Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2002, Том 4, Выпуск 1

УДК **517.518.1**

ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ КВАЗИАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов

В работе приводится описание операторов суперпозиции в пространствах Лебега. В том случае, когда оператор понижает суммируемость, существенную роль при описании таких операторов играют свойства квазиаддитивных функций, определенных на открытых подмножествах однородных пространств. В первой части работы доказана оценка для интеграла от верхней производной функции множества, из которой вытекает простое доказательство теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла и существование плотности почти всюду. Получены также приложения к геометрической теории меры.

Введение

0.1. В работах [1, 2] естественным образом возникает (квази)аддитивная функция множества, определенная на открытых подмножествах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Напомним [2], что неотрицательная функция Φ, определенная на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{R}^n$ и принимающая конечные значения, называется (*конечно-*)*квазиаддитивной* (*аддитивной*), если для всякого набора открытых попарно непересекающихся множеств $U_i \subset U$, $i = 1, \dots, k$, $U \subset D$ — открытое множество, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leqslant \Phi(U)$$

(соотношение $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i\Big) \leqslant \Phi(U)$; в работе [2] имеется опечатка: правое неравенство в этом соотношении отсутствует). Таким образом, (квази)аддитивная функция множества монотонна по определению.

В [1, 2] (квази)аддитивная функция множества дифференцируется и используется формула восстановления ее абсолютно непрерывной части:

1) *в почти каждой (в лебеговском смысле) точке $x \in D$ существует конечная производная*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Phi(B_r(x))}{|B_r(x)|} = \Phi'(x) \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Совета государственной поддержки ведущих научных школ и INTAS-10170.

(здесь $B_r(x)$ — открытый шар с центром в x радиуса r, а символ $|\cdot|$ обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}^n$);

2) *для любого открытого множества* $U \subset D$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \Phi'(x)\,dx \leqslant \Phi(U). \tag{2}$$

В евклидовом пространстве свойства (1) и (2) доказаны в [3, теорема 1, с. 209]. Очевидно, рассуждения из [3] могут быть обобщены на метрические структуры более общей природы, что, в частности, оправдывает применение формул (1) и (2) на группах Карно в работе авторов [2]. Ниже мы выводим формулы (1) и (2) из более общих результатов (см. следствие 5).

В настоящей работе мы исследуем свойства обобщенной квазиаддитивной функции, определенной на открытых подмножествах области D однородного метрического пространства $\mathbb{X}$ (точное определение однородного метрического пространства см. ниже), доказываем для нее аналоги свойств (1) и (2). Особенность нашего подхода состоит в том, что свойство (1) мы получаем как следствие аналога неравенства (2) для верхней производной (теоремы 1 и 3). В частности, мы получаем условия на меру, при которых можно получить те или иные обобщения свойств (1) и (2) на пространствах однородного типа. В качестве следствия мы получаем простое доказательство классической теоремы Лебега о дифференцировании интеграла (следствие 3). Во второй части работы мы применяем полученные результаты к теории пространств Лебега и геометрической теории меры.

0.2. Напомним определение пространства однородного типа. *Квазиметрикой* на $\mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — некоторое непустое множество, называется неотрицательная функция $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, обладающая следующими свойствами 1–3.

Свойство 1. *Для всех точек* $x, y \in \mathbb{X}$ *равенство* $d(x, y) = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x = y$.

Свойство 2. *Существует положительная постоянная* c *такая, что неравенство* $d(x, y) \leqslant cd(y, x)$ *выполнено для всех точек* x *и* y, *принадлежащих* $\mathbb{X}$.

Свойство 3. *Существует положительная постоянная* c *такая, что неравенство* $d(x, y) \leqslant c(d(x, z) + d(y, z))$ *выполнено для всех точек* x, y *и* z, *принадлежащих* $\mathbb{X}$ (*обобщенное неравенство треугольника*).

Мы предполагаем также, что функция d полунепрерывна сверху по первой переменной. Из этого требования вытекает, что шары $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{X} : d(y, x) < \delta\}$, $0 < \delta$, открыты. (В дальнейшем мы также будем использовать обозначение $\operatorname{rad}(B_\delta(x)) = \delta$.) Таким образом, для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ определена система $\{B_\delta(x)\}_\delta$ открытых шаров в $\mathbb{X}$, параметризованных δ, $0 < \delta < \infty$. Очевидно, что шары монотонны по включению относительно δ, т. е., $B_{\delta_1}(x) \subset B_{\delta_2}(x)$ при $\delta_1 < \delta_2$, и обладают *свойством поглощения* [4]:

Свойство 4. *Существует постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что*

$$B_\delta(x) \cap B_\delta(y) \neq \varnothing \Rightarrow B_\delta(y) \subset B_{c_1\delta}(x)$$

для всех x, y *и* $\delta > 0$.

Мы предполагаем, что на $\mathbb{X}$ определена борелевская мера μ, согласованная с метрикой d в следующем смысле:

Свойство 5. *Для любого шара $B_\delta(x) \subset \mathbb{X}$ выполнено $0 < \mu(B_\delta(x)) < \infty$, и существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что*

$$\mu(B_{c_1\delta}(x)) \leqslant c_2\mu(B_\delta(x))$$

для всех $x \in \mathbb{X}$ и $\delta > 0$.

Однородное пространство $(\mathbb{X}, d, \mu)$ состоит из квазиметрического пространства $(\mathbb{X}, d)$ и определенной на нем борелевской меры μ, которые обладают описанными выше свойствами 1–5.

Напомним, что множество $E \subset \mathbb{X}$ называется *ε-сетью* для множества $A \subset \mathbb{X}$, ε — некоторое положительное число, если для любой точки $x \in A$ найдется хотя бы одна точка $y \in E$ такая, что $d(x, y) < \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — однородное пространство. Тогда в каждом шаре $B \subset \mathbb{X}$ существует конечная ε-сеть для любого $\varepsilon > 0$.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольный шар $B(x, r)$, содержащийся в $\mathbb{X}$. Покажем, что для любого натурального числа k существует не более чем m (m зависит только от числа k и постоянных c_1 и c_2) точек $x_1, \dots, x_m$, содержащихся в шаре $B(x, r)$, таких, что $d(x_i, x_j) > \frac{r}{2^k}$ при $i \neq j$. Фиксируем число k, тогда $B(x_i, \frac{r}{2^k}) \subset B(x, 2cr)$ и

$$B\Big(x_i, \frac{r}{2^{k+1}c^2}\Big) \cap B\Big(x_j, \frac{r}{2^{k+1}c^2}\Big) = \varnothing \quad \text{при } i \neq j,$$

где c — постоянная из обобщенного неравенства треугольника. Следовательно,

$$\mu(B(x, 2cr)) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \mu\Big(B\Big(x_i, \frac{r}{2^{k+1}c^2}\Big)\Big).$$

С другой стороны, $B(x_i, 2cr) \supset B(x, r)$, и так как свойство 5 эквивалентно неравенству

$$\mu(B(x, r)) \leqslant c_3\mu\Big(B\Big(x, \frac{r}{2c^2}\Big)\Big),$$

где c_3 — некоторая постоянная, зависящая от c, c_1 и c_2 [4], то

$$\mu(B(x, r)) \leqslant \mu(B(x_i, 2cr)) \leqslant c_3^{k+2}\mu\Big(B\Big(x_i, \frac{r}{2^{k+1}c^2}\Big)\Big).$$

Из последних неравенств получаем, что

$$c_3\mu(B(x, r)) \geqslant \mu(B(x, 2cr)) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \mu\Big(B\Big(x_i, \frac{r}{2^{k+1}c^2}\Big)\Big) \geqslant \frac{m}{c_3^{k+2}}\mu(B(x, r)),$$

и, значит, $m \leqslant c_3^{k+3}$. Таким образом, множество $\{x_1, \dots, x_m\}$ образует конечную 2^{-k}-сеть для шара $B(x, r)$, и так как натуральное число k было выбрано произвольно, то лемма доказана. $\rhd$

Следствие 1. *Полное однородное пространство $(\mathbb{X}, d, \mu)$ локально компактно.*

В дальнейшем, мы предполагаем, что $(\mathbb{X}, d)$ — полное метрическое пространство.

Примеры однородных пространств см., например, в [4]. В частности, таковыми являются евклидовы пространства, группы Карно и пространства Карно — Каратеодори. Напомним, что *группой Карно* [5], называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли $\mathcal{G}$ которой разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, $\dim V_1 \geqslant 2$, векторных пространств таких, что $[V_1,\ V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $[V_1,\ V_m] = \{0\}$.

1. Функции множества на системе открытых подмножеств

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{X}$. Отображение Φ, определенное на открытых подмножествах из D и принимающее неотрицательные значения, называется *q-квазиаддитивной* функцией множества, где $q \geqslant 1$ — фиксированное число, если

1) Для всякой точки $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 \leqslant \Phi(B_\delta(x)) < \infty$;

2) $\Phi(U_1) \leqslant \Phi(U_2)$, если $U_1 \subset U_2 \subset D$ — открытые множества;

3) для всякого конечного набора $U_i \subset U$, $i = 1, \dots, k$, попарно непересекающихся открытых множеств, $U \subset D$ — открытое множество,

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leqslant q\Phi(U).$$

В дальнейшем, 1-квазиаддитивную функцию будем также называть квазиаддитивной функцией.

1.1. Пусть Φ — неотрицательная функция, определенная на открытых подмножествах области D. Определим (относительную) максимальную функцию M_Φ^D по правилу

$$\big(M_\Phi^D\big)(x) = \sup_{x \in B, B \subset D} \frac{\Phi(B)}{\mu(B)},$$

где верхняя грань берется по всем открытым шарам $B \subset D$, содержащим точку x.

Предложение 1. *Пусть Φ — неотрицательная функция, определенная на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{X}$. Тогда*

a) *максимальная функция M_Φ^D полунепрерывна снизу;*

b) *множество $E_t = \{x \in D : \big(M_\Phi^D\big)(x) > t\}$ открыто;*

c) *M_Φ^D — борелевская функция.*

$\lhd$ a) Фиксируем точку $x_0 \in D$. По определению максимальной функции для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется шар $B_\varepsilon \subset D$, содержащий точку x_0, такой, что выполнены неравенства

$$\frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} \leqslant \big(M_\Phi^D\big)(x_0) < \frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} + \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность точек $\{x_n\}_1^\infty$, сходящуюся к точке x_0. Выберем натуральное число N так, что при всех $n > N$ выполняется $x_n \in B_\varepsilon$. Тогда

$$\big(M_\Phi^D\big)(x_n) \geqslant \frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} > \big(M_\Phi^D\big)(x_0) - \varepsilon.$$

Так как ε выбрано произвольно, получаем $\liminf\limits_{n\to\infty}\bigl(M_\Phi^D\bigr)(x_n) \geqslant (M_\Phi^D)(x_0)$.

b) Так как максимальная функция $\bigl(M_\Phi^D\bigr)(x)$ полунепрерывна снизу, то множество E_t открытое.

c) Так как множество E_t открыто для любого $t>0$, то M_Φ^D — борелевская функция. $\triangleright$

Предложение 2. *Пусть Φ — q-квазиаддитивная функция, определенная на открытых подмножествах области D однородного пространства $\mathbb{X}$. Тогда для любого открытого множества $U \subset D$ и любого $t>0$*

$$\mu\bigl(\bigl\{x\in U : \bigl(M_\Phi^U\bigr)(x) > t\bigr\}\bigr) \leqslant q\frac{c_2}{t}\Phi(U).$$

Для доказательства предложения 2 нам потребуется следующая

Лемма 2 [4, с. 12]. *Пусть E — измеримое подмножество $\mathbb{X}$, являющееся объединением конечного набора шаров $\{B_j\}$. Тогда можно выбрать конечный набор попарно непересекающихся шаров $B_1,\dots,B_m$ из $\{B_j\}$ такой, что*

$$\sum_{k=1}^{m}\mu(B_k) \geqslant c_2^{-1}\mu(E).$$

Перейдем к доказательству предложения 2.

$\triangleleft$ Определим множество E_t следующим образом:

$$E_t = \bigl\{x\in U : \bigl(M_\Phi^U\bigr)(x) > t\bigr\},$$

и пусть E будет произвольное компактное подмножество множества E_t. Из определений максимальной функции M_Φ^U и множества E_t следует, что для любой точки $x\in E$ существует шар $B^x \subset U$, содержащий точку x, такой, что

$$\Phi(B^x) > t\mu(B^x). \tag{3}$$

Так как $x \in B^x$, то в силу компактности множества E мы можем выбрать конечную совокупность таких шаров, покрывающую множество E. По лемме 2 из нее можно выбрать конечный набор попарно различных шаров $B_1,\dots,B_m$ такой, что

$$\mu(E) \leqslant c_2\sum_{k=1}^{m}\mu(B_k). \tag{4}$$

Применяя к каждому из шаров B_k (3) и затем (4), приходим к неравенствам

$$\sum_k \Phi(B_k) > t\sum_{k=1}^{m}\mu(B_k) > tc_2^{-1}\mu(E).$$

Используя оценку $\sum\limits_k \Phi(B_k) \leqslant q\Phi(U)$, имеем $\mu(E) \leqslant q\frac{c_2}{t}\Phi(U)$ для произвольного компактного подмножества $E \subset E_t$. Переходя к точной верхней грани по всем таким $E\subset E_t$, получаем требуемое утверждение. $\triangleright$

Верхняя и *нижняя* производные q-квазиаддитивной функции множества, заданной на открытых множествах из D, определяются следующим образом:

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{\delta<h} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \inf_{\delta<h} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)},$$

где точная верхняя и нижняя грани берутся по всем шарам $B_\delta \ni x$, $B_\delta \subset D$, радиус δ которых меньше h.

Заметим, что функция

$$M_\Phi(x,r) = \sup_{0<\delta<r,\, x\in B_\delta} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)}$$

полунепрерывна снизу при всяком фиксированном $r > 0$ для всех $x \in D$ таких, что $\operatorname{dist}(x, \partial D) > 2cr$ (см. доказательство предложения 1), и значит, является борелевской функцией. Следовательно, верхняя производная $\overline{\Phi}'(x)$, как предел последовательности борелевских функций, сходящихся поточечно, сама является борелевской функцией ([6], с. 595).

Аналогично проверяется, что $\underline{\Phi}'(x)$ также является борелевской функцией.

Очевидно, для любой точки $x \in U \subset D$, где U — открытое множество, справедливо поточечное неравенство $\overline{\Phi}'(x) \leqslant M_\Phi^U(x)$. Поэтому непосредственно из предложения 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть Φ — q-квазиаддитивная функция, определенная на открытых подмножествах области D однородного пространства $\mathbb{X}$. Тогда для любого открытого множества $U \subset D$ и любого $t > 0$*

$$\mu(E_t) \leqslant q\frac{c_2}{t}\Phi(U), \quad \text{где } E_t = \{x \in U : \overline{\Phi}'(x) > t\}.$$

В частности, верхняя производная $\overline{\Phi}'(x) < +\infty$ для почти всех $x \in D$.

Теорема 1. *Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — пространство однородного типа с определенной на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{X}$ q-квазиаддитивной функцией множества Φ. Тогда для любого открытого множества $U \subset D$*

$$\int\limits_U \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x) \leqslant c_2 q^2 \Phi(U).$$

$\triangleleft$ При $1 < t < \infty$ множество $A = \{x \in U : 0 < \overline{\Phi}'(x) < \infty\}$ представимо в виде объединения непересекающихся измеримых множеств $P_n = \{x \in A : t^n < \overline{\Phi}'(x) \leqslant t^{n+1}\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольное компактное множество $F_n \subset P_n$ и для фиксированного конечного набора $K \subset \mathbb{Z}$ рассмотрим произвольные открытые попарно непересекающиеся множества $U_n \supset F_n$, $U_n \subset U$, $n \in K$. Тогда, применяя следствие 2 к множествам F_n вместо E_t и U_n вместо U, получаем неравенства

$$q\Phi(U) \geqslant \sum_{n\in K} \Phi(U_n) \geqslant \frac{1}{c_2 q} \sum_{n\in K} t^n \mu(F_n) \geqslant \frac{1}{c_2 q} \sum_{n\in K} t^{-1} \int\limits_{F_n} \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x).$$

Так как множества $F_n \subset P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, набор $K \subset \mathbb{Z}$ и число $t > 1$ произвольны, а $\mu(\{x \in U : \overline{\Phi}'(x) = \infty\}) = 0$, то теорема доказана. $\rhd$

Следствие 3 (теорема Лебега)**.** *Пусть $\mathbb{X}$ — однородное пространство, D — область в $\mathbb{X}$. Предположим, что функция f принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда для почти всех $x \in D$*
$$\lim_{\delta\to 0,\, B_\delta \ni x} \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} |f(y) - f(x)|\, d\mu(y) = 0. \tag{5}$$

$\lhd$ Для функции $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и открытого множества $U \subset D$ положим
$$\Phi(U) = \int\limits_U g(y)\, d\mu(y).$$

Так как Φ — 1-квазиаддитивная функция множества, то по теореме 1 для произвольного открытого множества $U \subset D$ выполнено неравенство
$$\int\limits_U \overline{g}(y)\, d\mu(y) \leqslant c_2 \int\limits_U g(y)\, d\mu(y) = c_2\Phi(U),$$
где
$$\overline{g}(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{x\in B_\delta, \delta<h} \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} g(y)\, d\mu(y) = \overline{\Phi}'(x).$$

Поскольку неравенство $\int\limits_U (\overline{g}(y) - c_2 g(y))\, d\mu(y) \leqslant 0$ выполняется для всех открытых множеств $U \subset D$, то для μ-почти всех $x \in D$ справедливо
$$\overline{g}(x) \leqslant c_2 g(x). \tag{6}$$

Далее, для произвольного рационального числа p положим $g_p = |f(y) - p|$ и, применяя неравенство (6) к функции g_p, получаем, что для почти всех $x \in D$
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \sup_{x\in B_\delta, \delta<h} &\frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} |f(y) - f(x)|\, d\mu(y)\\ &\leqslant \lim_{h\to 0} \sup_{x\in B_\delta, \delta<h} \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} (g_p(y) + |p - f(x)|)\, d\mu(y)\\ &\qquad\leqslant c_2 g_p(y) + |p - f(x)| = (1 + c_2)|p - f(x)|\end{aligned}$$
для почти всех $x \in D$. Так как число p произвольно и при фиксированном x может быть выбрано сколь угодно близким к значению $f(x)$, то равенство (5) доказано. $\rhd$

Заметим, что приведенное доказательство теоремы Лебега не требует аппроксимации средними по Стеклову, и применимо на широком классе метрических пространств.

1.2. В дальнейшем, мы предполагаем, что мера обладает следующим свойством непрерывности:

Свойство 6. *Функция* $(0,\infty) \ni \delta \mapsto \mu(B_\delta(x))$ *непрерывна при любом фиксированном* $x \in \mathbb{X}$.

Из свойства 6 вытекает, в частности, что мера сферы равна нулю: $\mu(\{y \in \mathbb{X} : d(x,y) = \delta\} = 0)$ для любой точки $x \in \mathbb{X}$ и радиуса $\delta > 0$.

Для доказательства следующего утверждения о производных q-квазиаддитивной функции нам потребуется более тонкое утверждение о покрытиях, известное как теорема Витали (см. ниже теорему 2). Семейство шаров $\{B_\alpha\}$ называется *покрытием Витали* измеримого множества $E \subset \mathbb{X}$, если для каждого $x \in E$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует шар $B_{\alpha_0} \in \{B_\alpha\}$ такой, что $x \in B_{\alpha_0}$ и $\operatorname{rad}(B_\alpha) < \varepsilon$. Покрытие называется *замкнутым*, если каждый шар из этого семейства замкнут, и *открытым*, если каждый шар из этого семейства открыт.

Для каждого шара $B_\delta(x) \in \mathbb{X}$ определим его *расширение* $B^*_\delta(x)$ следующим образом. Положим
$$B^*_\delta(x) = \bigcup B_\gamma,$$
где объединение берется по всем шарам B_γ таким, что $B_\gamma \cap B_\delta(x) \neq \varnothing$ и $\gamma \leqslant \delta$. Заметим, что из свойств 4 и 5 следует условие
$$\mu(B^*_\delta(x)) \leqslant c_2 \mu(B_\delta(x))$$
(см., например, [4, с. 8]). Это условие является основным в теоремах о покрытиях типа Витали. Сформулируем в нужной нам форме теорему 2.8.17 из [7].

Внешней мерой $\mu_e(E)$ множества $E \subset \mathbb{X}$ называется точная нижняя граница мер всевозможных измеримых относительно меры μ множеств, содержащих множество E:
$$\mu_e(E) = \inf_{G \supset E} \{\mu(G)\}.$$

Теорема 2 [7]. *Пусть* $\mathbb{X}$ *— однородное пространство и* $\{\overline{B}_\alpha\}$ *— замкнутое покрытие Витали множества* $E \subset \mathbb{X}$. *Тогда существует последовательность попарно непересекающихся замкнутых шаров из этого семейства* $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_k, \dots$ *такая, что*
$$\mu_e\Big(E \setminus \bigcup_k \overline{B}_k\Big) = 0.$$

Из теоремы 2 следует

Лемма 3. *Пусть* $\mathbb{X}$ *— однородное пространство и* $\{B_\alpha\}$ *— открытое покрытие Витали множества* $E \subset \mathbb{X}$. *Тогда найдется последовательность попарно непересекающихся открытых шаров* $B_1, B_2, \dots, B_k, \dots,\ B_k \in \{B_\alpha\}$, *такая, что*
$$\mu_e\Big(E \setminus \bigcup_k B_k\Big) = 0.$$

Применение леммы 3 позволяет уточнить оценку меры множества E_t, полученную в предложении 2.

Предложение 3. *Пусть Φ — q-квазиаддитивная функция, определенная на открытых подмножествах области $D \in \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — однородное пространство. Тогда, если в каждой точке ограниченного множества $E \subset D$ выполняется неравенство $\overline{\Phi}'(x) > t > 0$, то для любого открытого множества $U \supset E$, $U \subset D$, имеем*

$$\mu_e(E) \leqslant \frac{q}{t}\Phi(U). \tag{7}$$

$\lhd$ Действительно, возьмем произвольную точку $x \in E$. Тогда найдется последовательность шаров $B_k^x \subset U$, $x \in B_k^x$, радиусы которых стремятся к нулю, такая, что неравенство

$$\frac{\Phi(B_k^x)}{\mu(B_k^x)} > t > 0$$

выполнено при всех $k \in \mathbb{N}$. Семейство $\bigcup_{x\in E}\bigl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^x\bigr)$ образует покрытие множества E в смысле Витали, значит, найдется последовательность попарно непересекающихся шаров B_m из этого семейства такая, что $\mu_e(E \setminus \bigcup_m B_m) = 0$.

Имеем

$$\mu_e(E) \leqslant \sum_m \mu(B_m),$$

и $t\mu(B_m) < \Phi(B_m)$ при каждом m. Следовательно,

$$t\mu_e(E) \leqslant t\sum_m \mu(B_m) \leqslant \sum_m \Phi(B_m) \leqslant q\Phi(U)$$

и поэтому нужное неравенство установлено. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{X}$ — однородное пространство, а q-квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{X}$. Тогда для любого открытого множества $U \subset D$*

$$\int\limits_U \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x) \leqslant q\Phi(U). \tag{8}$$

Замечание 1. Аналогичное неравенство для нижней производной $\underline{\Phi}'$ вместо верхней $\overline{\Phi}'$ было установлено в [8, лемма 2.3] при произвольном q в предположении, что q-квазиаддитивная функция множества определена на борелевских подмножествах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

$\lhd$ При $1 < t < \infty$ множество $A = \{x \in U : 0 < \overline{\Phi}'(x) < \infty\}$ представимо в виде объединения непересекающихся множеств $P_n = \{x \in A : t^n < \overline{\Phi}'(x) \leqslant t^{n+1}\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольное компактное множество $F_n \subset P_n$ и для фиксированного конечного набора $K \subset \mathbb{Z}$ рассмотрим произвольные открытые попарно непересекающиеся множества $U_n \supset F_n$, $U_n \subset D$, $n \in K$. Возьмем произвольную точку $x \in F_n$. Тогда найдется последовательность шаров $B_k^x \subset U_n$, $x \in B_k^x$, радиусы которых стремятся к нулю, такая, что неравенство

$$\Phi(B_k^x) > t^n\mu(B_k^x) > 0$$

выполнено при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $F = \bigcup_n F_n$, $n \in K$. Очевидно, что семейство шаров $\bigcup_{x\in F}\bigl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^x\bigr)$ образует покрытие множества F в смысле Витали. Следовательно, найдется последовательность попарно непересекающихся шаров B_m из этого семейства такая, что $\mu(F\setminus\bigcup_m B_m) = 0$. Заметим, что в силу выбора шаров справедливо свойство $\mu(F_n \setminus \bigcup\{B_m : B_m \cap F_n \neq \varnothing\}) = 0$ для любого $n \in K$. Далее имеем

$$q\Phi(U) \geqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \Phi(B_m) = \sum_{n\in K} \sum_{B_m\cap F_n\neq\varnothing} \Phi(B_m) \geqslant \sum_{n\in K} t^n \Bigl(\sum_{B_m\cap F_n\neq\varnothing} \mu(B_m)\Bigr)$$
$$= \sum_{n\in K} t^n \mu(F_n) \geqslant \sum_{n\in K} t^{-1} \int\limits_{F_n} \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x).$$

Так как множества $F_n \subset P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, набор $K \subset \mathbb{Z}$ и число $t > 1$ произвольны, неравенство (8) доказано. $\rhd$

Следствие 4. *Пусть $\mathbb{X}$ — однородное пространство, а q-квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{X}$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{X}$*

$$\overline{\Phi}'(x) \leqslant q\underline{\Phi}'(x).$$

$\lhd$ Из неравенства (8) следует, что для произвольного шара $B_\delta \subset D$ справедливо

$$\frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x) \leqslant q\frac{1}{\mu(B_\delta)} \Phi(B_\delta).$$

Переходя в последнем неравенстве к нижнему пределу при $\delta \to 0$ и применяя следствие 3, находим, что $\overline{\Phi}'(x) \leqslant q\underline{\Phi}'(x)$. $\rhd$

Из теоремы 3 и следствия 4 вытекают свойства (квази)аддитивной функции, определенной на открытых подмножествах однородного пространства $\mathbb{X}$, обобщающие соответствующие результаты из [3], в частности, соотношения (1) и (2) при $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$.

Следствие 5. *Пусть $\mathbb{X}$ — однородное пространство, а 1-(квази)аддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{X}$. Тогда*

a) *в почти каждой точке $x \in D$ существует конечная производная*

$$\lim_{\delta\to 0,\, B_\delta \ni x} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)} = \Phi'(x);$$

b) *для любого открытого множества $U \subset D$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \Phi'(x)\, d\mu(x) \leqslant \Phi(U).$$

Заметим, что соотношение между верхней и нижней производными q-квазиаддитивной функции (следствие 4) может быть доказано независимым образом. Приводимое ниже доказательство обобщает рассуждения из [3, теорема 5, с. 207; 9, с. 33–35].

Предложение 4. *Пусть Φ — q-квазиаддитивная функция, определенная на конечных объединениях открытых шаров из области $D \subset \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — однородное пространство. Тогда $\overline{\Phi}'(x) \leqslant q\underline{\Phi}'(x)$ для почти всех $x \in D$.*

$\lhd$ Представим множество $A = \{x \in D : \overline{\Phi}'(x) > q\underline{\Phi}'(x)\}$ в виде $A = \bigcup\limits_{r,s} A_{rs}$, где объединение берется по всем парам рациональных чисел $r > s$, а $A_{r,s} = \{x \in D : \overline{\Phi}'(x) > r > s > q\underline{\Phi}'(x)\}$. Фиксируем пару чисел $r > s$ и докажем, что $\mu(A_{rs}) = 0$. Пусть последовательности шаров $B_k^* \ni x,\ B_k^* \subset D$ и $B_k \ni x,\ B_k \subset D$ выбраны так, что

$$\underline{\Phi}'(x) = \lim_{\mathrm{rad}(B_k^*)\to 0} \frac{\Phi(B_k^*)}{\mu(B_k^*)} \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}'(x) = \lim_{\mathrm{rad}(B_k)\to 0} \frac{\Phi(B_k)}{\mu(B_k)}.$$

Тогда

$$A_{rs} = \left\{x \in D : \exists k_0(x)\ \forall k > k_0(x) \quad \left(\frac{\Phi(B_k)}{\mu(B_k)} > r > s > q\frac{\Phi(B_k^*)}{\mu(B_k^*)}\right)\right\}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и такое открытое множество G, содержащее A_{rs}, что $\mu(G) \leqslant \mu_e(A_{rs}) + \varepsilon$. Семейство $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x\in A_{rs}} \bigcup\limits_k B_k^*$ образует покрытие Витали множества A_{rs}. Применим к семейству $\mathcal{B}$ и множеству A_{rs} лемму 3, используя только те шары B_k^*, которые содержатся в G. Получим последовательность непересекающихся шаров S_k^*, для которой $\mu_e\bigl(A_{rs} \setminus \bigcup\limits_k S_k^*\bigr) = 0$. Ясно, что

$$\mu(U) \geqslant \sum_k \mu(S_k^*) \geqslant \frac{q}{s} \sum_k \Phi(S_k^*).$$

Заметим, что

$$\mu_e(A_{rs}) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_e(A_{rs} \cap S_k^*).$$

Поэтому, применяя предложение 3 к множеству $A_{rs} \cup S_k$ вместо E и S_k вместо U, имеем

$$\mu_e(A_{rs}) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_e(A_{rs} \cap S_k^*) \leqslant \frac{q}{r} \sum_k \Phi(S_k^*) \leqslant \frac{s}{r}\mu(G) \leqslant \frac{s}{r}(\mu_e(A_{rs}) + \varepsilon).$$

Итак,

$$\mu_e(A_{rs}) \leqslant \varepsilon \frac{s}{r-s}.$$

Поскольку ε сколь угодно мало, получаем $\mu(A_{rs}) = 0$. $\rhd$

Замечание 2. Результаты параграфа 1 справедливы также и в том случае, если вместо метрического пространства $(\mathbb{X}, d)$ рассматривается множество $\mathbb{X}$ такое, что для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ определена система $\{B_\delta(x)\}_\delta$ непустых ограниченных подмножеств множества $\mathbb{X}$, параметризованных δ, $0 < \delta < \infty$, т. е. задана система $\{B_\delta = B_\delta(x)\}_\delta$ *открытых шаров с центром в точке x радиуса δ*. Предполагается, что шары монотонны относительно δ: $B_{\delta_1}(x) \subset B_{\delta_2}(x)$ при $\delta_1 < \delta_2$, удовлетворяют свойствам 4, 5, 6, а также двум формулируемым ниже требованиям.

Свойство 7. $\bigcap\limits_\delta \overline{B_\delta(x)} = \{x\}$ *и* $\bigcup\limits_\delta B_\delta(x) = \mathbb{X}$.

Свойство 8. *Для каждого открытого множества U и каждого $\delta > 0$ функция $x \mapsto \mu(B_\delta(x) \cap U)$ непрерывна.*

1.3. В этом пункте мы сформулируем простые условия, обеспечивающие равенство в соотношении (8). Известно, см. например [7], что если Φ определена на борелевских множествах, счетно аддитивна и абсолютно непрерывна, то в соотношении (8) имеет место равенство. В этом пункте мы получим равенство в (8) при более слабых предположениях.

Свойство 9. *1-квазиаддитивная функция множества Φ, определенная на открытых множествах области $D \subset \mathbb{X}$, называется (конечно) субаддитивной, если для любого конечного набора открытых множеств $U_i \subset D$, $i = 1, \dots, k$, имеет место неравенство*

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i).$$

Свойство 10. *1-квазиаддитивная функция множества Φ, определенная на открытых множествах области $D \subset \mathbb{X}$, называется абсолютно непрерывной относительно меры μ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\Phi(U) < \varepsilon$ для любого открытого множества $U \subset D$, удовлетворяющего условию $\mu(U) < \delta$.*

Лемма 4. *Пусть 1-квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых множествах области $D \subset \mathbb{X}$ и удовлетворяет свойствам 9 и 10. Тогда для нее справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(U_i)$ для любого конечного набора попарно непересекающихся открытых множеств $U_i \subset D$, $i = 1, \dots, k$.

2) $\Phi\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i\Big) = \lim\limits_{i\to\infty} \Phi(U_i)$ для любой монотонной последовательности U_i, $i \in \mathbb{N}$, открытых множеств в D: $U_i \subset U_{i+1} \subset U \subset D$, $i \in \mathbb{N}$, $\mu(U) < \infty$.

3) Для компактного множества $K \subset D$ введем величину

$$\Phi_*(K) = \inf\{\Phi(U) : \ U \text{ — открытое множество в } D \text{ и } \mu(K \setminus U) = 0\}.$$

Тогда $\Phi(V) = \sup\{\Phi_*(K) : K \subset V,\ K$ — компактное множество$\}$ при условии, что мера $\mu(V)$ открытого множества $V \subset \mathbb{X}$ конечна.

$\lhd$ Доказательство утверждения 1 очевидно. Чтобы доказать второе, фиксируем $\varepsilon > 0$ и такое j, для которого $\mu\Big(\bigcup\limits_{i=j+1}^{\infty} U_i\Big) < \delta/2$, где δ выбрано в соответствии со свойством 10. Возьмем произвольное открытое множество $V \supset \bigcup\limits_{i=j+1}^{\infty} U_i$ такое, что $\mu(V) < \delta$. Тогда по свойству 6

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \leqslant \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{j} U_i\Big) + \Phi(V) < \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{j} U_i\Big) + \varepsilon.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\Phi\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \leqslant \lim\limits_{j\to\infty} \Phi\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{j} U_i\Big)$. Противоположное неравенство в силу монотонности функции множества очевидно.

Докажем последнее утверждение. Так как $\mu(V) < \infty$, найдется компактное множество $K \subset V$ такое, что $\mu(V \setminus K) < \delta$ (здесь δ выбрано по ε в соответствии со свойством 10). Пусть $U \subset V$ — произвольное открытое множество такое, что $\mu(K \setminus U) = 0$. Существует открытое множество $W \supset K \setminus U$, $W \subset U$, такое, что $\mu(W) < \delta$. По свойству 9 имеем

$$\Phi(V) \leqslant \Phi(U) + \Phi(V \setminus K) + \Phi(W) \leqslant \Phi(U) + 2\varepsilon.$$

Отсюда вытекает $\Phi(V) \leqslant \Phi_*(K) + 2\varepsilon$. Поскольку положительное число ε произвольно, то $\Phi(V) \leqslant \sup\limits_{K \subset V} \Phi_*(K)$. Лемма доказана. $\rhd$

Предложение 5. *Пусть $\mathbb{X}$ — однородное пространство, а 1-квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{X}$, $\mu(D) < \infty$, и удовлетворяет свойствам* 9 *и* 10. *Тогда для любого открытого множества $U \subset D$*

$$\int\limits_U \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x) = \Phi(U).$$

$\lhd$ При $1 < t < \infty$ множество $A = \{x \in U : 0 < \overline{\Phi}'(x) < \infty\}$ представимо в виде объединения непересекающихся множеств $P_n = \{x \in A : t^n < \overline{\Phi}'(x) \leqslant t^{n+1}\}$ конечной меры, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольное компактное множество $F_n \subset P_n$ и для фиксированного конечного набора $K \subset \mathbb{Z}$ рассмотрим произвольные открытые попарно непересекающиеся множества $U_n \supset F_n$, $U_n \subset D$, $n \in K$. Возьмем произвольную точку $x \in F_n$. Тогда найдется последовательность шаров $B_k^x \subset U_n$, $x \in B_k^x$, радиусы которых стремятся к нулю, такая, что неравенство

$$\Phi(B_k^x) < t^{n+2} \mu(B_k^x)$$

выполнено при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $F = \bigcup_n F_n$, $n \in K$. Очевидно, семейство шаров $\bigcup_{x \in F} \bigl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k^x\bigr)$ образует покрытие множества F в смысле Витали. Следовательно, найдется последовательность попарно непересекающихся шаров B_m из этого семейства такая, что $\mu(F \setminus \bigcup_m B_m) = 0$. Заметим, что в силу выбора шаров справедливо свойство $\mu(F_n \setminus \bigcup\{B_m : B_m \cap F_n \neq \varnothing\}) = 0$ для любого $n \in K$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \Phi_*(F) \leqslant \sum_{m \in \mathbb{N}} \Phi(B_m) &= \sum_{n \in K} \sum_{B_m \cap F_n \neq \varnothing} \Phi(B_m) \\ &\leqslant \sum_{n \in K} t^{n+2} \Bigl(\sum_{B_m \cap F_n \neq \varnothing} \mu(B_m) \Bigr) \leqslant \sum_{n \in K} t^{n+2} \mu(U_n). \end{aligned}$$

Так открытые множества $U_n \supset F_n$ произвольны, отсюда вытекает

$$\Phi_*(F) \leqslant \sum_{n \in K} t^{n+2} \mu(F_n) \leqslant \sum_{n \in K} t^2 \int\limits_{F_n} \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x) \leqslant t^2 \int\limits_U \overline{\Phi}'(x)\, d\mu(x).$$

Так как множества $F_n \subset P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, набор $K \subset \mathbb{Z}$ и число $t > 1$ произвольны, то с учетом леммы 4 и теоремы 3 предложение 5 доказано. $\rhd$

2. Оператор суперпозиции в пространствах Лебега

Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — однородное пространство. Далее мы будем предполагать, что квазиметрика d и борелевская мера μ удовлетворяют свойствам 1–5 (свойство 6 нам было нужно только при рассмотрении функций множества, заданных на открытых подмножествах пространства $\mathbb{X}$).

Напомним, что отображение Φ, определенное на борелевских подмножествах из D, D — область в $\mathbb{X}$, называется *q-квазиаддитивной* функцией множества, где $q \geqslant 1$ — фиксированное число, если

1) $0 \leqslant \Phi(K) < \infty$, если $K \subset D$ — компактное множество;

2) $\Phi(U_1) \leqslant \Phi(U_2)$, если $U_1 \subset U_2 \subset D$ — борелевские множества;

3) для всякого конечного набора $U_i \subset U$, $i = 1, \dots, k$, попарно различных борелевских множеств, $U \subset D$ — борелевское множество,

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leqslant q\Phi(U).$$

Замечание 3. Утверждения первого параграфа о дифференцируемости и восстановлении абсолютно непрерывной части функции множества справедливы для q-квазиаддитивных функций множества, определенных на борелевских подмножествах области D.

Пусть E — измеримое множество на однородном пространстве $\mathbb{X}$. Измеримая функция $f : E \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству Лебега $L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если

$$\|f \mid L_p(E)\| = \left(\int\limits_E |f|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

и

$$\|f \mid L_\infty(E)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty.$$

2.1. Пусть D и $\widetilde{D}$ — измеримые множества на метрических пространствах $\mathbb{X}$ и $\widetilde{\mathbb{X}}$ соответственно. Будем говорить, что отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ *порождает ограниченный оператор вложения* $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если существует постоянная $K < \infty$ такая, что $\bigl\|\varphi^* f \mid L_q(D)\bigr\| \leqslant K \bigl\|f \mid L_p(\widetilde{D})\bigr\|$ для любой функции $f \in L_p(\widetilde{D})$. В этом случае очевидно, что φ порождает ограниченный оператор $\varphi^* : L_p(\widetilde{A}) \to L_q(\varphi^{-1}(\widetilde{A}))$ для любого борелевского множества $\widetilde{A} \subset \widetilde{D}$. Действительно, если $f \in L_p(\widetilde{A})$, то рассмотрим продолжение $\tilde{f}$ функции f на $\widetilde{D}$ положив $\tilde{f}(y) = 0$ вне $\widetilde{A}$. Тогда $\varphi^* f(x) = (f \circ \varphi)(x) = \varphi^* \tilde{f}|_{\varphi^{-1}(\widetilde{A})}(x)$, $x \in \varphi^{-1}(\widetilde{A})$, и поэтому φ^* — ограниченный оператор.

Лемма 5. *Пусть отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$. Тогда*

$$\Phi(\widetilde{A}) = \sup_{f \in L_p(\widetilde{A})} \left(\frac{\bigl\|\varphi^* f \mid L_q(\varphi^{-1}(\widetilde{A}))\bigr\|}{\bigl\|f \mid L_p(\widetilde{A})\bigr\|} \right)^{\kappa}, \quad \text{где } \kappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p < \infty, \\ q & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

является ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на борелевских множествах $\widetilde{A} \subset \widetilde{D}$, $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) > 0$.

$\lhd$ Очевидно, что $\Phi(\widetilde{A}_1) \leqslant \Phi(\widetilde{A}_2)$, если $\widetilde{A}_1 \subset \widetilde{A}_2$.

Пусть $\widetilde{A}_i$, $i \in N$, — попарно непересекающиеся борелевские множества в $\widetilde{D}$, $\widetilde{A}_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i$, $A_i = \varphi^{-1}(\widetilde{A}_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Рассмотрим такую функцию $f_i \in L_p(\widetilde{A}_i)$, чтобы одновременно выполнялись условия $\|\varphi^* f_i \mid L_q(A_i)\| \geqslant \big(\Phi(\widetilde{A}_i)\big(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\big)\big)^{\frac{1}{\kappa}} \|f_i \mid L_p(\widetilde{A}_i)\|$ и $\|f_i \mid L_p(\widetilde{A}_i)\|^p = \Phi(\widetilde{A}_i)\big(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\big)$ при $p < \infty$ $\big(\|f_i \mid L_p(\widetilde{A}_i)\| = 1$ при $p = \infty\big)$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Полагая $f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ и применяя неравенство Гёльдера при $p < \infty$ (случай равенства), получаем

$$\begin{aligned}\bigg\|\varphi^* f_N \mid L_q\bigg(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\bigg)\bigg\| &\geqslant \bigg(\sum_{i=1}^{N}\bigg(\Phi(\widetilde{A}_i)\bigg(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\bigg)\bigg)^{\frac{q}{\kappa}} \|f_N \mid L_p(\widetilde{A}_i)\|^q\bigg)^{1/q} \\ &= \bigg(\sum_{i=1}^{N} \Phi(\widetilde{A}_i)\bigg(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\bigg)\bigg)^{\frac{1}{\kappa}} \bigg\|f_N \mid L_p\bigg(\bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{A}_i\bigg)\bigg\| \\ &\geqslant \bigg(\sum_{i=1}^{N} \Phi(\widetilde{A}_i) - \varepsilon\Phi(\widetilde{A}_0)\bigg)^{\frac{1}{\kappa}} \bigg\|f_N \mid L_p\bigg(\bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{A}_i\bigg)\bigg\|. \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(\widetilde{A}_0)^{\frac{1}{\kappa}} \geqslant \sup \frac{\Big\|\varphi^* f_N \mid L_q\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i\Big)\Big\|}{\Big\|f_N \mid L_p\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} \widetilde{A}_i\Big)\Big\|} \geqslant \bigg(\sum_{i=1}^{N} \Phi(\widetilde{A}_i) - \varepsilon\Phi(\widetilde{A}_0)\bigg)^{\frac{1}{\kappa}},$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N \in L_p\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} \widetilde{A}_i\Big)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, квазиаддитивность функции Φ доказана. Справедливость обратного неравенства проверяется непосредственно. $\rhd$

Следующее утверждение дает оценку искажения меры при отображениях рассматриваемого класса.

Предложение 6. *Пусть отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$. Тогда для всякого борелевского множества $\widetilde{A} \subset \widetilde{D}$ прообраз $\varphi^{-1}(\widetilde{A})$ измерим и выполнены неравенства:*

$$\mu(\varphi^{-1}(\widetilde{A}))^{\frac{1}{q}} \leqslant \Phi(\widetilde{A})^{\frac{1}{\kappa}} \tilde{\mu}(\widetilde{A})^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\mu(\varphi^{-1}(\widetilde{A})) \leqslant K^p \tilde{\mu}(\widetilde{A}), \ 1 \leqslant q = p < \infty.$$

$\lhd$ Так как оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$ ограничен, то для всякого борелевского множества $\widetilde{A} \subset \widetilde{D}$ выполняются неравенства

$$\|\varphi^* f \mid L_q(\varphi^{-1}(\widetilde{A}))\| \leqslant \Phi(\widetilde{A})^{\frac{1}{\kappa}} \|f \mid L_p(\widetilde{A})\| \leqslant \Phi(\widetilde{D})^{\frac{1}{\kappa}} \|f \mid L_p(\widetilde{A})\|$$

при $1 \leqslant q < p < \infty$, и

$$\|\varphi^* f \mid L_q(\varphi^{-1}(\widetilde{A}))\| \leqslant K\|f \mid L_p(\widetilde{A})\|$$

при $1 \leqslant q = p < \infty$. Подставляя в эти неравенства характеристическую функцию $f(y) = \chi_{\widetilde{A}}(y)$ множества $\widetilde{A}$, получаем требуемое утверждение. $\rhd$

Отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ *обладает $\mathcal{N}$-свойством* Лузина, если образ всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль, и *обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством* Лузина, если прообраз всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль.

Следствие 6. *Пусть отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$. Тогда функция множества $\widetilde{D} \supset A \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A))$ абсолютно непрерывна относительно меры $\tilde{\mu}$, в частности, отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина.*

Отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ называется *измеримым*, если прообраз измеримого множества измерим. Заметим, что в силу предложения 6 отображение, порождающее ограниченный оператор пространств Лебега измеримо. Для измеримого отображения $\varphi : D \to \widetilde{D}$ определим *объемную производную* «обратного отображения»

$$J_{\varphi^{-1}}(y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(\varphi^{-1}(B(y,r)))}{\tilde{\mu}(B(y,r))}, \quad y \in \widetilde{D}.$$

Теорема 4. *Измеримое отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда*

$$\Phi'(y) = J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{p}{p-q}} \quad \text{для почти всех } y \in \widetilde{D} \text{ в случае } 1 \leqslant q < p < \infty,$$

где Φ — функция множества из леммы 5, и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\widetilde{D}} J_{\varphi^{-1}}(y) < \infty \quad \text{в случае } 1 \leqslant q = p < \infty.$$

При этом норма оператора $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$ равна

$$K = \begin{cases} \Big(\int\limits_{\widetilde{D}} (J_{\varphi^{-1}}(y))^{\frac{p}{p-q}}\, d\tilde{\mu}(y)\Big)^{\frac{1}{\kappa}}, & 1 \leqslant q < p < \infty, \\ (\operatorname*{ess\,sup}\limits_{y\in\widetilde{D}} J_{\varphi^{-1}}(y))^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant q = p < \infty. \end{cases}$$

$\lhd$ Необходимость. Так как оператор φ^* ограничен, то для всякого борелевского множества $A \subset \widetilde{D}$ и произвольной функции $f \in L_p(A)$ выполняются неравенства $\|\varphi^* f \mid L_q(\varphi^{-1}(A))\| \leqslant \Phi(A)^{\frac{1}{\kappa}}\|f \mid L_p(A)\|$ при $1 \leqslant q < p < \infty$, и $\|\varphi^* f \mid L_p(\varphi^{-1}(A))\| \leqslant \|\varphi^*\| \cdot \|f \mid L_p(A)\|$ при $1 \leqslant q = p < \infty$. Подставляя в эти неравенства характеристическую функцию $f(z) = \chi_B(z)$ множества $B = B(y,r) \subset \widetilde{D}$ получаем

$$\mu(\varphi^{-1}(B(y,r)))^{\frac{1}{q}} \leqslant \Phi(B(y,r))^{\frac{1}{\kappa}} \tilde{\mu}(B(y,r))^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\mu(\varphi^{-1}(B(y,r))) \leqslant \|\varphi^*\|^p \tilde{\mu}(B(y,r)),\ 1 \leqslant q = p < \infty.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\mu(\varphi^{-1}(B(y,r)))}{\tilde{\mu}(B(y,r))}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\frac{\Phi(B(y,r))}{\tilde{\mu}(B(y,r))}\right)^{\frac{1}{\kappa}},\ 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\left(\frac{\mu(\varphi^{-1}(B(y,r)))}{\tilde{\mu}(B(y,r))}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\varphi^*\|,\ 1 \leqslant q = p < \infty.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$, получаем

$$J_{\varphi^{-1}}^{\frac{1}{p}}(y) \leqslant \|\varphi^*\| \text{ почти всюду в } \widetilde{D}$$

при $1 \leqslant q = p < \infty$, и

$$J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{p}{p-q}} \leqslant \Phi'(y) \text{ для почти всех } y \in \widetilde{D}$$

в случае $1 \leqslant q < p < \infty$.

Интегрируя последнее неравенство по области $\widetilde{D}$ и используя свойства счетно-аддитивной функции множества (лемма 5 и теорема 3), получаем нужную оценку

$$\left(\int\limits_{\widetilde{D}} J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{p}{p-q}}\, d\tilde{\mu}(y)\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leqslant \Phi(\widetilde{D}) = \|\varphi\|^* < \infty \text{ при } 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widetilde{D}} J_{\varphi^{-1}}(y)^{-1} \leqslant \|\varphi^*\|^p < \infty \text{ при } 1 \leqslant q = p < \infty.$$

Достаточность. Пусть $1 \leqslant q < p < \infty$ и функция $f \in L_p(D)$. Применяя теорему замены переменной в интеграле Лебега из [10, § 39, теорема 4], имеем

$$\|\varphi^* f \mid L_q(D)\| = \left(\int\limits_D |f \circ \varphi|^q(x)\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_{\widetilde{D}} |f|^q(y) \cdot J_{\varphi^{-1}}(y)\, d\tilde{\mu}(y)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Воспользовавшись далее неравенством Гёльдера, получаем

$$\|\varphi^* f \mid L_q(D)\| \leqslant \left(\int\limits_{\widetilde{D}} J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{p}{p-q}}\, d\tilde{\mu}(y)\right)^{\frac{1}{\kappa}} \left(\int\limits_{\widetilde{D}} |f|^p(y)\, d\tilde{\mu}(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\widetilde{D}} J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{p}{p-q}}\, d\tilde{\mu}(y)\right)^{\frac{1}{\kappa}} \|f \mid L_p(\widetilde{D})\|.$$

Отсюда имеем соотношение $\Phi(B(y,r)) \leqslant \int\limits_{B(y,r)} J_{\varphi^{-1}}(z)^{\frac{p}{p-q}}\, d\tilde{\mu}(z)$, из которого по теореме Лебега получаем неравенство $\Phi'(y) \leqslant J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{p}{p-q}}$ для почти всех $y \in \widetilde{D}$. Пусть теперь $1 \leqslant q = p < \infty$. Тогда

$$\|\varphi^* f \mid L_p(D)\| = \biggl(\int\limits_D |f \circ \varphi|^p(x)\, d\mu(x)\biggr)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \biggl(\int\limits_{\widetilde{D}} |f|^p(y) J_{\varphi^{-1}}(y)\, d\tilde{\mu}(y)\biggr)^{\frac{1}{p}} \leqslant K\|f \mid L_p(\widetilde{D})\|.$$

Из выведенных неравенств получаем оценку $\|\varphi^*\| \leqslant K$ для нормы оператора φ. Теорема доказана. $\rhd$

Заметим, что при $q = p$ теорема 4 фактически была получена в рамках работы [11].

Следствие 7. *Пусть отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q < p < \infty$. Тогда функция множества Φ из леммы 5 является абсолютно непрерывной ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на борелевских множествах из области $\widetilde{D}$.*

2.2. Аналогично лемме 5 доказывается утверждение для функции множества, определенной на борелевских подмножествах области D. Корректность определения вводимой в лемме 6 функции множества Ψ вытекает из предложения 6.

Лемма 6. *Пусть биективное отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ такое, что образ борелевского множества является борелевским, порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$. Тогда*

$$\Psi(A) = \sup_{f \in L_p(\varphi(A))} \left(\frac{\bigl\|\varphi^* f \mid L_q(A)\bigr\|}{\bigl\|f \mid L_p(\varphi(A))\bigr\|}\right)^{\kappa}, \quad \text{где } \kappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p < \infty, \\ q & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

является ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на борелевских множествах $A \subset D$, $\mu(A) > 0$.

Для биективного отображения $\varphi : D \to \widetilde{D}$, обладающего таким свойством, что образ борелевского множества является борелевским, определим его объемную производную

$$J_\varphi(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\tilde{\mu}(\varphi(B(x,r)))}{\mu(B(x,r))}.$$

Из предложения 6 вытекает также

Следствие 8. *Пусть биективное отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ такое, что образ борелевского множества является борелевским, порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$. Тогда объемная производная $J_\varphi > 0$ почти всюду в области D.*

Исследуем вопросы, связанные с формулой замены переменных при биективных отображениях на метрических пространствах однородного типа.

Для доказательства следующего предложения нам потребуется следующее утверждение о покрытиях [7].

Лемма 7. *Пусть семейство шаров $\mathcal{B}$ в однородном пространстве $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию:* $\sup\{\operatorname{diam} B : B \in \mathcal{B}\} < +\infty$. *Тогда существует последовательность попарно непересекающихся шаров $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

Здесь символ $5B$ обозначает шар, концентричный шару B, и такой что $\operatorname{diam} 5B = 5\operatorname{diam} B$

Предложение 7. *Пусть $\varphi : D \to \widetilde{D}$ — биективное отображение такое, что образ борелевского множества является борелевским. Тогда существует борелевское множество Σ_φ нулевой меры такое, что для всякого борелевского множества A и борелевской функции $f : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ справедлива формула*

$$\int_A f\circ\varphi(x) J_\varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{\varphi(A)} f(y)\chi(y)\, d\tilde{\mu}(y), \tag{10}$$

где $\chi(\cdot)$ — *характеристическая функция множества $\varphi(A\setminus\Sigma_\varphi)$.*

$\lhd$ Для произвольного числа $k = 1, 2, \ldots$ определим множества

$$A_k = \{x \in D : J_\varphi(x) < k\}.$$

Заметим, что так как объемная производная J_φ является борелевской функцией (см. пункт 1.1), то множества A_k, $k = 1, 2, \ldots$, борелевские.

Покажем, что на множестве A_k отображение φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина и выполнено неравенство

$$\tilde{\mu}(\varphi(A)) \leqslant k\mu(A)$$

для всякого борелевского подмножества $A \subset A_k$. Пусть $A \subset A_k$ — произвольное подмножество нулевой меры. Без ограничения общности можно считать, что множество A ограничено. Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется открытое множество $U \supset A$ с условием $\mu(U) < \varepsilon$. Для каждой точки $x \in A$ найдется число $r_x > 0$ такое, что любой шар $B = B(x, r)$, $r \in (0, r_x)$, удовлетворяет условиям

$$B(x,r) \subset U \quad \text{и} \quad \tilde{\mu}(\varphi(B(x,r))) < k\mu(B(x,r)). \tag{11}$$

Применяя лемму 7, выберем из семейства шаров $\mathcal{B} = \{B(x, r/5) : x \in A, r \in (0, r_x)\}$ последовательность шаров $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что:

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} 5B_i$;

3) для каждого шара $5B_i$, $i = 1, 2, \ldots$, выполнено условие (11).

Тогда имеет место оценка

$$\tilde{\mu}(\varphi(A)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(\varphi(5B_i)) \leqslant k\sum_{i=1}^{\infty} \mu(5B_i) \leqslant ck\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leqslant ck\mu(U) < ck\varepsilon.$$

Здесь c — некоторая постоянная, зависящая только от постоянных c_1 и c_2. Так как число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то $\mathcal{N}$-свойство Лузина доказано.

Докажем неравенство

$$\tilde{\mu}(\varphi(A)) \leqslant k\mu(A).$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, открытое множество $U \supset A$ такие, что $\mu(U) < \mu(A)+\varepsilon$. Пусть $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{B}(x,r) : x \in A,\ r \in (0,r_x)$, где $r_x > 0$ такое число, что $\overline{B}(x,r) \subset U$ и $\tilde{\mu}(\varphi(\overline{B}(x,r))) < k\mu(\overline{B}(x,r))$ для всех $r \in (0,r_x)\}$ — покрытие Витали множества A. Применяя теорему 2, выберем из семейства $\overline{\mathcal{B}}$ последовательность замкнутых шаров $\{\overline{B}_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что:

1) $\overline{B}_i \cap \overline{B}_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $\mu\left(A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i\right) = 0$;

3) для каждого шара $\overline{B}_i$, $i = 1, 2, \dots$, выполнено неравенство $\tilde{\mu}(\varphi(\overline{B}_i)) < k\mu(\overline{B}_i)$.

Следовательно,

$$\tilde{\mu}(\varphi(A)) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(\overline{B}_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(\varphi(\overline{B}_i)) \leqslant k \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\overline{B}_i) = k\mu(U) = k(\mu(A)+\varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то неравенство $\tilde{\mu}(\varphi(A)) \leqslant k\mu(A)$ доказано.

Определим множество $\Sigma_\varphi = D \setminus \bigcup\limits_k A_k$. Из следствия 5 вытекает, что $J_\varphi < +\infty$ почти всюду в области D и, значит, $|\Sigma_\varphi| = 0$. Кроме того, отображение φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина на множестве $D \setminus \Sigma_\varphi$.

Докажем справедливость формулы (10). Действительно, в этом случае функция множества $\Theta(A) = \tilde{\mu}(\varphi(A \setminus \Sigma_\varphi))$ является абсолютно непрерывной аддитивной функцией, определенной на борелевских подмножествах области D, причем выполнено неравенство $J_\varphi \geqslant \Theta'$ почти всюду в области D. Применяя предложение 5 (с учетом замечания 3) находим, что

$$\int\limits_A J_\varphi(x)\,d\mu(x) \geqslant \int\limits_A \Theta'(x)\,d\mu(x) = \Theta(A) = \tilde{\mu}(\varphi(A \setminus \Sigma_\varphi)).$$

Справедливость обратного неравенства вытекает из следствия 5:

$$\int\limits_A J_\varphi(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{A\setminus\Sigma_\varphi} J_\varphi(x)\,d\mu(x) \leqslant \tilde{\mu}(\varphi(A \setminus \Sigma_\varphi)).$$

Окончательно получаем равенство

$$\int\limits_A J_\varphi(x)\,d\mu(x) = \tilde{\mu}(\varphi(A \setminus \Sigma_\varphi)).$$

Рассуждая далее стандартным образом (доказывая справедливость формулы (10) для характеристических функций, и далее аппроксимируя произвольную борелевскую функцию ступенчатыми функциями, см., например, [12, 13]) получаем требуемый результат. $\triangleright$

Теорема 5. *Биективное отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ такое, что образ борелевского множества является борелевским, порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда*

$$\Psi'(x) = J_\varphi(x)^{\frac{q}{q-p}} \quad \text{для почти всех } x \in D \text{ в случае } 1 \leqslant q < p < \infty,$$

где Ψ — функция множества из леммы 6, и

$$(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} J_\varphi(x))^{-1} < \infty \quad \text{в случае } 1 \leqslant q = p < \infty.$$

При этом норма оператора $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$ равна

$$K = \begin{cases} \left(\int\limits_D (J_\varphi(x))^{\frac{q}{q-p}}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{\kappa}}, & 1 \leqslant q < p < \infty, \\ (\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in D} J_\varphi(x))^{-\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant q = p < \infty. \end{cases}$$

$\lhd$ Необходимость. Так как оператор φ^* ограничен, то для всякого борелевского множества $A \subset D$ и произвольной функции $f \in L_p(\varphi(A))$ выполняются неравенства $\|\varphi^* f \mid L_q(A)\| \leqslant \Psi(A)^{\frac{1}{\kappa}} \|f \mid L_p(\varphi(A))\|$ при $1 \leqslant q < p < \infty$, и $\|\varphi^* f \mid L_q(A)\| \leqslant \|\varphi^*\| \cdot \|f \mid L_p(\varphi(A))\|$ при $1 \leqslant q = p < \infty$. Подставляя в эти неравенства характеристическую функцию $f(y) = \chi_{\varphi(B)}(y)$ множества $\varphi(B)$, $B = B(x,r) \subset D$, получаем

$$\mu(B(x,r))^{\frac{1}{q}} \leqslant \Psi(B(x,r))^{\frac{1}{\kappa}} \mu(\varphi(B(x,r)))^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\mu(B(x,r)) \leqslant \|\varphi^*\|^p \mu(\varphi(B(x,r))),\ 1 \leqslant q = p < \infty.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(\varphi(B(x,r)))}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{\Psi(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}\right)^{\frac{1}{\kappa}},\ 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\left(\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(\varphi(B(x,r)))}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\varphi^*\|,\ 1 \leqslant q = p < \infty.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$ выводим, что

$$J_\varphi(x)^{-\frac{1}{p}} \leqslant \|\varphi^*\| \text{ почти всюду в } D$$

при $1 \leqslant q = p < \infty$, и

$$J_\varphi(x)^{\frac{q}{q-p}} \leqslant \Psi'(x) \text{ для почти всех } x \in D$$

в случае $1 \leqslant q < p < \infty$.

Интегрируя последнее неравенство по области D и используя свойства счетно-аддитивной функции множества, выводим нужную оценку

$$\Bigl(\int\limits_D J_\varphi(x)^{\frac{q}{q-p}}\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{\kappa}} \leqslant \Psi(D) = \|\varphi^*\| < \infty,\ 1 \leqslant q < p < \infty,$$

и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} J_\varphi(x)^{-1} \leqslant \|\varphi^*\|^p < \infty,\ 1 \leqslant q = p < \infty.$$

Достаточность. Пусть $1 \leqslant q < p < \infty$ и функция $f \in L_p(D)$. Поскольку $J_\varphi(x) > 0$ почти всюду в D, то

$$\|\varphi^* f \mid L_q(D)\| = \Bigl(\int\limits_D |f\circ\varphi|^q(x)\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Bigl(\int\limits_D |f\circ\varphi|^q(x) J_\varphi(x)^{\frac{q}{p}} \cdot J_\varphi(x)^{-\frac{q}{p}}\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя далее неравенство Гёльдера и формулу (10), имеем

$$\|\varphi^* f \mid L_q(D)\| \leqslant \Bigl(\int\limits_D J_\varphi(x)^{\frac{q}{q-p}}\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{\kappa}} \Bigl(\int\limits_D |f\circ\varphi|^p(x) J_\varphi(x)\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \Bigl(\int\limits_D J_\varphi(x)^{\frac{q}{q-p}}\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{\kappa}} \|f \mid L_p(\widetilde{D})\|.$$

Пусть теперь $1 \leqslant q = p < \infty$. Тогда

$$\|\varphi^* f \mid L_p(D)\| = \Bigl(\int\limits_D |f\circ\varphi|^p(x) J_\varphi(x) \cdot J_\varphi(x)^{-1}\,d\mu(x)\Bigr)^{\frac{1}{p}} \leqslant K\|f \mid L_p(\widetilde{D})\|.$$

Из выведенных неравенств получаем оценку $\|\varphi^*\| \leqslant K$ для нормы оператора φ. Теорема доказана. $\rhd$

Следствие 9. *Пусть биективное отображение $\varphi : D \to \widetilde{D}$ такое, что образ борелевского множества является борелевским, порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p(\widetilde{D}) \to L_q(D)$, $1 \leqslant q < p < \infty$. Тогда функция Ψ из леммы 6 является абсолютно непрерывной ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на борелевских множествах области D.*

Литература

1. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 185–192.

2. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 4.—С. 776–795.
3. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis.—Berlin: Springer-Verlag, 1955.
4. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
5. *Pansu P.* Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espacies symétriques de rang un // Ann. of Math.—1989.—V. 129, No. 2.—P. 1–60.
6. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры.—М.: Наука, 1987.
8. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Scien. Fen. Series A I. Math.—1969. No. 448.—P. 1–40.
9. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$.—М.: Мир, 1978.
10. *Халмош П.* Теория меры.—М.: ИЛ, 1953.
11. *Романов А. С.* Структурные операторы в пространствах L_p // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 220–223.
12. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 70–89.
13. *Vodop'yanov S. K.* $\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot Groups in Different Topologies and Related Topics/ Труды по анализу и геометрии (Редактор-составитель С. К. Водопьянов).—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000.—С. 603–670.

Новосибирск *Статья поступила 27 марта 2002*