энциклопедическое изложение теории булевых алгебр см. в [67].

3. Возникновение пространств Канторовича

Главным своим математическим достижением Л. В. Канторович считал развитие теории K-пространств в рамках функционального анализа. Установленные им теоремы о строении K-пространств и регулярных операторов в них вошли в золотой фонд современной математики. В основе его абстрактного идейного наследия лежит предложенная им концепция K-пространства, представляющая собой синтез двух фундаментальных математических понятий — *булевой алгебры* и *действительного числа*. В самом деле, элемент K-пространства можно трактовать как действительное число, «размазанное» над булевой алгеброй. Способ такой трактовки — глубокая математическая теория с богатым спектром приложений, которая освещена в монографиях [1, 8, 27, 28, 61, 65]. Однако исторически основной объект теории — K-пространство — возникло на иной идейной основе. Обратимся к истокам K-пространств.

В истории функционального анализа возникновение теории упорядоченных векторных пространств связывают с именами Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Х. Фрейденталя и др. Несомненно, что на развитие теории упорядоченных векторных пространств существенное влияние оказали исследования по упорядоченным алгебраическим системам. Некоторые понятия и методы, возникшие первоначально для общих решеток, решеточно упорядоченных групп и колец, были успешно использованы в теории векторных решеток, см. монографии Г. Биркгофа [2], Л. Фукса [47] и Г. Гретцера [13]. Однако для Л. В. Канторовича решающее значение имело все же развитие функционального анализа.

В двадцатые годы прошлого века, когда функциональный анализ интенсивно оформлялся в самостоятельное научное направление, основными синтезирующими понятиями стали нормированное пространство и ограниченный линейный оператор. Именно с этими объектами были связаны важнейшие абстрактные построения функционального анализа. В то же самое время значительные усилия были направлены на накопление фактического материала — осмысление общих понятий в конкретных ситуациях. В частности, большое значение приобретало аналитическое представление линейных функционалов и операторов в конкретных нормированных пространствах.

Выполненные в 1934 г. работы Л. В. Канторовича и Г. М. Фихтенгольца по проблеме представления линейных функционалов и операторов явились первыми исследованиями российских математиков по теории нормированных пространств. К тому времени (в 1927–1934 гг.) Л. В. Канторович зарекомендовал себя как блестящий аналитик, получивший ряд первоклассных результатов в таких традиционных в то время областях как теория функций, теория множеств, приближённые методы анализа. Молодого талантливого математика (в 1934 году Леониду Витальевичу было всего 22 года), занявшегося функциональным анализом, казалось бы, сама судьба направляла в новую сферу исследований, открытую Э. Хелли, Г. Ханом, С. Банахом и др., в которой происходили важнейшие события стремительно развивающегося научного направления. Но Л. В. Канторович пошел своим путем: в качестве основы для построения функционального анализа он ввел новый объект — K-пространство. Такой поход позволял охватить методами функционального анализа важные аспекты классического анализа, связанные с возможностью сравнивать элементы функциональных пространств и операторов в них, и не получивших никакого отражения при построении теории нормированных пространств.

Напомним соответствующие определения. Действительное векторное пространство E называют *упорядоченным векторным пространством*, если в нем задано отношение порядка $\leqslant$, согласованное с векторной структурой в том смысле, что неравенства можно складывать и умножать на положительные числа. Последнее означает, что если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ и $\lambda x \geqslant \lambda y$ для всех $x, y, z \in E$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$.

Если упорядоченное векторное пространство является решеткой, то его называют *векторной решеткой* или, как принято в западной литературе, *пространством Рисса*. В векторной решетке E определяют модуль элемента $x \in E$ формулой $|x| = x \vee (-x)$. Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными,* если $|x| \wedge |y| = 0$. Множество вида $A^{\perp}$, состоящее из всех элементов $x \in E$, дизъюнктных с каждым элементом непустого множества $A \subset E$, называют *полосой*.

Уже в первой работе Л. В. Канторовича [17] по теории упорядоченных векторных пространств им был выделен класс K-пространств — класс векторных решеток с дополнительной аксиомой (обозначаемой I_6) условной порядковой полноты: *всякое порядково ограниченное множество имеет супремум и инфимум.* Каждая полоса L в K-пространстве E допускает оператор проектирования параллельно дополнительной полосе $L^{\perp}$, называемый порядковым проектором.

3.1. Теорема. *Совокупность всех полос $\mathfrak{B}(E)$ векторной решетки E, упорядоченная по включению ($L \leqslant K \iff L \subset K$), является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:*

$$L \wedge K := L \cap K, \quad L \vee K := (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* := L^{\perp}.$$

Если E — K-пространство, то множество всех порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$ также является полной булевой алгеброй, изоморфной $\mathfrak{B}(E)$. Булевы операции в $\mathfrak{B}(E)$ выглядят следующим образом:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho, \quad \pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* := I_E - \pi.$$

Булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$ (а иногда и $\mathfrak{P}(E)$) называют *базой* E. Пространство Канторовича именуют *расширенной*, если его нельзя погрузить с сохранением граней и алгебраических операций в более широкое K-пространство с той же самой базой.

Важный пример расширенного K-пространства строится следующим образом. Пусть B — произвольная полная булева алгебра. Допустим, что каждому действительному числу $t \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие единственный элемент $e(t) \in B$, причем выполнены требования:

(1) если $s \leqslant t$, то $e(s) \leqslant e(t)$;

(2) $\sup\{e(t) : t \in \mathbb{R}\} = \mathbf{1}$, $\inf\{e(t) : t \in \mathbb{R}\} = \mathbf{0}$;

(3) $\sup\{e(s) : s < t,\ s \in \mathbb{R}\} = e(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Тогда говорят, что задано *разложение единицы* $e(\cdot)$ в булевой алгебре B.

Для формулировки следующих двух теорем, установленных Л. В. Канторовичем, нужны еще два понятия. Подпространство E_0 векторной решетки E называют *идеалом*, если из соотношений $x \in E$, $y \in E_0$ и $|x| \leqslant |y|$ вытекает $x \in E_0$. Идеал E_0 называют порядково плотным, если $E_0^{\perp\perp} = E$.

3.2. Теорема. *Множество всех разложений единицы $\mathfrak{R}(B)$ в полной булевой алгебре B можно снабдить алгебраическими операциями и порядком так, что $\mathfrak{R}(B)$ превращается в расширенное пространство Канторовича, база которого изоморфна B.*

3.3. Теорема. *Пусть E — произвольное K-пространство, база которого изоморфна полной булевой алгебре B. Тогда E погружается в качестве порядково плотного идеала в расширенное K-пространство всех разложений единицы $\mathfrak{R}(B)$.*

Таким образом, расширенное пространство Канторовича и его база однозначно определяют друг друга и, стало быть, теории полных булевых алгебр и расширенных пространств Канторовича фактически равнообъемны.

Теория векторных решеток и ее обширные приложения освещены в большом количестве монографий, см. [1, 8, 27, 28, 33, 34, 36, 37, 49, 50, 54, 57, 61, 63, 64, 65, 66, 69, 71, 74]. Отметим также обзорные статьи [4, 5, 6], в каждой из которых имеется богатая библиография.

4. Эвристический принцип переноса и теорема Хана — Банаха

Итак, Л. В. Канторовичу принадлежит честь выделения класса порядково полных векторных решеток, называемых ныне пространствами Канторовича, и построения функционального анализа в этом классе. Первой работой Л. В. Канторовича в области упорядоченных векторных пространств была заметка 1935 года [17], в которой он писал:

«*В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы*».

Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку, которую теперь называют *принципом Канторовича* или, более подробно, *принципом переноса для K-пространств.*

Изучение K-пространств Леонид Витальевич связал с выяснением области применимости фундаментальной теоремы Хана — Банаха и сформулировал теорему 3, которая теперь в литературе именуется теоремой Хана — Банаха — Канторовича.

Напомним необходимые определения. Оператор p, действующий из векторного пространства X в упорядоченное векторное пространство E, называют *сублинейным,* если $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ и $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$. Говорят, что оператор $T : X \to E$ мажорируется оператором p (или p мажорирует T), если $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

Допустим, что X_0 — подпространство X и линейный оператор $T_0 : X_0 \to E$ мажорируется ограничением сублинейного оператора p на X_0, т. е. $T_0 x \leqslant p(x)$ при всех $x \in X_0$. Если для любых таких X, X_0, T_0 и p оператор T_0 можно продолжить с X_0 на все X с сохранением линейности и мажорируемости, то говорят, что E *допускает мажорированное продолжение линейных операторов.*

4.1. *Теорема Хана — Банаха — Канторовича.* *Пространство Канторовича допускает мажорированное продолжение линейных операторов.*

Эту теорему доказал Л. В. Канторович, см. [17]. Ее можно считать первой теоремой теории K-пространств. При $E = \mathbb{R}$ теорема 4.1 превращается в аналитическую форму теоремы Хана — Банаха, [27]. Таким образом, в теорема Хана — Банаха — Канторовича фактически утверждается, что в классической теореме о мажорированном продолжении линейного функционала можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить в теореме Хана — Банаха вещественные числа элементами произвольного K-пространства, а линейные функционалы — линейными операторами со значениями в таком пространстве. Важно подчеркнуть, что в классе упорядоченных векторных пространствах только K-пространства обладают таким свойством. Точнее, имеет место также обращение теоремы Хана — Банаха — Канторовича, полученное значительно позже, см., например [1, 37].

4.2. *Теорема Бонайса — Сильвермана — Ту.* *Каждое упорядоченное векторное пространство, допускающее мажорированное продолжение линейных операторов, представляет собой пространство Канторовича.*

Задаче мажорированного продолжение оператора посвящена обширная литература; историю вопроса и обзор различных аспектов можно найти в [37, 53, 61].

5. Пространства Банаха — Канторовича

В связи с задачами прикладного характера Л. В. Канторович в 1936 году вводит понятие абстрактно нормированного пространства, т. е. векторного пространства, нормированного элементами K-пространство [21]. Полные по абстрактной норме пространства стали называть пространствами типа B_K. Введение таких пространств можно рассматривать как еще одно проявление эвристического принципа Канторовича. Несколько раньше Г. Курепа [60] рассматривал «espaces pseudodistanciés», т. е. пространства с метрикой, принимающей значения из упорядоченного векторного пространства. Первые применения векторных норм и метрик были связаны с методом последовательных приближений в численном анализе, см. [21, 28, 30, 59, 70]. В последующем появились и другие применения векторных норм, см., например, [1, 8, 36].

Таким образом само введение пространств типа B_K или, как теперь говорят, пространств Банаха — Канторовича, имело как абстрактные корни, так и основательную прикладную мотивацию. Метод мажорант, в общей форме построенный Леонидом Витальевичем в пространствах Банаха — Канторовича, получил существенное развитие как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей, и занял видное место в арсенале теоретических средств вычислительной математики.

Рассмотрим векторное пространство X и вещественную векторную решетку E. (Все рассматриваемые векторные решетки считаем архимедовыми.) Отображение $\lvert\!\cdot\!\rvert : X \to E_+$ именуют *векторной* (E-*значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $\lvert x\rvert = 0 \iff x = 0 \quad (x \in X)$;

(2) $\lvert \lambda x\rvert = |\lambda|\lvert x\rvert \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in X)$;

(3) $\lvert x + y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \quad (x, y \in X)$.

Векторную норму называют *разложимой* или *нормой Канторовича,* если

(4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in X$, удовлетворяющих соотношению $\lvert x\rvert = e_1 + e_2$, существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\lvert x_k\rvert = e_k$ $(k := 1, 2)$.

Тройку $\big(X, \lvert\!\cdot\!\rvert, E\big)$ $\big($или, проще, (X, E), $\big(X, \lvert\!\cdot\!\rvert\big)$ или X, опуская подразумеваемые параметры$\big)$ назовем *решеточно нормированным пространством* (*над* E), если $\lvert\!\cdot\!\rvert$ — это E-значная норма на векторном пространстве X. Если векторная норма $\lvert\!\cdot\!\rvert$ разложима, то пространство X также называют разложимым. Сеть (x_α) в X называют *bo-фундаментальной,* если сеть $(\lvert x_\alpha - x_\beta\rvert)_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ порядково сходится к нулю. Решеточно нормированное пространство X называют *bo-полным* если всякая *bo*-фундаментальная сеть в нем *bo*-сходится к элементу этого пространства. Разложимое *bo*-полное решеточно нормированное пространство принято называть *пространством Банаха — Канторовича.*

Стоит подчеркнуть, что именно в статье Л. В. Канторовича [18] впервые появилась необычная аксиома разложимости для векторной нормы. В последующих исследованиях других авторов эта аксиома часто опускалась как несущественная. Глубокий смысл этой был обнаружен в связи с булевозначным анализом (см. [35, 36]).

6. Теория регулярных операторов

Одновременно с введением K-пространств Л. В. Канторовичем были заложены основы теории регулярных операторов. Это было сделано в работе [18] 1936 года, в которой впервые появились порядковое исчисление регулярных операторов в K-пространствах и знаменитая теорема Рисса — Канторовича. Ф. Рисс [68] в своем знаменитом докладе на Международном математическом конгрессе в Болонье в

1928 году сформулировал аналогичное утверждение для частного случая пространства непрерывных линейных функционалов на векторной решетке $C[a, b]$, вписав тем самым свое имя в число основателей теории упорядоченных векторных пространств. Л. В. Канторович усилил указанный результат Ф. Рисса в двух отношениях: во-первых пространство $C[a, b]$ заменил на произвольную векторную решетку, а во-вторых функционалы заменил операторами со значениями в произвольном K-пространстве. Итак, здесь вновь сработал эвристический принцип Канторовича.

Линейный оператор T из векторной решетки E в векторную решетку F называют *положительным,* если $0 \leqslant Tx$ для всех $0 \leqslant x \in E$. Оператор называют *регулярным,* если он представим в виде разности двух положительных операторов. Говорят, что оператор $T : E \to F$ порядково ограничен, если образ $T([a, b])$ произвольного порядкового отрезка $[a, b] \subset E$ содержится в некотором порядковом отрезке в F. (Напомним, что $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$.) Множества всех регулярных операторов и порядково ограниченных операторов обозначают соответственно символами $L_r^\sim(E, F)$ и $L^\sim(E, F)$. Очевидно, что $L_r^\sim(E, F) \subset L^\sim(E, F)$, причем это включение может оказаться строгим. Однако, если E — K-пространство, то $L_r^\sim(E, F) = L^\sim(E, F)$, как это легко выводится из следующей теоремы.

6.1. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Пусть E — векторная решетка, а F — некоторое K-пространство. Тогда, множество всех порядково ограниченных операторов $L^\sim(E, F)$, упорядоченное конусом всех положительных операторов $L_+(E, F)$, является K-пространством.*

Более того, в условиях теоремы 6.1 имеют место явные формулы вычисления модуля порядково ограниченного оператора, супремума и инфимума любого порядково ограниченного семейства порядково ограниченных операторов и т.д. Совокупность таких формул принято называть *исчислением регулярных операторов.*

Теорема 6.1 установлена Л. В. Канторовичем в [18]. В последующих работах Л. В. Канторовича и многочисленных его последователей было дано систематическое построение теории регулярных операторов и разнообразные приложения к вопросам теории функций и функционального анализа. Теории порядково ограниченных и положительных операторов посвящено большое число монографий (см. [1, 8, 27, 28, 33, 34, 36, 50, 61, 69, 71, 74]). Отметим также обзорные статьи [3, 4], в которых имеется богатая библиография.

Может сложится впечатление, что эвристический принцип Канторовича срабатывает автоматически. Однако это не так. Имеются ситуации, когда замена поля вещественных чисел произвольным K-пространством достигается почти дословным повторением уже найденных доказательств. Но чаще такая замена требует изощренных рассуждений, а в некоторых случаях принцип переноса даже и неверна без дополнительных ограничений на рассматриваемое K-пространство. Так обстоит дело, например, с проблемой продолжения положительного оператора по порядковой непрерывности. Для функционалов такое продолжение строится по схеме Даниэля — Стоуна построения интеграла Лебега. Но для операторов со значениями в K-пространстве этот результат устанавливается лишь при дополнительном предположении.

Положим $\Phi := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — обозначает множество всех отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Пространство Канторовича E называют *слабо σ-дистрибутивной*, если для любой порядково ограниченной двойной последовательности $(e_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ в E такой, что $e_{m,n+1} \leqslant e_{m,n}$

для всех $m, n \in \mathbb{N}$, выполняется

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} e_{m,n} = \inf_{\varphi\in\Phi} \sup_{m\in\mathbb{N}} e_{m,\varphi(m)},$$

Отсылая к [61] для детальной формулировки и исторических комментарий, ограничимся формулировкой следующей теоремы, первый вариант которой был установлен в [58].

6.2. *Теорема Канторовича — Макшейна — Маттеса — Райта.* *Пространство Канторовича F допускает продолжение секвенциально о-непрерывных операторов по схеме Даниэля — Стоуна в том и только в том случае, когда оно слабо σ-дистрибутивно.*

7. Теория мажорируемых операторов

Характерное для творчества Л. В. Канторовича разнообразие интересов сочетается с идейной целостностью. Неудивительно поэтому, что уже в своих ранних работах Л. В. Канторович обращается к приложениям теории полуупорядоченных пространств в численных методах. Он предложил математический аппарат, в рамках которого метод мажорант, восходящий к Коши, обретает свою естественную и законченную форму. Для этой цели им были введены фундаментальные понятия векторного пространства, нормированного элементами векторной решетки, и линейного оператора в таких пространствах, мажорируемого линейным положительным или сублинейным возрастающим оператором [18, 21, 22, 59]. Развитие этого направления имело двоякую мотивировку — теоретическую, обусловленную развитием общей теории операторов в K-пространствах (см. [17, 18, 19, 20]) и прикладную, связанную с приближенными методами анализа (см. [21, 22, 59]).

Приблизительно говоря, идею мажорирования можно выразить следующим образом. Если рассматриваемый оператор (или рассматриваемое уравнение) мажорируется другим оператором (уравнением), называемым мажорантой, то свойства последней имеют существенное влияние на свойства исходного оператора (уравнения). Таким образом, операторы или уравнения, имеющие «хорошие» мажоранты, должны иметь «хорошие» свойства. Идейную сторону своего подхода Леонид Витальевич описывает в заметке 1936 года [21] следующими словами:

«*При доказательстве существования решения различных классов функциональных уравнений в анализе весьма часто применяется способ последовательных приближений; при этом доказательство сходимости этих приближений основывается на том, что данное уравнение может быть мажорировано некоторым уравнением простого вида. Такого рода доказательства встречаются в теории бесконечных систем линейных уравнений и в теории интегральных и дифференциальных уравнений. Рассмотрение полуупорядоченных пространств и операций в них позволяет с большой легкостью развить в абстрактной форме полную теорию функциональных уравнений упомянутого вида*».

В последующие годы многие авторы изучали различные частные случаи решеточно нормированных пространств и классы мажорируемых операторов. Однако эти исследования проводились в рамках и в духе теории векторных и нормированных решеток. Без преувеличения можно сказать, что мажорируемые операторы как самостоятельный объект исследования на полвека выпали из поля зрения специалистов.

Вследствие этого важнейшие структурные свойства мажорируемых операторов были получены лишь в последнее время.

Пусть E и F — векторные решетки. Рассмотрим решеточно нормированный пространства (X, E) и (Y, F). Возьмем линейный оператор $T : X \to Y$ и положительный оператор $S : E \to F$. Если выполнено соотношение

$$\lvert Tx \rvert \leqslant S(\lvert x \rvert) \quad (x \in X),$$

то говорят, что S *мажорирует* T или что S является *мажорантой* оператора T. В этой ситуации оператор T называют *мажорируемым.*

7.1. *Теорема.* *Пусть X — разложимое решеточно нормированное пространство, а Y — пространство Банаха — Канторовича. Тогда, каждый мажорируемый оператор $T : X \to Y$ имеет наименьшую мажоранту $\lvert T \rvert \in L_r^{\sim}(E, F)$, а множество $M(X, Y)$ мажорируемых операторов из X в Y, снабженное $L_+(E, F)$-значной нормой $T \mapsto \lvert T \rvert$, является пространством Банаха — Канторовича.*

В начале 80-х годов в теории векторных решеток произошли определенные качественные изменения. Возникли новые методы исследования, область приложений существенно расширилась и обогатилась. Принципиально новые идеи проникли из других разделов математики. Все это привело к возможности углубленного изучения мажорируемых операторов и к формированию самостоятельной теории мажорируемых операторов. Основные результаты о мажорируемых операторах и разнообразных их приложениях, полученные в последние двадцать лет и демонстрирующие определенную зрелость теории, изложены в монографии [61], где имеются также обширная библиография и исторический комментарий.

8. Булевозначный анализ

Как уже отмечалось выше, пространства Канторовича были введены в 1935 году как некоторое обобщение понятия числа. Спустя сорок с лишним лет оказалось, что действительно элементы пространства Канторовича — суть булевозначные числа. По существу с этого факта начинается новая математическая теория — булевозначный анализ.

Булевозначным анализом называют раздел функционального анализа, использующий специальную теоретико-модельную технику — булевозначные модели теории множеств. Любопытно, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией упорядоченных векторных пространств. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960-му году. Однако всё ещё не было той генеральной идеи, которая впоследствии вдохнула жизнь в созданный математический аппарат, привела к бурному прогрессу в теории моделей. Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, установившем в 1963 году абсолютную неразрешимость (см. ниже параграфы 9 и 10) классической проблемы континуума. Именно в связи с осмыслением метода форсинга П. Дж. Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта и Р. Соловея.

8.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра с единицей $\mathbf{1}$. *Булевозначной интерпретацией* n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathcal{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X. Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathcal{L}$ и элементов $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине формулы φ определяется *оценка* (*истинности*) $[\![\varphi(x_1, \dots, x_m)]\!] \in B$.

Для атомных формул полагают

$$[\![P_k(x_1, \dots, x_m)]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\varphi \vee \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!],$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!],$$

$$[\![\varphi \to \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!],$$

$$[\![\neg\varphi]\!] := [\![\varphi]\!]^*,$$

$$[\![(\forall x)\, \varphi]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

$$[\![(\exists x)\, \varphi]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee, \wedge, \Rightarrow, (\,\cdot\,)^*, \bigvee, \bigwedge$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ — формула, а $x_1, \dots, x_m \in X$ *истинно* (*верно, справедливо* и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0, \dots, R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1, \dots, x_m)$, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_m)]\!] = \mathbf{1}$. Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 есть равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1, \dots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathcal{L} := \{=, P_1, \dots, P_n\}$.

8.2. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (=ZFC) на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathcal{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$, соответственно. Таким образом, $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![= (x, y)]\!] = [\![x = y]\!], \quad [\![\in (x, y)]\!] = [\![x \in y]\!] \quad (x, y \in X).$$

Можно показать (см. [39, 38]), что если к определению B-системы добавить некоторые естественные требования (технического характера), то существует единственная (с точностью до изоморфизма) B-система $\mathbb{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, в которой справедливы все аксиомы (а значит и все теоремы) теории множеств ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Такую B-систему называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbf{V}^{(B)} := (\mathbf{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$. Класс $\mathbf{V}^{(B)}$ принято также называть *булевозначным универсумом.*

8.3. Для элемента $X \in \mathbf{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задается правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbf{V}^{(B)} : [\![x \in X]\!] = \mathbf{1}\}$.

Пусть f — отображение из X в Y внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Это означает, что $X, Y, f \in \mathbf{V}^{(B)}$ и выполнено равенство $[\![f : X \to Y]\!] = \mathbf{1}$. В этой ситуации существует единственное отображение $g : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$, для которого $[\![f(x) = g(x)]\!] = \mathbf{1}$ при всех $x \in X{\downarrow}$. Для отображения g, называемого *спуском отображения* f, принято обозначение $f{\downarrow} := g$. Спуск отношения определяется аналогично.

Булевозначный статут понятия K-пространства установлен в начале 70-х годов Е. И. Гордоном, см [10]. Основной его результат утверждает, что *любое расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели*. Точнее имеет место следующая теорема.

8.4. *Теорема Гордона.* *Пусть B — полная булева алгебра и $\mathcal{R}$ — упорядоченное поле действительных чисел в булевозначной модели $\mathbf{V}^{(B)}$. Тогда $\mathcal{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное K-пространство. При этом существует изоморфизм χ булевой алгебры B на базу $\mathfrak{P}(\mathcal{R}{\downarrow})$ (= булеву алгебру порядковых проекторов в $\mathcal{R}{\downarrow}$) такой, что справедливы эквивалентности*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x \leqslant y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathcal{R}$ и $b \in B$.

При этом оказывается, что любая теорема (в рамках аксиоматики Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) о вещественных числах имеет свой аналог для K-пространства $\mathcal{R}{\downarrow}$, причем перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определённых стандартных процедур, т. е. по сути дела, алгоритмически. Тем самым установка Л. В. Канторовича «элементы K-пространства суть обобщённые числа» обретает в булевозначном анализе чёткую математическую формулировку. С другой стороны, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную, наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, превращается в рамках булевозначного анализа в точный исследовательский метод.

Если в теореме Гордона 8.4 B — это σ-алгебра измеримых множеств по модулю множеств ненулевой меры μ, то $\mathcal{R}{\downarrow}$ изоморфно расширенному K-пространству измеримых функций $L^0(\mu)$. Если B — полная булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, то $\mathcal{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству тех самосопряженных операторов, у которых спектральная функция действует в B. Эти два частных случая теоремы Гордона интенсивно и плодотворно эксплуатировал Г. Такеути, см. [72], а также библиографию в [39]. Объект $\mathcal{R}{\downarrow}$ для общих булевых алгебр рассмотрел также Т. Йех [56], переоткрыв по существу теорему Гордона. Отличие состоит в том, что в [56] (комплексное) расширенное K-пространство с единицей определяется другой системой аксиом и именуется полной стоуновой алгеброй. Подробное изложение теории булевозначных моделей, а также разнообразных их приложений можно найти в [15, 39, 42, 51, 72, 73].

Дальнейшее развитие булевозначного анализа показало, что подобный перевод (перенос, трансляция), изготовляющий из известных фактов новые теоремы, возможен не только для K-пространств, но и практически для всех объектов, так или иначе с ними связанными: для пространств типа B_K, различных классов линейных и нелинейных операторов, операторных алгебр и т. п. Отметим, что принцип Канторовича для пространств типа B_K (с точностью до элементарных оговорок) реализован в [36, 39] в следующем виде.

8.5. ***Теорема.*** *Для любого решеточно нормированного пространства (X, p, E) существует единственное с точностью до линейной изометрии банахово пространство $\mathcal{X}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $B \simeq \mathfrak{B}(p(X)^{\perp\perp})$, для которого спуск $\mathcal{X}{\downarrow}$ является максимальным расширением (X, p, E).*

Таким образом, пространство Банаха — Канторовича допускает погружение в подходящую булевозначную модель теории множеств, превращаясь в банахово пространство. Иначе говоря, пространство типа B_K — это булевозначная интерпретация банахова пространства. При этом именно необычная, считавшаяся надуманной аксиома разложимости нормы, введенная Л. В. Канторовичем, и обеспечивает возможность такого погружения.

9. Континуум-проблема Кантора

С принципом Л. В. Канторовича — «элементы K-пространства суть обобщённые числа» — перекликается одна из самых драматических страниц математики XX столетия, связанная со знаменитой проблемой континуума. Ключевую идею, лежащую в основе решения континуум-проблемы, можно осмыслить как поиск обобщенных чисел специального вида, после чего решение проблемы континуума сводится к построению специфического мира множеств — универсума. Более того, в этом универсуме имеются не только обобщенные числа, но и обобщенные математические объекты любой природы, столь же специфические, как и обобщенные числа. Указанное обстоятельство (более выразительно, но менее точно) можно высказать следующим образом: *в некоторых K-пространствах, элементы которых рассматриваются как обобщенные числа, нарушается гипотеза континуума.* Такая внутренняя взаимосвязь концепции K-пространства с проблемой континуума представляется весьма примечательной.

Два множества A и B называют *равномощными* или *эквивалентными,* если существует взаимнооднозначное отображение одного из них на другое. Говорят,что множество A имеет *мощность континуума* или что оно *континуально,* если A эквивалентно отрезку числовой прямой [0, 1]. *Гипотеза континуума* утверждает, что любое бесконечное несчетное подмножество отрезка [0, 1] континуально. Проблема же *континуума* состоит в том, верна или нет гипотеза континуума.

Можно ограничится такой лаконичной формулировкой проблемы континуума, но тогда остается неясным, почему она привлекла внимание Г. Кантора и почему так волновала многих математиков вплоть до наших дней. Поэтому коротко обозначим, что к континуум-проблеме привела логика развития математического анализа.

Г. Кантором пришел к необходимости исследования бесконечных множеств вследствие изучения множеств сходимости рядов Фурье, которые к тому времени широко стали применяться в различных вопросах прикладной математики. Г. Кантор первый стал рассматривать бесконечные множества как актуально существующие, готовые сущности. Тем самым он порвал с многовековой традицией, согласно которой допустимо лишь рассуждать о потенциально бесконечном множестве, т. е. о конечной, но неограниченно растущей совокупности.

В 1873 году Г. Кантор поставил задачу классификации актуально бесконечных множеств путем установления взаимнооднозначного соответствия между множествами. Следуя Г. Кантору, совокупность всех множеств, равномощных данному множеству A, назовем *классом эквивалентности* множества и обозначим символом $\widetilde{A}$. Ясно, что любые два множества из $\widetilde{A}$ равномощны, а множества $A_0 \in \widetilde{A}$ и $B_0 \in \widetilde{B}$ равномощны тогда и только тогда, когда A и B эквивалентны. Таким образом, если A и B не равномощны, то классы множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ не имеют общих элементов. В теории множеств доказывается, что в каждом классе эквивалентности $\widetilde{A}$ можно выделить единственный канонический представитель (обозначается символом $\mathrm{Card}(A)$), обладающий свойством *транзитивности.* Последнее означает, что каждый элемент $\mathrm{Card}(A)$ является также и частью $\mathrm{Card}(A)$.

Множество $\mathrm{Card}(A)$ называется *кардинальным числом* или *мощностью* множества A. Буквой c принято обозначать мощность континуума, т. е. $c := \mathrm{Card}([0,1])$. Мощность множества всех натуральных чисел обозначается символом ω_0 (в обозначениях Кантора — алеф-нуль — $\aleph_0$), т. е. $\omega_0 := \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Кардинальное число ω_0 называют счетной мощностью. В соответствии с этим говорят, что множество A счетно, если $\mathrm{Card}(A) = \omega_0$ или, что то же самое, множества A и $\mathbb{N}$ эквиваленты. Если α — мощность множества A, то символом 2^α обозначают мощность множества всех частей A, т. е. $2^\alpha := \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

В каком смысле следует понимать, что одно бесконечное множество больше другого? Ответ на этот вопрос сформулируем в терминах кардинальных чисел. Если α и β — произвольные кардинальные числа, то говорят что α меньше β, если $\alpha \in \beta$; при этом пишут $\alpha < \beta$. Для сравнения кардинальных чисел важное значение имеет следующий факт сформулированный Г. Кантором и доказанный Ф. Бернштейном.

9.1. *Теорема Кантора — Бернштейна.* *Если два множества A и B таковы, что A эквивалентно части B и B эквивалентно части A, то A и B эквивалентны. Иными словами, если $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$ и $\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathrm{Card}(A)$, то $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.*

Теперь сформулируем несколько результатов Г. Кантора, приведшие его к гипотезе континуума.

9.2. *Теорема* (Кантор, 1874)**.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *мощность множества всех частей натурального ряда равна мощности континуума; символически, $c = 2^{\omega_0}$;*

(2) *мощность континуума больше счетной мощности; символически, $c > \omega_0$;*

(3) *мощность множества всех частей любого множества больше, чем мощности α данного множества A; символически, $2^\alpha > \alpha$.*

Кардинальные числа обладают следующим замечательным свойством: *любое непустое множество кардиналов имеет наименьший элемент.* Применим этот факт к множеству K кардиналов α, удовлетворяющих неравенствам $\omega_0 < \alpha \leqslant 2^c$. Согласно сформулированным теоремам Кантора будет $c \in K$, поэтому K непусто. Следовательно, в K существует наименьший элемент, который принято обозначать через ω_1 (у Кантора — алеф-один — $\aleph_1$). Так как ω_1 также входит в K, то $\omega_0 < \omega_1 \leqslant 2^c$. В то же время $c \in K$, стало быть, c не может быть меньше наименьшего элемента множества K, т. е. $\omega_1 \leqslant c$.

Из этих рассуждений видно, что здесь возможны два взаимоисключающих случая: либо $\omega_1 = c = 2^{\omega_0}$, либо $\omega_0 < \omega_1 < c = 2^{\omega_0}$. В этой связи и возникли гипотеза континуума и классическая проблема континуума.

9.3. *Проблема континуума.* *Существуют ли мощности μ, которые больше счетной мощности и меньше мощности континуума, т. е. такие, что $\omega_0 < \mu < c$?*

9.4. *Гипотеза континуума.* *Не существует мощности большей счетной мощности и одновременно меньшей мощности континуума, т. е.* $\omega_1 = 2^{\omega_0}$.

Гипотеза континуума была впервые высказана Г. Кантором в 1878 году, см. [16]. Он был убежден, что континуум-гипотеза является теоремой и до конца жизни тщетно пытался ее доказать. Но при этом он создал мощный метод количественного анализа понятия бесконечности, открыв исчисление мощностей и теорию трансфинитных порядковых чисел, см. [14, 16, 43].

В 1900 году в Париже на II Международном конгрессе математиков выступил Давид Гильберт со своим знаменитым докладом «Математические проблемы». Проблема континуума была сформулирована первой в докладе Д. Гильберта (см. [44]). Оставаясь нерешенной десятилетиями, она порождала глубокие исследования в основаниях математики, [15, 31, 51].

10. Независимость континуум-гипотезы

Важнейший итог более чем полувековых исследований по проблеме континуума можно сформулировать так:

10.1. *Теорема.* *Гипотеза континуума не может быть ни доказана ни опровергнута в рамках теории множеств, т. е. гипотеза континуума является независимой теоретико-множественной аксиомой.*

Исторически это утверждение было установлено в два этапа: в 1939 году Курт Гёдель [9] установил, что гипотеза континуума совместна с аксиомами теории множеств, а в 1963 году Поль Дж. Коэн [31] доказал, что отрицание гипотезы континуума также совместно с аксиомами теории множеств.

Оба результата устанавливаются путем построения соответствующих моделей, т. е. построением универсума множеств и интерпретации теории множеств в этом универсуме. Говоря о теории множеств, подразумеваем аксиоматическую теорию Цермело — Френкеля, причем мир множеств, где разворачивается эта теория, называют универсумом фон Неймана $\mathbf{V}$. Подход Гёделя основан на подходящем «усечении» универсума фон Неймана. Точнее он вводит универсум конструктивных множеств $\mathbf{L}$, являющийся частью универсума фон Неймана. С этой целью он выделил восемь теоретико-множественных операций, называемых ныне *гёделевыми.* Напомним, что универсум $\mathbf{V}$ строится (трансфинитной) индукцией, причем на шагах индукции для образования новых множеств используется множества всех частей $\mathcal{P}(X)$. Универсум $\mathbf{L}$ строится так же, как и $\mathbf{V}$, однако на каждом шаге индукции вместо $\mathcal{P}(X)$ берется совокупность $\mathcal{Q}(X)$ тех частей множества X, которые могут быть получены из X и из множеств, входящих в X, путем применения восьми гёделевых операций. Гёдель установил, что конструктивные множества образуют модель для теории Цермело — Френкеля и в этой модели имеет место континуум-гипотеза. Следовательно, отрицание гипотезы континуума недоказуема в теории Цермело — Френкеля (=ZF).

10.2. *Теорема* (Гёдель, 1939). *Если теория множеств* ZF *непротиворечива, то теория* ZF $+(\mathbf{V} = \mathbf{L})$ *также непротиворечива. Гипотеза континуума является теоремой теории* ZF $+(\mathbf{V} = \mathbf{L})$.

Подход Коэна в некотором смысле является противоположным: он основан на расширении универсума фон Неймана, но при этом новые множества добавляются с должной осторожностью. Метод Коэна, названный *форсингом,* можно описать на языке булевозначного анализа. Это обнаружили П. Вопенка, Д. Скотт и Р. Соловэй в 1965 году, см. [39, 51] .

Метод форсинга в булевозначном варианте состоит из двух частей — общей и специальной. Общая часть — конструкция булевозначного универсума $\mathbf{V}^{(B)}$ и интерпретация в нем теоретико-множественных утверждений, как это указано в 6.1 и 6.2. Специальная часть состоит в построении специфической булевой алгебры B, обеспечивающей нужные свойства изучаемого объекта. Оказалось, что можно подобрать такую булеву алгебру B, что в соответствующей булевозначной модели $\mathbf{V}^{(B)}$ выполняется отрицание гипотезы континуума: $\omega_1 \neq 2^{\omega_0}$. В то же время, согласно булевозначному принципу переноса, в модели выполняются все аксиомы теории множеств ZF. Отсюда вытекает требуемый результат (подробности см. [15, 31, 39, 51, 73]).

10.3. ***Теорема*** (Коэн, 1963)**.** *Если теория множеств* ZF *непротиворечива, то теория* $\mathrm{ZF}+(2^{\omega_0} \neq \omega_1)$ *также непротиворечива.*

11. Теоремы о сохранении соотношений

Эвристический принцип переноса, выдвинутый Л. В. Канторовичем в связи с концепцией K-пространства, находил позже многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора (см. [17, 18, 19, 20, 21, 22, 59]), так и его последователей, см. [8, 28]. Некоторые из таких результатов были продемонстрированы выше. По существу этот принцип оказался одной из тех стержневых идей, которые, играя организующую роль в становлении нового направления, привели, в конечном итоге, к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными приложениями. Уже в начальный период развития теории предпринимались попытки формализации указанных эвристических соображений. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства. Сформулируем один результат, полученный погибшем на фронте студентом А. И. Юдиным (см. [8, 28]).

11.1. ***Теорема Юдина.*** *Пусть* y_i, z_i $(i = 1, 2, \dots, m)$, u *и* v *— конечные выражения, составленные в архимедовой векторной решетке* X *из аргументов* $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Если в частном случае, когда* $X = \mathcal{R}$, *т. е. когда* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *— вещественные числа, выполнение для каких-нибудь значений* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *всех равенств* $y_i = z_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *влечет выполнение для тех же значений* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *равенства* $u = v$, *то такое же заключение справедливо и в любой векторной решетке* X.

В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Глубина и универсальность принципа Канторовича были объяснены в рамках булевозначного анализа (см. [12, 39]).

Для формулировки булевозначого принципа переноса введем логический язык L. Этот язык состоит из следующих элементов: 1) переменные $x_1, x_2 \dots$; 2) функциональные переменные $f_1, f_2, \dots$ (причем каждому символу f_k поставлено в соответствие число независимых переменных $a(k) \in \mathbb{N}$); 3) символ $\bar{g}$ для каждой непрерывной вещественной функции g; 4) символы отношений $=$ и $\leqslant$; 5) логические связки и кванторы по переменным обоих сортов.

Термы языка L определяются по индукции: переменные являются термами; если $t_1,\dots,t_n$ — термы а h — функциональный символ из 2) или 3), то $h(t_1,\dots,t_n)$ — терм. Можно показать, что для любой непрерывной функции $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ существует единственный элемент $\widetilde{g}\in\mathbf{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\widetilde{g}:(\mathcal{R})^n\to\mathcal{R}]\!]=1$ и $[\![\widetilde{g}(\lambda_1^{\wedge},\dots,\lambda_n^{\wedge})=g(\lambda_1,\dots,\lambda_n)]\!]=1$ для всех $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. Если в терме t заменить каждый функциональный символ f_k на пордяково непрерывное отображение из $(\mathcal{R}{\downarrow})^n$ в $\mathcal{R}{\downarrow}$, где $n=a(k)$, а функциональный символ $\bar{g}$ — на $\widetilde{g}{\downarrow}$, то получится порядково непрерывное отображение, которое обозначим символом t'. Если же в t заменить функциональный символ $\bar{g}$ на $\widetilde{g}$, а каждый функциональный символ f_k на элемент из $\mathbf{V}^{(B)}$, изображающий $a(k)$-местную непрерывную функцию из $\mathcal{R}^n$ в $\mathcal{R}$, где $n=a(k)$, то получится элемент $\mathbf{V}^{(B)}$, изображающий непрерывную функцию. Этот элемент обозначим символом t''.

Элементарные формулы языка L имеют вид $t_1=t_2$ и $t_1\leqslant t_2$, где t_1,t_2— термы. Остальные формулы строятся из элементарных по обычным в логике правилам. Для любой формулы φ языка L обозначим символом φ' (или φ'') формулу, в которой каждый терм t заменен на t' (соответственно на t''). Формулу φ языка L назовем отмеченной, если предваренная нормальная форма формулы φ обладает свойством: бескванторная часть есть конъюнкция элементарных формул или их отрицаний, а из кванторов по функциональным переменным допускается только квантор существования.

11.2. *Теорема* (Гордон, 1982). *Пусть $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ и $\psi(x_1,\dots,x_m)$ — формулы языка L, не содержащие свободных функциональных переменных, причем формула $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ отмеченная. Если предложение*

$$(\forall x_1,\dots,x_m)\,(\varphi(x_1,\dots,x_m)\ \to\ \psi(x_1,\dots,x_m))$$

есть теорема ZFC *о вещественных числах, то для любых $y_1,\dots,y_m\in\mathcal{R}{\downarrow}$ таких, что $[\![\psi''(y_1,\dots,y_m)]\!]=1$, предложение $\varphi'(y_1,\dots,y_m)$ истинно в $\mathcal{R}{\downarrow}$.*

Отсюда вытекает, например, частности, что в $\mathcal{R}{\downarrow}$ всякое алгебраическое уравнение нечетной степени с обратимым старшим коэффициентом имеет корень.

12. *K*-пространства и выпуклый анализ

Абстрактные идеи Л. В. Канторовича в области теории K-пространств оказались, как это ни парадоксально, тесно связанными с идеями линейного программирования и приближённых методов анализа. Обращаясь к идейным установкам теории K-пространств в последней математической работе, которая была опубликована посмертно в Сибирском математическом журнале и которую Л. В. Канторович заканчивал непосредственно перед своей кончиной, он отмечал:

«*При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов, наряду с алгебраическими и другими соотношениями, большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющее место между всеми объектами, упорядочение, имеет обеднённый характер, например, можно все виды упорядочить по их весу, но это мало что даёт. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, оно определяется или фиксируется, а в других случаях оставляется неопределённым (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует* *считать сравнимыми и первый большим второго, если в нём каждого продукта больше, соответственно, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать. Так в своё время была построена теория полуупорядоченных пространств и, прежде всего, теория K-пространств, определённых выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например, теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью её возможности до сих пор ещё не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем, в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль и уже при возникновении K-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.*

Теория K-пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы могут вместо чисел использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Такая нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всём интервале, а десятком чисел — максимумами её на частях этого интервала».

Подчеркнем, что в приведенном фрагменте Л. В. Канторович отмечает неразрывную связь K-пространств с теорией неравенств и экономической проблематикой. Стоит также указать, что идеи линейного программирования имманентны теории K-пространств в следующем строго математическом смысле: *выполнение в абстрактной математической структуре любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K-пространством.* Для точной формулировки необходимы некоторые определения; подробности см. [37, 40, 62].

Пусть A — произвольное решеточно-упорядоченное кольцо с единицей и рассмотрим упорядоченный A-модуль E. Говорят, что E обладает *свойством A-продолжения,* если для любых A-модуля X, A-подмодуля $X_0 \subset X$, а также A-сублинейного оператора $p : X \to E$ и A-линейного оператора $T_0 \in \mathrm{Hom}_A(X_0, E)$, мажорируемого p на X_0, существует продолжение $T \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ с сохранением A-линейности и мажорируемости. Если, помимо этого, для всякого $x \in X$ существует A-линейный оператор $T \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$, мажорируемый оператором p такой, что $Tx = p(x)$, то говорят, что *E допускает выпуклый анализ.*

Полоса $\{I_E\}^{\perp\perp}$ в K-пространстве порядково ограниченных операторов $L^{\sim}(E) := L^{\sim}(E, E)$, порожденное тождественным оператором I_E, обозначают символом $\mathrm{Orth}(E)$. Операторы из $\mathrm{Orth}(E)$ принято называть *ортоморфизмами.* Множество $\mathrm{Orth}(E)$ является решеточно упорядоченным кольцом относительно порядка и кольцевых операций, индуцированных из $L^{\sim}(E)$. Кольцо ортоморфизмов $A \subset \mathrm{Orth}(E)$ назовем *почти рациональным,* если его замыкание относительно поточечной o-сходимости содержит оператор умножения на любое рациональные числа.

Стертым K-пространством называют группу, получающуюся из K-пространств при игнорировании умножений на действительные числа, т. е. «стирании» в памяти части информации о пространстве. Для простоты будем считать, что $E = E^+ - E^+$.

12.1. *Теорема.* *Упорядоченный A-модуль E допускает выпуклый анализ в том и только в том случае, если E — стертое K-пространство и естественное представление A*

в E представляет собой кольцевой и решеточный гомоморфизм на почти рациональное кольцо ортоморфизмов в E.

13. Заключение

Л. В. Канторович по праву считается одним из основоположников математико-экономического направления. Открытое им линейное программирование изменило лицо экономической науки. Леониду Витальевичу хватило гражданского мужества и интеллектуальной решимости бороться за признание своих экономико-математических теорий. Идеи и методы, вызревшие в рамках линейного программирования, положили начало глубоким математическим исследованиям, вышли далеко за пределы экономических приложений и используются в самых разнообразных сферах человеческой деятельности.

Удивительно прозорливым оказалось положение Л. В. Канторовича о том, что элементы K-пространства суть обобщённые числа. Эвристический принцип Канторовича нашёл блестящее подтверждение в рамках современной математической логики. K-пространства, утвердившиеся в качестве новой равноправной модели вещественной прямой, навсегда вошли в сокровищницу мировой науки.

Уходят в прошлое годы общения с Л. В. Канторовичем, время его максимального вклада в науку и жизнь. Но все отчётливее становятся масштабы его личности и унифицирующих идей, устремленных в будущее.

Литература

1. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—564 с.
3. *Бухвалов А. В.* Приложения методов порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук.—1983.—Т. 38, № 6.—С. 37–83.
4. *Бухвалов А. В.* Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // В кн: Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т.26.—С. 3–63.
5. *Бухвалов А. В., Векслер А.И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1980.—Т. 18.—С. 125-184.
6. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.* Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 2.—С. 137-183.
7. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—320 с.
8. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.
9. *Гёдель К.* Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.—С. 96–149.
10. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.
11. *Гордон Е. И.* K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.
12. *Гордон Е. И.* К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55-65.
13. *Гретцер Г.* Общая теория решеток.—М.: Мир, 1982.—454 с.
14. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика.—М.: Наука, 1979.—320 с.
15. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.
16. *Кантор Г.* Труды по теории множеств.—М.: Наука, 1985.—430 с.
17. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1, 2.—С. 11–14.
18. *Канторович Л. В.* К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

19. *Канторович Л. В.* О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 1.—С. 9–13.
20. *Канторович Л. В.* Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, №. 9.—С. 101–106.
21. *Канторович Л. В.* Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.
22. *Канторович Л. В.* О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.—1937.—Т. 3, № 7.—С. 17–33.
23. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.—68 с.
24. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, № 6.—С. 89–185.
25. *Канторович Л. В.* Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов.— М.: Изд-во АН СССР, (1959) 1960.—347 с.
26. *Канторович Леонид Витальевич, 1912–1986 / Сост.* Н. С. Дворцина, И. А. Махрова. Авт. вступ. ст. В. Л. Макаров, С. С. Кутателадзе, Г. Ш. Рубинштейн. М.: Наука, 1989.—134 с. (Материалы к биобиблиогр. ученых СССР. Сер. мат. наук; Вып. 18).
27. *Канторович Л. В.* Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
28. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
29. *Канторович Л. В., Крыловым В. И.* Приближённые методы высшего анализа.— М.—Л.: Физматгиз, (1941, 1949, 1950, 1952) 1962.—708 с.
30. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.
31. *Коэн П. Дж.* Теория моделей и континуум-гипотеза. —М.: Мир, 1973.—347 с.
32. *Коэн П. Дж.* Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, вып. 5.—С. 169–176.
33. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.—394 с.
34. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—255 с.
35. *Кусраев А. Г.* О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 100–110.
36. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
37. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
38. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартный порядковый анализ. Приглашение.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2000.—140 с.
39. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—398 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
40. *Кутателадзе С. С.* О выпуклом анализе в модулях // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 4.—С. 118–128.
41. *Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш.* Научное наследие Л. В. Канторовича (1912–1986) // Сиб. журн. индуст. мат.— 2001.— Т. 4, № 2 (8).— С. 3–17.
42. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.
43. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.
44. *Проблемы Гильберта.* М: Наука, 1969.—240 с.
45. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.
46. *Столл Р. Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории.—М.: Просвещение, 1968.—231 с.
47. *Фукс Л.* Упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.
48. *Яглом И. М.* Булева структура и ее модели.—М.: Советское радио, 1980.—193 с.
49. *Aliprantis Ch. D., Burkinshaw O.* Locally Solid Riesz Spaces.—New York: Academic Press, 1978.—198 p.
50. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 p.
51. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.— New York a.o.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 pp.
52. *Boole G.* An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.—New York: Dover, 1957.—xi+424 pp.
53. *Buskes G. J. H. M.* The Hahn–Banach Theorem Surveyed.—Warszawa: Inst. Mat. PAN, 1993 (Diss. Mat., CCCXXVII).
54. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory.—Cambridge: Cambridge University Press, 1974.—266 p.
55. *Halmos P. R.* Lectures on Boolean Algebras.—Toronto, New York and London: Van Nostrand, 1963.—147 p.

56. *Jech T. J.* Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.
57. *Jonge E. de, Rooij A. C. M. van.* Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
58. *Kantorovich L. V.* Sur la continuite et sur la prolongement des operations lineaires // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.—1938.—V. 206.—P. 833–835.
59. *Kantorovich L. V.* The method of successive approximation for functional equations // Acta Math.—1939.—V. 71.—P. 63–97.
60. *Kurepa G.* Tableaux ramifiés d'ensembles, Espaces pseudodistanciés // C. R.—1934. T. 198.—P. 1563–1565.
61. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.— Dordrecht: Kluwer, 2000.—464 p.
62. *Kutateladze S. S.* Nonstandard tools for convex analysis // Math. Japon.—1996.—V.43, No. 2.—P. 391–410.
63. *Lacey H. E.* The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—247 p.
64. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
65. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 1.— Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 p.
66. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.— Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.
67. *Monk J. D., Bonnet R.* (eds.) Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.
68. *Riesz F.* Sur la décomposition des opérations fonctionnelles // Atti Congresso Internaz. Bologna 1928.—1930.—V. 3.—P. 143–148.
69. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 pp.
70. *Schröder J.* Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1956.—V. 66.—P. 111–116.
71. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators,—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.
72. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo, Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.
73. *Takeuti G., Zaring W. M.* Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.
74. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—720 p.

Владикавказ — Новосибирск *Статья поступила 10 декабря 2001 г.*