ISSN 1364-0380 (on line) 1465-3060 (printed)

Geometry & Topology
Volume 9 (2005) 1689–1774
Published: 14 September 2005

Structure des homéomorphismes de Brouwer

Frédéric Le Roux

Université Paris Sud, Bat. 425, 91405 Orsay Cedex, FRANCE

Email: `frederic.le-roux@math.u-psud.fr.`

Abstract

For every Brouwer (ie planar, fixed point free, orientation preserving) homeomorphism h there exists a covering of the plane by *translation domains*, invariant simply-connected open subsets on which h is conjugate to an affine translation. We introduce a distance d_h on the plane that counts the minimal number of translation domains connecting a pair of points. This allows us to describe a combinatorial conjugacy invariant, and to show the existence of a finite family of generalised Reeb components separating any two points x, y such that $d_h(x, y) > 1$.

Résumé

Tout homéomorphisme de Brouwer s'obtient en recollant des *domaines de translation* (ouverts simplement connexes, invariants, en restriction auxquels la dynamique est conjuguée à une translation). On introduit une distance d_h sur le plan qui compte le nombre minimal de domaines de translation dont la réunion connecte deux points. Ceci nous permet de décrire un invariant combinatoire de conjugaison, qui décrit très grossièrement la manière dont les domaines de translation se recollent. On montre également l'existence de structures dynamiques qui généralisent la présence de composantes de Reeb dans les feuilletages non triviaux du plan.

AMS Classification numbers Primary: 37E30

Secondary: 37B30

Keywords: Homeomorphism, surface, fixed point, index, Reeb components, Brouwer

Proposed: Benson Farb
Seconded: Leonid Polterovich, David Gabai

Received: 8 November 2004
Revised: 1 September 2005

1 Introduction

1.1 Les feuilletages réguliers du plan

Considérons, sur le plan, un champ de vecteurs qui ne s'annule pas. En l'intégrant, on obtient un feuilletage orienté $\mathcal{F}$ sans singularité. Ces objets sont parmi les premiers sur lesquels les dynamiciens se soient penchés, et on peut dire qu'ils sont très bien compris. Rappelons rapidement quelques résultats. La théorie de Poincaré–Bendixson dit qu'il n'y a pas de récurrence: toute orbite du champ de vecteurs part à l'infini. D'un point de vue un peu plus global, on montre que si l'on prend une carte du feuilletage $\mathcal{F}$, l'union des orbites qui passe par cette carte est encore une carte de $\mathcal{F}$. En d'autres termes, on peut recouvrir le plan par des ouverts connexes, simplement connexes, invariants par la dynamique, sur lesquels la restriction du feuilletage est triviale, c'est-à-dire homéomorphe au feuilletage horizontal du plan.

Ces résultats de "trivialité semi-globale" ont encouragé la recherche d'une classification complète de ces objets. W. Kaplan a ainsi décrit les feuilletages topologiques réguliers du plan au moyen d'objets un peu exotiques appelés "systèmes cordaux"[17, 18]. Plus tard, G. Reeb, A. Haefliger et C. Godbillon ont étudié l'espace des feuilles, qui est une variété de dimension 1 *non séparée*, le feuilletage s'obtenant comme fibré en droites au-dessus de cette variété [14, 12, 11]. On peut extraire de ces théories les résultats suivants. Le feuilletage non trivial le plus simple est le *feuilletage de Reeb*, représenté sur la Figure 1; il est unique à homéomorphisme près. Soit maintenant $\mathcal{F}$ un

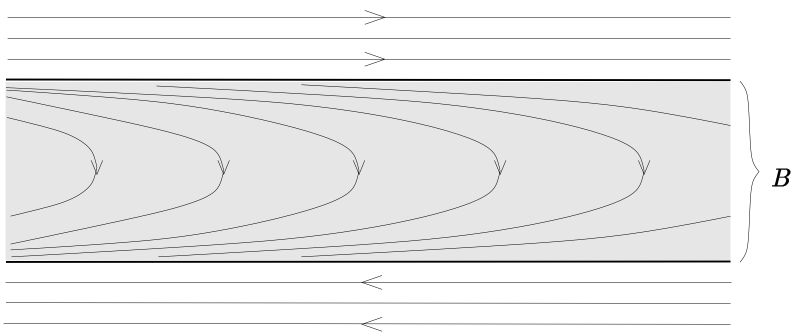

Figure 1: Le feuilletage de Reeb

feuilletage régulier quelconque. Disons qu'un couple de feuilles (Δ_0, Δ_1) de $\mathcal{F}$ est une *composante de Reeb* s'il existe un homéomorphisme ϕ de la bande $B = \mathbb{R} \times [0,1]$ vers une partie $\phi(B)$ du plan, qui envoie $\{0\} \times \mathbb{R}$ sur Δ_0 et

$\{1\} \times \mathbb{R}$ sur Δ_1, et qui envoie le feuilletage de Reeb de la bande B, représenté Figure 1, sur la restriction de $\mathcal{F}$ à $\phi(B)$ (remarquons que l'ensemble $\phi(B)$ n'est pas nécessairement fermé, voir les exemples de la Figure 2). Les feuilles Δ_0 et Δ_1 sont appelées *bords* de la composante de Reeb. La notion de composante de Reeb est fondamentale pour comprendre les feuilletages du plan: en effet, tout feuilletage non trivial admet des composantes de Reeb. On peut même préciser ce résultat de la manière suivante.

Théorème *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage du plan sans singularité. On se donne deux points x et y, et on note d le nombre minimal de cartes du feuilletage dont la réunion est connexe et contient x et y. Alors il existe exactement $d-1$ composantes de Reeb dont chacun des deux bords sépare (faiblement)*[1] *x et y.*

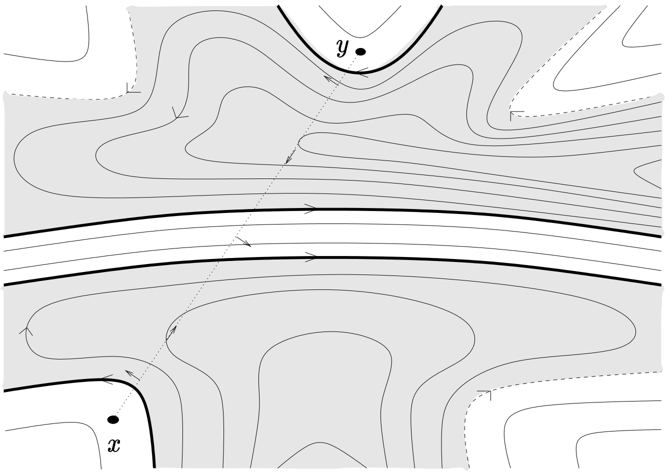

Figure 2: Tout couple de points est séparé par un nombre fini de composantes de Reeb

Le théorème est illustré par la Figure 2, avec $d = 3$. En particulier, ce théorème permet de définir un invariant combinatoire qui décrit totalement le feuilletage “entre x et y”. Par exemple, la partie du feuilletage entre x et y sur la Figure 2 pourrait être représentée par le mot $(\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow, \uparrow)$, obtenu de la façon suivante

[1]Un ensemble *sépare (faiblement)* deux points si ceux-ci ne sont pas dans la même composante connexe de son complémentaire. Ici, les points x ou y peuvent éventuellement appartenir au bord d'une composante de Reeb; cependant, cette situation est non-générique, au sens où la réunion des bords de toutes les composantes de Reeb du feuilletage est un ensemble *maigre* (réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides). Par ailleurs, notons que cet énoncé n'apparaît pas explicitement dans les articles cités ci-dessus.

(voir la figure): on se déplace sur le segment joignant x à y, et on y écrit les flèches au fur et à mesure; les flèches verticales codent la dynamique sur les bords des composantes de Reeb, les flèches horizontales codent la dynamique à l'intérieur d'une composante (ce procédé est précisé plus bas).

1.2 Les homéomorphismes de Brouwer

Un *homéomorphisme de Brouwer* est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, et sans point fixe. Ces objets ont été introduits par Brouwer, puis étudiés notamment par Kerékjártó, Homma–Terasaka, Andrea [4, 19, 15, 2, 1]. Dans une certaine mesure, on peut les voir comme une généralisation des champs de vecteurs qui ne s'annulent pas: en effet, d'après le théorème de Poincaré–Bendixson, tout temps Φ_t du flot obtenu en intégrant un tel champ de vecteurs est sans point fixe, c'est donc un homéomorphisme de Brouwer. En fait, le théorème de Poincaré–Bendixson se généralise aux homéomorphismes de Brouwer: là aussi, il y a absence de récurrence, et toute orbite part à l'infini. L'analogie culmine avec le célèbre théorème des translations planes de Brouwer: on peut recouvrir le plan par des *domaines de translation*, qui sont des ouverts, connexes, simplement connexes, invariants par h, sur lesquels la restriction de h est triviale, c'est-à-dire conjuguée à une translation affine du plan. En raccourci, tout homéomorphisme de Brouwer peut se construire en recollant des translations.

Peut-on pousser plus loin cette analogie avec les feuilletages? La littérature regorge d'exemples d'homéomorphismes de Brouwer exotiques, qui semblent très différents de ceux provenant d'un champ de vecteurs (voir [19, 15, 5, 7, 25]) Même si on se limite aux dynamiques obtenues en recollant deux translations, il faut abandonner l'idée d'obtenir une classification complète (voir [28], [25], et [3] où l'on tentait de décrire le plus finement possible ce recollement). Le point de vue de cet article est en quelque sorte complémentaire de celui de [3]. Il s'agit ici de décrire de manière vague le recollement d'un grand nombre de translations, en oubliant toutes les différences qu'on analysait là en détail. Avec ce point de vue, nous allons généraliser le théorème d'existence de composantes de Reeb énoncé ci-dessus pour les feuilletages, et en déduire la construction d'un invariant de conjugaison combinatoire qui étend le codage esquissé plus haut.

1.3 Description des résultats

Nous décrivons maintenant les résultats de l'article de manière plus précise.

Distance de translation Soit h un homéomorphisme de Brouwer. Étant donnés deux points distincts x et y, on note $d_h(x,y)$ le nombre minimal de domaines de translation de h dont la réunion est connexe et contient x et y. Ceci définit une distance sur le plan. On définit également la h–longueur d'un arc, c'est le nombre minimal de morceaux dans un découpage en sous-arcs *libres* (un ensemble E est *libre* si $h(E) \cap E = \emptyset$). On montre alors que la distance $d_h(x,y)$ coïncide avec la plus courte longueur des arcs joignant x à y. Les arcs réalisant le minimum sont nommés arcs *géodésiques*. Dans le cas où l'homéomorphisme h est obtenu en intégrant un champ de vecteurs, le nombre $d_h(x,y)$ coïncide avec le nombre d qui apparaît dans le théorème de la Section 1.1 (nombre minimum de cartes du feuilletage dont la réunion est connexe et contient x et y). Sur l'exemple de la Figure 2, le segment $[xy]$ est un arc géodésique de h–longueur égale à 3.

Composantes de Reeb D'autre part, nous généralisons la notion de composante de Reeb de la manière suivante. Essentiellement, on dit qu'un couple (F,G) de parties disjointes, fermées et connexes du plan est une *composante de Reeb* pour un couple de points (x,y) si

- F sépare x et $G \cup \{y\}$ (ou bien F contient x),
- G sépare y et $F \cup \{x\}$ (ou bien G contient y),
- le produit $F \times G$ est *positivement* ou bien *négativement singulier*, *i.e.* pour tout couple (V,W) d'ouverts rencontrant respectivement F et G, il existe des temps n *positifs* arbitrairement grands tels que $h^n(V)$ rencontre W, ou bien pour tout couple (V,W) d'ouverts rencontrant respectivement F et G, il existe des temps n *négatifs* arbitrairement grands tels que $h^n(V)$ rencontre W.

On peut vérifier que cette définition est compatible avec celle donnée dans le cadre des feuilletages. On prouve alors le théorème suivant, qui généralise l'énoncé de la Section 1.1.

Théorème A *Soient x et y deux points du plan, et $d = d_h(x,y)$. Alors il existe exactement $d-1$ composantes de Reeb pour (x,y) qui sont minimales pour l'inclusion.*

De plus, ces composantes sont données par une formule utilisant la distance d_h et la topologie du plan: en particulier, pour chaque composante (F,G), le bord G est situé sur la frontière d'une boule pour la distance d_h, centrée en x.

Flèches horizontales Comme pour les feuilletages, ceci va permettre de définir un invariant de conjugaison combinatoire, dépendant de x et de y, et qui décrit (partiellement cette fois-ci) la dynamique de h "entre x et y". Cet invariant sera, là encore, un mot sur l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$, dont la longueur est liée à la distance $d_h(x,y)$, et dans lequel les flèches horizontales et verticales alternent. La définition se fait en deux temps. Voici la définition des flèches horizontales. Notons d la distance $d_h(x,y)$. On considère une *décomposition minimale* d'un arc géodésique γ joignant x à y, c'est-à-dire un découpage en d sous-arcs libres (voir la Figure 3, où l'arc γ est découpé par les points x_1 et x_2). Considérons deux sous-arcs adjacents γ_i et γ_{i+1} dans la décomposition. Par minimalité, leur réunion n'est pas libre; on en déduit que $h(\gamma_i)$ rencontre γ_{i+1} ou bien que $h(\gamma_{i+1})$ rencontre γ_i. Le point clé est que ces deux possibilités ne peuvent pas avoir lieu simultanément: en effet, ceci est une conséquence de l'absence de "quasi-orbite" périodique pour les homéomorphismes de Brouwer (l'énoncé précis est un lemme de J. Franks, rappelé à la Section 2.2). On peut donc associer à cette décomposition de l'arc géodésique γ un mot $(m_1 \dots m_{d-1})$ sur l'alphabet $\{\rightarrow, \leftarrow\}$, avec $m_i = \rightarrow$ si $h(\gamma_i)$ rencontre γ_{i+1} et $m_i = \leftarrow$ si c'est le contraire. Il reste à prouver l'énoncé suivant.

Théorème B *Le mot ainsi défini ne dépend que de x et de y, et pas du choix de l'arc géodésique γ joignant x à y (ni de sa décomposition).*

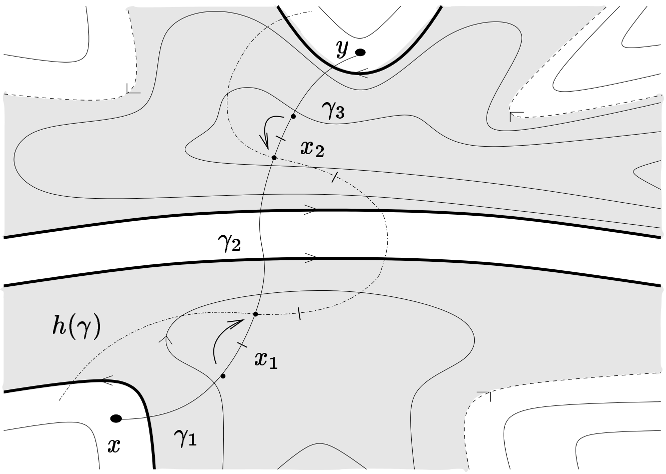

Figure 3: Le mot $(\rightarrow\leftarrow)$ obtenu ne dépend que de (x,y)

Flèches verticales La définition des flèches verticales est plus compliquée, nous nous restreignons au cas des *suites géodésiques infinies*[2], c'est-à-dire des suites de points $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pour lesquelles $d_h(x_k, x_l) = |l-k|$. Le Théorème A permet d'associer à la suite géodésique (x_k) une suite de composantes de Reeb minimales $(F_k, G_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (voir la partie supérieure de la Figure 4). Et le Théorème B associe à (x_k) une suite infinie de flèches horizontales, liées à la dynamique à l'intérieur de chaque composante. Nous allons intercaler une flèche verticale entre chaque couple de flèches horizontales successives, et cette flèche sera liée cette fois-ci à la dynamique sur les bords des composantes; ceci donnera un mot infini M sur l'alphabet de quatre flèches. Nous procédons de la manière suivante. On peut compactifier chaque bord F_k (ou G_k) en lui ajoutant deux points à l'infini, les points N (Nord) et S (Sud), de manière à ce que l'orbite de tout point de F_k tende vers N ou vers S (cf Figure 4). Dans ce cadre, nous montrons deux propriétés: d'une part, la dynamique dans F_k (ou dans G_k) est "à sens unique"; d'autre part, la dynamique "circule dans le même sens" dans les bords adjacents G_k et F_{k+1}:

Proposition C *De deux choses l'une: ou bien il existe des orbites de F_k allant de N vers S, ou bien il existe des orbites de F_k allant de S vers N.*

Théorème D *Le bord G_k contient des orbites allant de N vers S si et seulement si le bord F_{k+1} en contient également.*

Ces deux propriétés permettent de définir les flèches verticales: la flèche correspondant à G_k et à F_{k+1} vaut $\uparrow$ si la dynamique dans ces deux bords se fait du Sud vers le Nord, et $\downarrow$ si c'est le contraire.

La partie supérieure de la Figure 4 illustre ces notions. Le point N est "à l'infini vers le haut", le point S "à l'infini vers le bas". Comme l'exemple dessiné vient d'un champ de vecteurs, les bords des composantes de Reeb sont des droites, et les flèches verticales sont alternativement $\uparrow$ et $\downarrow$; ces propriétés ne seront pas toujours vrai pour un homéomorphisme qui n'est pas issu d'un champ de vecteurs (des exemples sont donnés dans l'Appendice B).

1.4 Application: un indice pour les points fixes

Toutes ces constructions sont motivées par l'étude de la dynamique des homéomorphismes de surfaces autour d'un point fixe isolé, et sont appliquées à cette

[2]Dans le cas des suites géodésiques finies, il y a des complications supplémentaires dues à des problèmes de bord, et il n'est pas clair que les flèches initiales et finales soient bien définies.

étude dans l'article [27]. Évoquons rapidement les résultats correspondants. On se donne un homéomorphisme h (préservant l'orientation) d'une surface (orientable) S et un point fixe isolé x_0. Nous associons à ces données un indice qui affine l'indice de Poincaré–Lefschetz, et ce nouvel indice est un mot cyclique sur l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$. Résumons la construction dans le cas particulier où h est un homéomorphisme du plan dont x_0 est l'unique point fixe (voir l'exemple représenté sur la partie inférieure de la Figure 4). Le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un plan, et les relevés de h à ce plan sont clairement des homéomorphismes sans point fixe: ce sont des homéomorphismes de Brouwer. Un point essentiel est que si l'indice de x_0 est différent de 1, parmi tous les relevés de h, il en existe un unique qui ne soit pas conjugué à une translation. On se place sous cette hypothèse d'indice, et on considère ce relevé canonique $\widetilde{h}$ (représenté sur la partie supérieure de la Figure 4). On peut alors trouver une courbe de Jordan γ, qui entoure x_0, et dont l'un des relevés Γ est une *droite géodésique* pour $\tilde{h}$ (ie Γ contient une suite géodésique infinie $(\widetilde{x}_k)$ comme définie ci-dessus).

Soit maintenant M le mot infini sur l'alphabet de quatre flèches qui est associé à Γ. Alors M ne dépend pas du choix de la courbe γ, et présente une périodicité de longueur paire $2d$. On obtient ainsi un mot cyclique $M(h)$, de longueur $2d$, qui ne dépend que des données S, x_0 et h. Nous expliquons aussi dans [27] comment retrouver l'indice de Poincaré–Lefschetz à partir de ce mot: “on compte le nombre de tours faits par la flèche lorsqu'on lit le mot $M(h)$”. Et on en déduira quelques conséquences dynamiques. Par exemples, on précisera, dans ce cadre, la version topologique du théorème de la fleur de Leau–Fatou donnée dans [26].

1.5 Plan du texte

La Section 2 propose des définitions et des rappels. La Section 3 raconte la définition de la distance de translation d_h, des flèches horizontales, et donne l'énoncé correspondant au Théorème B d'invariance. La Section 4 expose la définition des composantes de Reeb, précise l'énoncé du Théorème A d'existence, et en déduit le Théorème B. Les Sections 5 et 6 fournissent la preuve du Théorème A. La Section 7 introduit les suites géodésiques infinies et leurs bouts, et leur associe une topologie sur le plan augmenté des points N et S. La Section 8 prouve le Théorème D qui conduit à la définition des flèches verticales. La Section 9 contient la preuve de la Proposition C décrivant la dynamique dans les bords des composantes de Reeb. Le premier appendice rappelle quelques énoncés de topologie, le second illustre le texte par trois exemples, qui font voir

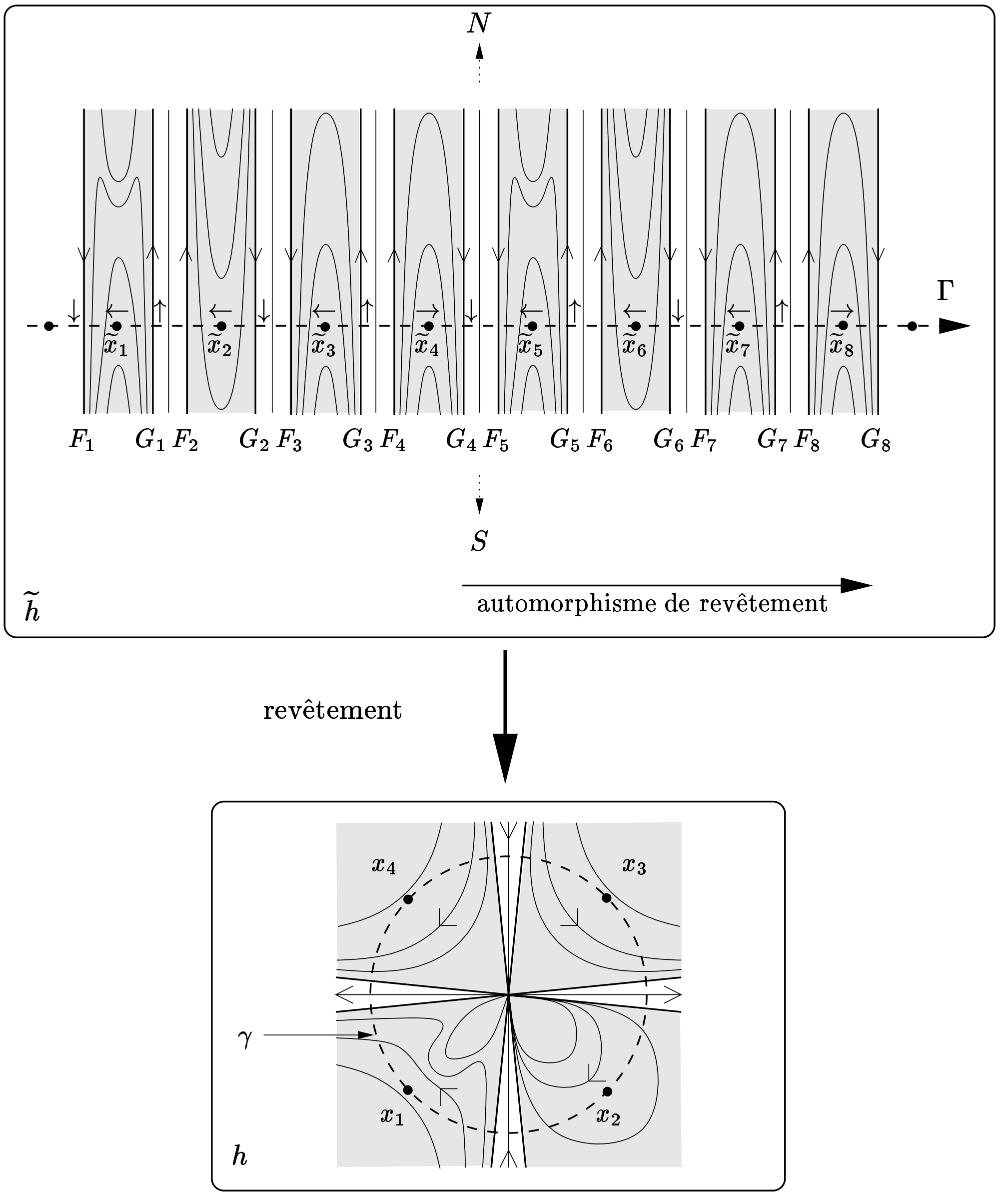

Figure 4: Un homéomorphisme du plan h ayant un unique point fixe, et son relevé canonique $\widetilde{h}$; le mot infini périodique M est écrit au-dessus de la droite géodésique Γ; le mot cyclique $M(h)$ vaut $(\downarrow\leftarrow\uparrow\leftarrow\downarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow)$

en quoi la vie est plus compliquée pour les homéomorphismes de Brouwer qui ne sont pas issus d'un champ de vecteurs.

1.6 Remerciements

Ce texte a bénéficié de discussions avec Franois Béguin, Christian Bonatti, Sylvain Crovisier, John Franks, Lucien Guillou, Vincent Guirardel et Patrice Le Calvez.

2 Préliminaires

2.1 Définitions, notations

La droite réelle est notée $\mathbb{R}$, et $\mathbb{Z}$ désigne l'anneau des entiers relatifs.

Topologie ...

On notera respectivement $\mathrm{Int}(E)$, $\mathrm{Adh}(E)$, ∂E l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'une partie E dans un espace topologique. On utilisera souvent l'inclusion générale $\partial\,\mathrm{Adh}(E) \subset \partial E$.

La notion de séparation joue un rôle essentiel dans ce texte:

Définition 2.1 Soient X un espace topologique (qui sera le plus souvent le plan $\mathbb{R}^2$) et F, A et B trois parties de X. On dira que F *sépare A et B* si

- A est incluse dans une composante connexe $O_A(F)$ du complémentaire de F dans X;
- B est incluse dans une composante connexe $O_B(F)$ du complémentaire de F dans X;
- $O_A(F) \neq O_B(F)$.

Un *arc* dans un espace topologique X est une application continue injective de $[0,1]$ dans X. Puisque le paramétrage de l'arc importe peu en général, on identifiera γ à $\gamma \circ \phi$ où ϕ est un homéomorphisme croissant de l'intervalle $[0,1]$; on confondra même souvent un arc γ et son image $\gamma([0,1])$. On dira que γ *joint* $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$, ou que ces deux points sont les *extrémités* de γ. Un *sous-arc* de γ est un arc inclus dans γ. Si x et y sont deux points sur un arc γ, on notera $[xy]_\gamma$ le sous-arc de γ joignant x à y; on notera également $]xy]_\gamma$ ce sous-arc privé du point x, *etc.*. L'*intérieur* de l'arc γ est $]\gamma(0),\gamma(1)[_\gamma = \gamma(]0,1[) = \gamma \setminus \{\gamma(0),\gamma(1)\}$.

Soient γ_1 et γ_2 deux arcs tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. On appellera *concaténation de* γ_1 *et* γ_2, et on notera $\gamma_1 * \gamma_2$, la courbe définie par $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \gamma_1(2t)$ pour $t \in [0,1/2]$ et $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \gamma_2(2t-1)$ pour $t \in [1/2,1]$. Cette loi induit une loi sur les classes d'équivalence modulo reparamétrages croissants, loi qui est associative.

Une *droite topologique* (du plan) est une application Γ continue, injective, propre[3], de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Une *droite topologique orientée* est une classe d'équivalence de droites topologiques modulo reparamétrage croissant.

Un *disque topologique fermé* est une partie du plan homéomorphe au disque unité fermé du plan.

Nous utiliserons souvent différentes variantes du théorème de Schoenflies (cf [6]); celles-ci affirment en particulier qu'un arc, une droite topologique ou un disque topologique fermé sont, à homéomorphisme du plan près, respectivement un segment euclidien, une droite euclidienne et un disque euclidien. Ainsi, une droite topologique orientée Γ sépare le plan en deux ouverts, l'un situé à gauche de Γ et l'autre à sa droite.

. . . et dynamique

Soit h un homéomorphisme d'un espace topologique X. Un *point fixe* de h est un point x tel que $h(x) = x$. L'*orbite* de x est la suite $(h^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$, son *orbite positive* est $(h^n(x))_{n\geq 0}$. Une partie E de X est *invariante* si $h(E) = E$.

Un homéomorphisme du plan *préserve l'orientation* s'il envoie l'ouvert à gauche d'une droite topologique orientée Γ sur l'ouvert à gauche de la droite topologique orientée $h \circ \Gamma$. Dans ce cas, on peut montrer que cette propriété est vraie pour toute droite topologique orientée.

2.2 Rappels sur les homéomorphismes de Brouwer

Dans tout le texte, sauf mention contraire, h désigne un homéomorphisme de Brouwer, ie un homéomorphisme du plan $\mathbb{R}^2$, sans point fixe, préservant

[3]La propreté revient à dire que Γ se prolonge continûment aux compactifiés d'Alexandroff en envoyant l'infini sur l'infini, ie en un plongement du cercle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

l'orientation. On rappelle ici quelques résultats sur le comportement dynamique d'un homéomorphisme de Brouwer. Dans la section suivante, nous traduirons ces résultats en associant à h une distance sur le plan. Les références pour cette partie (et notamment pour les démonstrations) sont [4, 13, 8, 10, 21, 23].

Domaines de translation

Définition 2.2 Un *domaine de translation* est une partie O du plan, ouverte, connexe et simplement connexe, invariante par h, sur laquelle la restriction de h est conjuguée à la translation du plan $\tau\colon\ (x,y)\mapsto(x+1,y)$ (c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme Φ de O sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\Phi h \Phi^{-1}=\tau$).

Le résultat suivant est un morceau du célèbre "théorème des translations planes" de Brouwer; c'est un résultat fondamental concernant la structure des homéomorphismes de Brouwer.

Théorème (Brouwer) *Tout point du plan est dans un domaine de translation.*

Définition 2.3 Un sous-ensemble E du plan est *libre* si $h(E)\cap E=\emptyset$. Il est *essentiellement libre* si il existe un entier n tel que $h^n(E)\cap E=\emptyset$.

Remarquons que tout point du plan appartient à un disque libre (il suffit de prendre un disque assez petit). Les preuves du théorème des translations planes montrent en réalité que *tout compact connexe libre est inclus dans un domaine de translation.* On peut encore généraliser ce résultat:

Lemme 2.4 ([23] compacts connexes libres) *On considère une partie K compacte et connexe du plan. Alors K est incluse dans un domaine de translation si et seulement si elle est essentiellement libre.*

Le lemme de Franks

L'absence de récurrence est résumée par le "lemme de Franks", qui joue un rôle central dans ce texte. La plupart du temps, nous nous contenterons de la version à deux disques:

Étant donnés D_1 et D_2 deux disques topologiques fermés, d'intérieurs disjoints, d'intérieurs libres, on ne peut pas avoir simultanément, pour deux entiers positifs n_1 *et* n_2,

$$h^{n_1}(\mathrm{Int}(D_1))\cap \mathrm{Int}(D_2)\neq\emptyset \ \textit{ et } \ \mathrm{Int}(D_1)\cap h^{n_2}(\mathrm{Int}(D_2))\neq\emptyset.$$

Ce premier énoncé admet une reformulation immédiate.

Lemme 2.5 [23] *Soit D et V deux disques topologiques fermés d'intérieurs libres. Alors l'ensemble des entiers n tels que $h^n(\mathrm{Int}(D))$ rencontre $\mathrm{Int}(V)$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$.*

Nous appliquerons une seule fois[4] une version plus générale, qui utilise la notion suivante.

Définition 2.6 Une *chaîne de disques périodique* est une suite $(D_i)_{i=1..k}$, $(k \geq 2)$, de disques topologiques fermés tels que:

(1) les disques ouverts $\mathrm{Int}(D_i)$ sont disjoints deux à deux;

(2) chaque disque ouvert $\mathrm{Int}(D_i)$ est libre;

(3) il existe des entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_k$ tels que

$$\begin{array}{rcl} h^{n_1}(\mathrm{Int}(D_1)) & \cap & \mathrm{Int}(D_2) \neq \emptyset \\ & \vdots & \\ h^{n_{k-1}}(\mathrm{Int}(D_{k-1})) & \cap & \mathrm{Int}(D_k) \neq \emptyset \\ h^{n_k}(\mathrm{Int}(D_k)) & \cap & \mathrm{Int}(D_1) \neq \emptyset. \end{array}$$

Lemme 2.7 (Franks [8]) *Il n'existe pas de chaîne de disques périodique.*

Ce lemme a déjà de nombreuses applications (voir [8, 9, 21, 26]). Précisons que l'énoncé que nous utilisons ici est contenu dans l'énoncé d'origine de [8]; en particulier, nous n'avons pas besoin des sophistications du lemme 3.18 de [26].

En appliquant le lemme précédent à la suite $(\mathrm{Int}(D), \mathrm{Int}(h(D)))$ où D est un disque topologique fermé libre, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.8 *Un disque topologique fermé libre D est disjoint de l'intérieur de tous ses itérés $h^n(D)$ pour $n \neq 0$.*

À l'aide du théorème de Schoenflies, on peut voir que tout arc libre est inclus dans l'intérieur d'un disque libre: par conséquent, le Corollaire 2.8 entraîne que *tout arc libre est disjoint de tous ses itérés*. Une autre conséquence est:

Corollaire 2.9 *Tout point x du plan erre sous l'action de h, et l'orbite positive de x tend vers l'infini; autrement dit*

[4]cf preuve du Lemme 9.2.

- *il existe un voisinage V de x tel que pour tout $n \neq 0$, $h^n(V) \cap V = \emptyset$;*
- *pour toute partie compacte K du plan, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $h^n(x) \notin K$.*

Rappelons qu'en général, contrairement à l'intuition, les itérés du voisinage V, eux, ne sortent pas du compact K. Autrement dit: la suite des itérés de h converge simplement vers l'infini mais non uniformément. Cette remarque conduit à la notion classique de *point singulier*, que nous rappellerons à la Section 4.1. Le comportement de la suite des itrs d'un disque libre sera tudi la Section 5 (et est reprsent sur la Figure 12).

3 Distance de translation, flèches horizontales

Les propriétés des homéomorphismes de Brouwer, rappelées dans la partie précédente, vont nous permettre d'associer à l'homéomorphisme de Brouwer h une distance d_h sur $\mathbb{R}^2$; cette distance peut se comprendre en termes de domaines de translation ou bien en termes d'arcs libres (Section 3.1). À l'aide de cette distance, nous construisons ensuite un invariant de conjugaison associé à la donnée d'un couple de points (Section 3.3, Théorème B).

3.1 Distance de translation de h

Domaines de translation et distance

Définition 3.1 On appelle *h–distance* ou *distance de translation de h*, et on note d_h, la distance définie sur le plan de la manière suivante. Si x et y sont deux points distincts du plan, $d_h(x,y)$ est le plus petit entier k tel qu'il existe des domaines de translation $O_1, \ldots O_k$ dont l'union est connexe et contient x et y.

Remarquons que l'existence de l'entier k est immédiate: d'après le théorème des translations planes de Brouwer, on peut recouvrir le segment euclidien $[xy]$ par un nombre fini de domaines de translation. Le fait que l'application d_h soit une distance découle facilement de la définition.

Définition 3.2 Une *suite géodésique* (joignant x_0 à x_d) est une suite de points $(x_0, \ldots, x_d)$ du plan telle que $d_h(x_0, x_d) = d$ et $d_h(x_i, x_{i+1}) = 1$ pour tout $i = 0, \ldots, d-1$.

Il est clair que pour tous points x, y, il existe une suite géodésique joignant x à y. D'autre part, l'inégalité triangulaire entraîne que si $(x_0, \dots, x_d)$ est une suite géodésique, on a $d_h(x_i, x_j) = j - i$ pour tous $0 \leq i \leq j \leq d$.

Distance et arcs libres

Définition 3.3 (Figure 5) Soit γ un arc du plan. Une *décomposition* de γ est une écriture

$$\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$$

où les sous-arcs γ_i sont libres. Les *sommets* de la décomposition sont les extrémités $x_0, \dots x_k$ des arcs γ_i, comme sur la Figure 5. L'entier k est appelé *longueur* de la décomposition. La h*–longueur* de γ est le plus petit entier k tel qu'il existe une décomposition de γ de longueur k. Une décomposition réalisant ce minimum est appelée *décomposition minimale* de γ.[5]

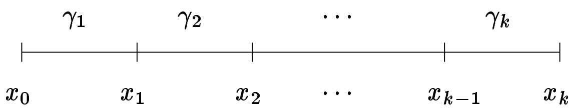

Figure 5: Décomposition d'un arc γ

L'affirmation suivante, dont la preuve est donnée plus bas, fait le lien entre arcs libres et domaines de translation. En corollaire, elle permet de donner une définition de la distance d_h en termes d'arcs.

Affirmation 3.4 (Domaines de translation et arcs libres) *Tout arc libre est inclus dans un domaine de translation. Réciproquement, si deux points x et y appartiennent à un même domaine de translation O, alors ou bien x et y sont dans la même orbite de h, ou bien il existe un arc libre joignant x à y et inclus dans O.*

Corollaire 3.5 *Soient x et y deux points du plan qui ne sont pas dans la même orbite. Alors le nombre $d_h(x, y)$ est le plus petit entier k tel qu'il existe un arc d'extrémités x et y et de h–longueur k.*

Remarquons que deux points distincts dans la même orbite sont clairement à h–distance 1.

[5] On obtient une définition alternative en remplaçant "libre" par "essentiellement libre" dans cette définition. Ceci conduirait à la même théorie.

Définition 3.6 Un arc réalisant le minimum du Corollaire 3.5 est appelé arc *géodésique*.

En particulier, la suite des sommets d'une décomposition minimale d'un arc géodésique est une suite géodésique (au sens de la Définition 3.2). Dans la suite du texte, toutes les décompositions considérées seront des décompositions minimales d'arcs géodésiques. Un exemple d'arc géodésique de longueur 3 est visible dans l'introduction (Figure 3).

Preuve de l'Affirmation 3.4 La première partie est une conséquence immédiate du Lemme 2.4 sur les ensembles compacts connexes libres (et même de sa version simple, cf les commentaires le précédant).

Soient x et y deux points quelconques du plan. Si x et y ne sont pas dans la même orbite de la translation horizontale $\tau\colon (x,y) \mapsto (x+1,y)$, alors il existe un arc joignant x à y et libre pour τ: en effet, tout segment euclidien non horizontal est libre pour τ, et on peut traiter le cas où x et y sont sur la même horizontale en raisonnant dans l'anneau quotient $\mathbb{R}^2/\tau$ (ou bien en conjuguant pour éviter cette situation). Par conjugaison, on en déduit la deuxième partie de l'affirmation. □

Preuve du Corollaire 3.5 Soient x et y deux points du plan qui ne sont pas dans la même orbite, et $p = d_h(x,y)$. Nous allons construire un arc reliant x à y et de h–longueur inférieure ou égale à p. Soient $O_1, \ldots, O_p$ des domaines de translation dont l'union est connexe et contient x et y. Quitte à réindexer les ouverts O_i, on peut supposer que O_1 contient x, que O_p contient y, et que O_i rencontre O_{i+1} $(i = 1, \ldots, p-1)$. Posons $x_0 = x$, $x_p = y$, et choisissons pour chaque i un point x_i dans $O_i \cap O_{i+1}$. Quitte à bouger un peu les points $x_1, \ldots, x_{p-1}$ on peut supposer de plus que les orbites des points $x_0, \ldots, x_p$ sont deux à deux distinctes (on utilise ici que x et y ne sont pas dans la même orbite). On applique alors la deuxième partie de l'Affirmation 3.4: pour chaque $i = 1 \ldots p$, il existe un arc libre γ_i reliant x_{i-1} à x_i et inclus dans O_i. Remarquons que si $|i-j| \geq 2$, alors les ouverts O_i et O_j sont disjoints: ceci est dû à la définition de $p = d_h(x,y)$. Par conséquent, les arcs γ_i et γ_j sont également disjoints. Soit $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_p$. Si γ est un arc, on a trouvé un arc de h–longueur inférieure ou égale à p reliant x et y. Dans le cas contraire, on remplace γ par un arc γ' en suivant la procédure suggérée par la Figure 6: on parcourt γ_1 en partant de x_0 jusqu'au premier point de γ_2 qu'on appelle x'_1, et on remplace l'arc γ_1 par le sous-arc $\gamma'_1 = [x_0 x'_1]_{\gamma_1}$; puis on parcourt γ_2 en partant de x'_1 jusqu'au premier point de γ_3 qu'on appelle x'_2, et on remplace l'arc γ_2 par le sous-arc $\gamma'_2 = [x'_1 x'_2]_{\gamma_2}$; *etc.*. On vérifie enfin que $\gamma' = \gamma'_1 * \cdots * \gamma'_p$ est un arc. Sa h–longueur est clairement inférieure ou égale à $p = d_h(x,y)$.

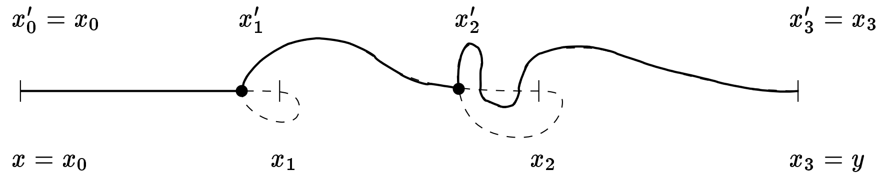

Figure 6: Construction d'un arc géodésique

Réciproquement, soit γ un arc de h–longueur k reliant deux points x et y. D'après la première partie de l'Affirmation 3.4, chaque sous-arc libre de γ est inclus dans un domaine de translation; on en déduit que $d_h(x,y) \leq k$, ce qui termine la preuve. □

3.2 Quelques propriétés

Rappelons qu'un homéomorphisme de Brouwer n'a pas de point périodique (Corollaire 2.9). Par suite, h^n est encore un homéomorphisme de Brouwer (pour tout entier n non nul), et on peut considérer la distance d_{h^n}.

Lemme 3.7 (Distance de translation pour h^n)

- *Pour tous x, y qui ne sont pas dans la même orbite de h, et tout entier n, $d_h(x, h^n(y)) = d_h(x,y)$;*
- *pour tout entier n non nul, les distances d_{h^n} et d_h sont égales;*
- *tout arc γ qui est géodésique pour h est encore géodésique pour h^n, et toute décomposition minimale de γ pour h est encore une décomposition minimale de γ pour h^n.*

Preuve La première propriété vient simplement de la définition de la distance de translation, puisque les domaines de translation sont invariants par h.

Pour la deuxième, il est clair que tout domaine de translation pour h est encore un domaine de translation pour h^n (car τ^n est conjuguée à τ). Ceci prouve que $d_{h^n} \leq d_h$. D'autre part, si $d_{h^n}(x,y) = 1$, alors ou bien x et y sont dans la même orbite de h^n (et donc aussi dans la même orbite de h), ou bien il existe un arc libre pour h^n joignant x et y, et cet arc est inclus dans un domaine de translation de h d'après le Lemme 2.4; dans les deux cas, on a $d_h(x,y) = 1$.

On en déduit facilement que $d_h \leq d_{h^n}$ (en utilisant par exemple une suite géodésique pour h^n).

Passons à la troisième propriété. Soit $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ une décomposition minimale d'un arc géodésique pour h. Un arc libre pour h est encore libre pour h^n (Corollaire 2.8), donc chaque sous-arc γ_i est aussi libre pour h^n: pour h^n, $\gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ est encore une décomposition de γ. D'autre part, on vient de montrer que $d_{h^n} = d_h$, donc la h^n–distance entre les deux extrémités de γ vaut encore d, et la h^n–longueur de γ ne peut pas être strictement plus petite que d (Corollaire 3.5). Ceci prouve que, pour h^n, la décomposition est minimale, et que γ est un arc géodésique. □

Lemme 3.8 *On se donne une décomposition minimale $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ d'un arc géodésique ($k \geq 2$).*

- *Pour tous i, j entre 1 et k, pour tout entier n, si $|i - j| > 1$, alors $h^n(\gamma_i) \cap \gamma_j = \emptyset$;*
- *pour tout i entre 1 et $k-1$, pour tout entier n, l'arc $\gamma_i * \gamma_{i+1}$ rencontre son image par h^n.*

Preuve Prouvons le premier point. On note $(x_0, \ldots, x_k)$ les sommets de la décomposition. On peut supposer que $i < j$. Supposons que $h^n(\gamma_i)$ rencontre γ_j, et soit z un point de l'intersection; on a alors

$$\begin{aligned} d_h(x_{i-1}, x_j) &= d_h(h^n(x_{i-1}), x_j) \\ &\leq d_h(h^n(x_{i-1}), z) + d_h(z, x_j) \\ &\leq 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Comme γ est un arc géodésique, ceci n'est possible que si $|i - j| \leq 1$. Le premier point est donc prouvé.

Montrons le second point. Si l'arc $\gamma_i * \gamma_{i+1}$ est libre pour h^n, alors d'après le Lemme 3.7, $d_h(x_{i-1}, x_{i+1}) = d_{h^n}(x_{i-1}, x_{i+1}) = 1$, ce qui contredit le fait que γ est un arc géodésique. □

Les h–boules

Définition 3.9 Pour tout point x du plan et tout entier strictement positif r, on notera $B_r(x)$ la boule de centre x et de rayon r pour la distance d_h:

$$B_r(x) = \{y : d_h(x, y) \leq r\}$$

On dira que $B_r(x)$ est la *h–boule de centre x et de rayon r*.

Cet ensemble est un ouvert connexe du plan (pour la topologie usuelle), et est invariant par h: en effet, d'après la définition de d_h, $B_1(x)$ est l'union des domaines de translation contenant x, et $B_r(x)$ est l'union des domaines de translation rencontrant $B_{r-1}(x)$.

3.3 Flèches horizontales

Dans ce paragraphe, nous utilisons le lemme de Franks pour définir les flèches horizontales.

Définition

On se donne une décomposition minimale $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ d'un arc géodésique ($d \geq 1$).

Affirmation 3.10 *Soit i un entier entre 1 et $d-1$. Une et une seule des deux possibilités suivantes est vérifiée:*

(1) $h(\gamma_i) \cap \gamma_{i+1} \neq \emptyset$,

(2) $\gamma_i \cap h(\gamma_{i+1}) \neq \emptyset$.

Preuve de l'Affirmation 3.10 Puisque la décomposition est minimale, l'arc $\gamma_i * \gamma_{i+1}$ ne peut pas être libre. Puisque, par contre, γ_i et γ_{i+1} sont libres, l'une des deux possibilités de la remarque doit être vérifiée.

Montrons que les deux possibilités ne peuvent pas être vérifiées simultanément. On note x_i le sommet commun aux deux arcs. En utilisant le théorème de Schoenflies, on peut supposer que γ est un segment euclidien (cf Figure 7). On peut alors épaissir les deux arcs pour trouver deux disques topologiques fermés D_1, D_2 tels que

- $\gamma_i \setminus \{x_i\} \subset \mathrm{Int}(D_1)$ et $\gamma_{i+1} \setminus \{x_i\} \subset \mathrm{Int}(D_2)$;
- les intérieurs de D_1 et D_2 sont disjoints;
- D_1 et D_2 sont libres.

Supposons maintenant que la première possibilité de l'affirmation est vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe un point x de γ_i dont l'image $h(x)$ est dans γ_{i+1}. Alors $x \neq x_i$ car γ_{i+1} est libre, et $h(x) \neq x_i$ car γ_i est libre. Par conséquent x et $h(x)$ appartiennent respectivement aux intérieurs de D_1 et D_2, autrement dit $h(\mathrm{Int}(D_1))$ rencontre $\mathrm{Int}(D_2)$. De même, si la seconde possibilité de l'affirmation est vérifiée, alors $h(\mathrm{Int}(D_2))$ rencontre $\mathrm{Int}(D_1)$. Si ces deux rencontres avaient lieu simultanément, la suite (D_1, D_2) serait une chaîne de disques périodique, ce qu'interdit le lemme de Franks 2.7. $\square$

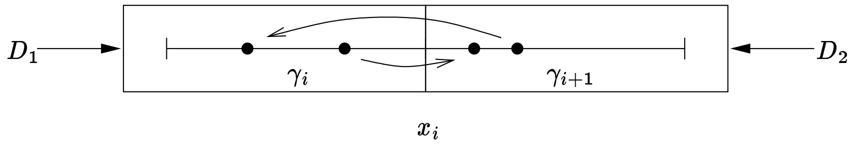

Figure 7: Définition d'une flèche, *via* le lemme de Franks

Rappelons qu'un *mot à p lettres dans l'alphabet A* est une suite de p éléments de A, autrement dit une application de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ dans A. On notera toujours M_i la $i$ème lettre du mot M.

Définition 3.11 On appelle *mot horizontal de* $\gamma_1 * \cdots * \gamma_d$, et on note

$$M^h_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d),$$

le mot de $d-1$ lettres dans l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow\}$, dont la $i$ème lettre est:

(1) $M^h_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)_i := \rightarrow$ si c'est la première possibilité qui est satisfaite dans l'Affirmation 3.10 ci-dessus;

(2) $M^h_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)_i := \leftarrow$ si c'est la deuxième.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'homéomorphisme, on écrira simplement

$$M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d).$$

3.4 Énoncé précis du Théorème B

A priori, le mot horizontal dépend de l'arc géodésique γ, et même du choix d'une décomposition de γ. Le Théorème B dit qu'en réalité, il ne dépend que des extrémités de γ.

Théorème B-bis *Soient x et y deux points du plan, et $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ et $\gamma' = \gamma'_1 * \cdots * \gamma'_d$ deux décompositions minimales d'arcs géodésiques joignant x et y. Alors $M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d) = M_{\leftrightarrow}(\gamma'_1 * \cdots * \gamma'_d)$.*

La preuve du théorème occupera les Sections 4, 5 et 6. En admettant provisoirement le théorème, on peut donner la définition suivante.

Définition 3.12 Soient x et y deux points distincts du plan. On appellera *mot horizontal du couple* (x,y), et on notera $M^h_{\leftrightarrow}(x,y)$, le mot $M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)$, où $\gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ est n'importe quelle décomposition minimale de n'importe quel arc géodésique joignant x à y. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'homéomorphisme, on écrira simplement $M_{\leftrightarrow}(x,y)$.

Remarquons que le mot horizontal entre deux points à h–distance 1 est vide.

3.5 Quelques propriétés élémentaires du mot horizontal

Sur l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow\}$, on définit l'opération "opposée", notée $-$, par

$$-\leftarrow := \rightarrow \quad \text{et} \quad -\rightarrow := \leftarrow .$$

Ceci induit naturellement une opération sur les mots sur cet alphabet, encore notée $-$, qui consiste à changer chaque lettre du mot en son opposée. Le mot $-M$ est appelé *opposé* du mot M. Si M est un mot de longueur l sur cet alphabet, le *palindrome de* M est le mot $\mathrm{Palin}(M)$ défini par $\mathrm{Palin}(M)_i = M_{l+1-i}$. Enfin, pour tout arc γ, on note $-\gamma$ l'arc ayant l'orientation opposée à celle de γ: en termes de paramétrage, on a $(-\gamma)(t) = \gamma(1-t)$.

On se donne une décomposition minimale $\gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ d'un arc géodésique γ pour h. Par abus, on notera parfois γ la décomposition elle-même (et $-\gamma$ la décomposition induite de manière évidente sur l'arc $-\gamma$).

Lemme 3.13

(1) $M^{h^n}_{\leftrightarrow}(\gamma) = M^h_{\leftrightarrow}(\gamma) = -M^{h^{-n}}_{\leftrightarrow}(\gamma)$ *(pour tout* $n \geq 1$*)*;

(2) $M_{\leftrightarrow}(-\gamma) = -\,\mathrm{Palin}(M_{\leftrightarrow}(\gamma))$.

Preuve Tout d'abord, les liens entre $M^h_{\leftrightarrow}(\gamma)$, $M^{h^{-1}}_{\leftrightarrow}(\gamma)$ et $M^h_{\leftrightarrow}(-\gamma)$ suivent immédiatement de la définition du mot horizontal. Il reste donc uniquement à établir le lien entre $M^{h^n}_{\leftrightarrow}(\gamma)$ et $M^h_{\leftrightarrow}(\gamma)$ pour $n \geq 1$.

Soit i un entier entre 1 et $d-1$. D'après le Lemme 3.7, pour h^n, l'arc γ est encore un arc géodésique dont $\gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ est une décomposition minimale; notamment, le mot $M^{h^n}_{\leftrightarrow}(\gamma)$ est bien défini. Montrons que les mots horizontaux associés à γ pour h et h^n coïncident; pour cela, on s'intéresse à la $i$ème lettre de ces deux mots. Pour fixer les idées, supposons que $M^h_{\leftrightarrow}(\gamma)_i = \leftarrow$, c'est-à-dire que $h(\gamma_i) \cap \gamma_{i+1} = \emptyset$. À l'aide du théorème de Schoenflies, on trouve deux disques topologiques fermés libres D_i et D_{i+1}, contenant respectivement les arcs γ_i et γ_{i+1} dans leurs intérieurs, et tels que $h(D_i) \cap D_{i+1} = \emptyset$ (cf Figure 8).

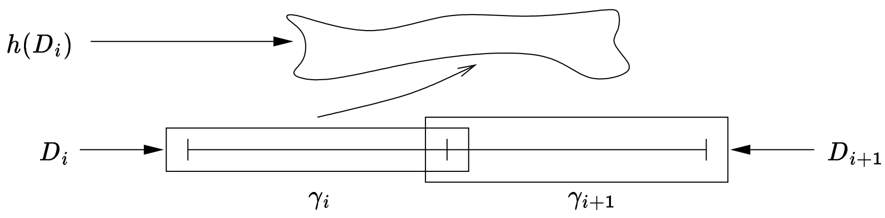

Figure 8: Si $M^h_{\leftrightarrow}(\gamma)_i = \leftarrow \ldots$

D'après le lemme de Franks (Lemme 2.5), l'ensemble des entiers n tels que $h^n(\mathrm{Int}(D_i))$ rencontre $\mathrm{Int}(D_{i+1})$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{Int}(D_{i+1})$ rencontre $\mathrm{Int}(D_i)$ mais pas $h(\mathrm{Int}(D_i))$, on en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $h^n(\mathrm{Int}(D_i)) \cap \mathrm{Int}(D_{i+1}) = \emptyset$, donc aussi que $h^n(\gamma_i) \cap \gamma_{i+1} = \emptyset$. Puisque la décomposition est minimale pour h^n, on doit alors avoir $\gamma_i \cap h^n(\gamma_{i+1}) \neq \emptyset$ (par Affirmation 3.10); autrement dit, $M^{h^n}_{\leftrightarrow}(\gamma)_i = \leftarrow = M^h_{\leftrightarrow}(\gamma)_i$, ce que l'on voulait. $\square$

4 Composantes de Reeb

Dans cette partie, nous généralisons le concept de composantes de Reeb des feuilletages du plan (voir l'introduction), nous énonçons un théorème d'existence et d'unicité, et nous en déduisons le Théorème B (le mot horizontal d'un arc géodésique ne dépend que de ses extrémités). Le choix de la définition des composantes de Reeb est assez naturel, il utilise le concept classique d'*ensemble singulier* (dû à Kerékjártó). Un des points importants est qu'il faut maintenant définir une composante de Reeb comme étant associée à un couple de points (x, y). Le Théorème A-bis affirme alors l'existence d'exactement $d-1$ composantes de Reeb *minimales* associées à (x, y), où d est la distance de translation entre x et y, et ces composantes sont données par une "formule" topologique explicite. Notons que la minimalité est essentielle pour obtenir un nombre fini de composantes associées à (x, y) (voir les exemples de l'Appendice B). Elle jouera également un rôle central dans la définition des flèches verticales (Section 7, 8 et 9). Par contre, elle n'intervient pas dans la preuve du Théorème B.

4.1 Ensemble singulier

Définition 4.1 Soient x et y deux points du plan. On dira que le couple (x, y) est *singulier* si x et y n'appartiennent pas à la même orbite de h, et si pour tous voisinages V_x et V_y de x et y respectivement, il existe un entier *positif* n tel que $h^n(V_x) \cap V_y \neq \emptyset$. On notera $\mathrm{Sing}(h)$, et on appellera *ensemble singulier de* h, l'ensemble des couples singuliers de h.

Voici quelques exemples. La translation $\tau\colon (x,y) \mapsto (x+1,y)$ n'admet aucun couple de points singuliers. Pour l'homéomorphisme de Reeb (représenté sur la Figure 1), l'ensemble singulier est l'ensemble des couples (x,y) où x et y appartiennent respectivement aux bords supérieur et inférieur de la bande B. En fait, on peut voir que si h est le temps 1 d'un flot, alors l'ensemble singulier est la réunion des produits $\Delta_0 \times \Delta_1$ des bords de composantes de Reeb (Δ_0, Δ_1) (au sens de la définition donnée en introduction de ce texte).

Il suit de la définition qu'un couple (x,y) est singulier pour h^{-1} si et seulement si le couple (y,x) est singulier pour h. Nous verrons plus loin que h^n a le même ensemble singulier que h si $n \geq 1$ (voir les commentaires qui suivent le Lemme 5.6).

Rappelons que $B_1(x)$ désigne la boule de rayon 1 et de centre x pour la distance de translation de h, c'est-à-dire la réunion des domaines de translation contenant x. Le lemme suivant établit un premier lien entre l'ensemble singulier et la distance d_h.

Lemme 4.2 (Couples singuliers et h–distance) *Soit (x,y) un couple singulier de h. Alors $d_h(x,y) = 2$, et $y \in \partial B_1(x)$.*

Preuve Une translation n'admet pas de couple singulier, par suite il ne peut pas exister de domaine de translation de h contenant simultanément x et y. Ceci prouve que $d_h(x,y) > 1$.

Soit O un domaine de translation contenant x: c'est un voisinage de x, et il est invariant par h. La définition des couples singuliers entraîne que tout voisinage de y rencontre O. Autrement dit y est dans l'adhérence de O, mais O est inclus dans $B_1(x)$, donc $y \in \mathrm{Adh}(B_1(x))$. Comme $B_1(x)$ ne contient pas y, c'est que $y \in \partial B_1(x)$. On en déduit que tout domaine de translation qui contient y rencontre $B_1(x)$, et donc que $d_h(x,y) = 2$. □

4.2 Définition générale des composantes de Reeb

Définition 4.3 (Figure 9) Soient x et y deux points, et F et G deux sous-ensembles fermés connexes du plan. On dit que (F,G) est une *composante de Reeb pour* (x,y) si

(1) $F \times G \subset \mathrm{Sing}(h)$ ou $G \times F \subset \mathrm{Sing}(h)$;

(2) F contient x, ou bien F sépare x et $G \cup \{y\}$;

(3) G contient y, ou bien G sépare y et $F \cup \{x\}$.

Les ensembles F et G sont appelés *bords* de la composante: si $F \times G \subset \mathrm{Sing}(h)$, F en est le *bord négatif*, G le *bord positif*; si $G \times F \subset \mathrm{Sing}(h)$, c'est le contraire.

Il suit immédiatement de la définition que les ensembles F et G sont disjoints, puisqu'un couple (x,x) n'est jamais singulier.

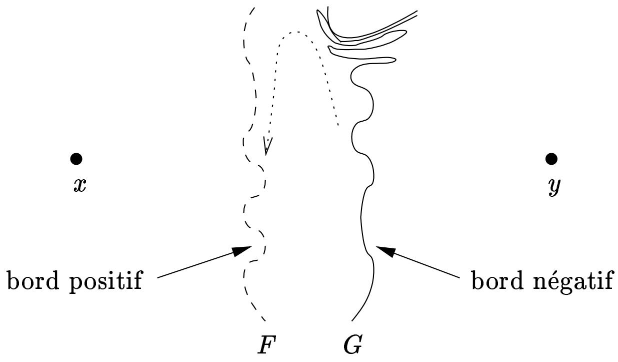

Figure 9: Une composante de Reeb non dégénérée

Définition 4.4 La composante de Reeb est dite *minimale* si, de plus,

- $F = \{x\}$, ou bien F est minimal pour l'inclusion parmi les ensembles fermés connexes qui séparent x et $G \cup \{y\}$;
- $G = \{y\}$, ou bien G est minimal pour l'inclusion parmi les ensembles fermés connexes qui séparent y et $F \cup \{x\}$.

Autrement dit, (F,G) est minimale si pour toute composante de Reeb (F',G') pour (x,y), si $F' \subset F$ et $G' \subset G$, alors $F' = F$ et $G' = G$.

Définition 4.5 La composante (F,G) est dite *dégénérée* si F contient x ou G contient y.

Voici l'exemple le plus simple de composante de Reeb: si $(x,y) \in \mathrm{Sing}(h)$, alors $(\{x\},\{y\})$ est une composante de Reeb dégénérée et minimale pour (x,y). L'Appendice B contient des exemples plus substantiels (on y montre en particulier qu'un couple (F,G) peut être une composante de Reeb minimale pour

(x,y), et être une composante de Reeb *non* minimale pour un autre couple (x',y'), même dans le cas non dégénéré).

Remarquons que toute composante de Reeb pour (x,y) "contient" une composante de Reeb minimale pour (x,y). En effet, le lemme de Zorn entraîne que tout fermé séparant x et y contient un fermé séparant x et y et minimal pour l'inclusion parmi les ensembles de ce type. En réalité, nous n'utiliserons pas cette remarque, puisque nous allons obtenir les composantes de Reeb minimales de manière constructive.

4.3 Construction des composantes de Reeb minimales

Soient x et y deux points du plan, tels que $d = d_h(x,y) \geq 2$. On a

$$\mathrm{Adh}(B_1(x)) \subset B_2(x) \subset \mathrm{Adh}(B_2(x)) \subset B_3(x) \subset \cdots \subset B_{d-1}(x).$$

Le point y n'est dans aucun de ces ensembles. Par suite, pour $i = 1, \ldots, d-2$, on peut considérer l'ensemble $O_y(\mathrm{Adh}(B_i(x)))$, défini comme la composante connexe de l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(B_i(x))$ qui contient y. On pose alors

$$F_1(x,y) = \partial O_y(\mathrm{Adh}(B_1(x))), \ldots, F_{d-2}(x,y) = \partial O_y(\mathrm{Adh}(B_{d-2}(x))).$$

Dans le cas où l'ensemble $\partial B_{d-1}(x)$ ne contient pas non plus le point y, on peut définir de la même manière $O_y(\mathrm{Adh}(B_{d-1}(x)))$ et $F_{d-1}(x,y)$. Dans le cas contraire, on pose $F_{d-1}(x,y) = \{y\}$. Enfin, on définit symétriquement les ensembles $O_x(\mathrm{Adh}(B_i(y)))$ et $F_i(y,x)$ pour $i = 1, \ldots, d-1$. Décrivons immédiatement quelques propriétés élémentaires, concernant la topologie, puis la dynamique de ces ensembles.

Lemme 4.6 (Topologie des ensembles $F_i(x,y)$) *Pour tous x, y et pour tout i entre 1 et $d-1$, l'ensemble $F_i(x,y)$ est connexe et contenu dans $\partial B_i(x)$. Si de plus $F_i(x,y) \neq \{y\}$, alors cet ensemble sépare x et y, et possède la propriété de minimalité suivante: tout ensemble F, contenu dans $\partial B_i(x)$ et séparant x et y, contient $F_i(x,y)$.*

Preuve du Lemme 4.6 On se place dans le cas non trivial ($F_i(x,y) \neq \{y\}$). La connexité de $F_i(x,y)$ résulte des propriétés de la topologie plane (appliquer le Théorème A.4 de l'appendice à l'ouvert connexe $B_i(x)$). On a les inclusions

$$F_i(x,y) = \partial O_y(\mathrm{Adh}(B_i(x))) \subset \partial\, \mathrm{Adh}(B_i(x)) \subset \partial B_i(x),$$

l'égalité a lieu par définition, la première inclusion suit de la Proposition A.1 de l'appendice, la dernière est une propriété de topologie générale. L'ensemble

$F_i(x,y)$ sépare x et y puisqu'il est la frontière d'un ensemble qui contient y mais pas x. Il reste à montrer la propriété de minimalité. Soit z un point quelconque de $F_i(x,y)$. On voit facilement que l'ensemble $B_i(x) \cup \{z\} \cup O_y(\mathrm{Adh}(B_i(x)))$ est connexe. Un ensemble F inclus dans $\partial B_i(x)$ est disjoint de $B_i(x)$ et de $O_y(\mathrm{Adh}(B_i(x)))$; par conséquent, si F sépare x et y, il doit contenir le point z. On en déduit que tout ensemble F inclus dans $\partial B_i(x)$ et séparant x et y doit contenir $F_i(x,y)$, ce que l'on voulait. □

Il n'est pas encore clair que les ensembles $F_i(x,y)$ et $F_{d-i}(y,x)$ soient disjoints (comme suggéré par la Figure 10 ci-dessous). Cependant, ceci sera une conséquence du Théorème A-bis.

Lemme 4.7 *Les ensembles $F_1(x,y), \ldots, F_{d-2}(x,y)$ sont invariants par h.*

Preuve du Lemme 4.7 Tout d'abord, les ensembles $\mathrm{Adh}(B_i(x))$ sont invariants, donc les ensembles $O_y(\mathrm{Adh}(B_i(x)))$ sont libres ou invariants (comme composantes connexes d'ensembles invariants). Si $1 \leq i \leq d-2$, la h–boule $B_1(y)$ est disjointe de $B_i(x)$ (inégalité triangulaire), elle est donc incluse dans l'ensemble $O_y(\mathrm{Adh}(B_i(x)))$: celui-ci ne peut pas être libre, puisqu'il contient l'ensemble invariant $B_1(y)$. Il est donc invariant. L'ensemble $F_i(x,y)$ est aussi invariant comme frontière d'un ensemble invariant.[6] □

4.4 Énoncé précis du Théorème A

Théorème A-bis *Soient x et y deux points du plan, et $d = d_h(x,y)$. Alors il existe exactement $d-1$ composantes de Reeb minimales pour (x,y); ces composantes sont les couples $(F_{d-i}(y,x), F_i(x,y))$ pour i variant entre 1 et $d-1$.*

Le théorème est illustré symboliquement par la Figure 10, et plus concrètement par les exemples de l'Appendice B. La preuve du théorème occupera la Section 6. Remarquons que parmi les $d-1$ composantes minimales, seules les deux composantes "extrêmes"

$$(F_{d-1}(y,x), F_1(x,y)) \quad \text{et} \quad (F_1(y,x), F_{d-1}(x,y))$$

[6] Dans une première version de ce texte, on affirmait que l'ensemble $F_{d-1}(x,y)$ est invariant ou libre sous h. Suite à une question du referee, l'auteur s'est aperçu de son erreur: on peut construire des exemples ou cet ensemble n'est ni libre ni invariant.

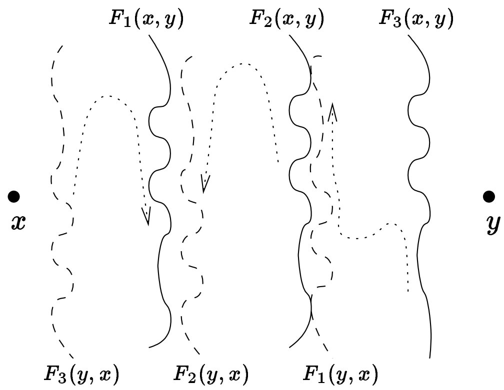

Figure 10: Illustration du Théorème A

sont susceptibles d'être dégénérées. Ceci suit immédiatement de la définition des ensembles $F_i(x,y)$. Notons au passage que les composantes dégénérées sont "rares": en effet, H. Nakayama a montré que l'ensemble des points faisant partie d'un couple de points singuliers est topologiquement maigre ([29]); génériquement, les points x et y sont non singuliers, et aucune des composantes de Reeb associées à (x,y) n'est dégénérée. De même, seuls les bords "extrêmes" $F_{d-1}(y,x)$ et $F_{d-1}(x,y)$ peuvent ne pas être invariants: ceci suit du Lemme 4.7.

4.5 Preuve du Théorème B-bis: invariance des flèches horizontales

Dans cette section, nous admettons provisoirement le Théorème A-bis et nous en déduisons le Théorème B-bis. Commenons par donner l'idée de la preuve. Pour simplifier, considérons d'abord le cas où h est un homéomorphisme de Brouwer qui préserve chaque feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}$ (par exemple, h peut être obtenu en intégrant un champ de vecteurs qui ne s'annule pas, cf l'introduction). On voit facilement que la h–distance entre les deux bords d'une composante de Reeb du feuilletage est égale à 2, et que le mot horizontal d'un arc géodésique joignant le bord négatif de la composante à son bord positif vaut $(\rightarrow)$. Considérons alors un arc géodésique γ, d'extrémités x et y, de longueur $d \geq 2$, muni d'une décomposition minimale de sommets $x_0 = x, \ldots, x_d = y$ (cf Figure 3 de l'introduction). Cet arc franchit successivement les $d-1$ composantes de Reeb associées au couple (x,y), dont l'existence est assurée par le Théorème A. Puisque les deux bords d'une composante de Reeb sont à h–distance 2, le sommet x_i est situé entre les deux bord de la i–ème composante rencontrée. Si

γ rencontre le bord négatif de cette composante avant le bord positif, alors la i–ème flèche du mot $M_\leftrightarrow(\gamma)$ sera $\rightarrow$; elle sera $\leftarrow$ si γ rencontre en premier lieu le bord positif. Il est maintenant clair que tout autre arc géodésique ayant les mêmes extrémités que γ donnera la même suite de flèches.

La preuve dans le cas général s'inspire fortement du cas des feuilletages. On montre d'abord qu'un arc géodésique joignant x à y doit franchir successivement les $d-1$ composantes de Reeb minimales dans l'ordre attendu (voir Lemme 4.8). Chaque franchissement d'une composante de Reeb impose la présence d'un sommet, et impose aussi la flèche correspondante (Lemme 4.9).

Lemme 4.8 (Franchissement des composantes de Reeb) *Soit $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ une décomposition minimale d'un arc géodésique joignant x à y. Alors pour tout entier i entre 1 et $d-1$, l'ensemble $F_i(x,y)$ rencontre γ, et $F_i(x,y) \cap \gamma \subset \gamma_{i+1}$. Si de plus $i \neq d-1$, alors $F_i(x,y) \cap \gamma \subset \mathrm{Int}(\gamma_{i+1})$.*

On a bien sûr un résultat symétrique en inversant les rôles de x et y: notamment, $F_{d-i}(y,x) \cap \gamma \subset \gamma_i$.

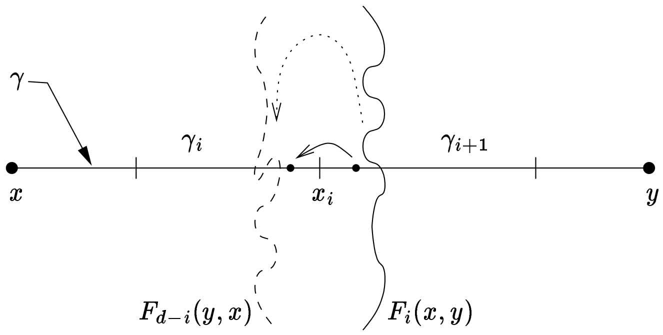

Figure 11: Positions relatives d'un arc géodésique et d'une composante de Reeb minimale

Le second lemme relie la flèche des arcs de longueur 2 à la présence d'un couple singulier.

Lemme 4.9 (Ensemble singulier et flèches horizontales) *Soit $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ une décomposition minimale d'un arc géodésique de longueur 2. Alors*

$$\begin{array}{lcl} M_\leftrightarrow(\gamma_1 * \gamma_2) = (\rightarrow) & \Leftrightarrow & \gamma_1 \times \gamma_2 \cap \mathrm{Sing}(h) \neq \emptyset, \\ M_\leftrightarrow(\gamma_1 * \gamma_2) = (\leftarrow) & \Leftrightarrow & \gamma_2 \times \gamma_1 \cap \mathrm{Sing}(h) \neq \emptyset. \end{array}$$

Preuve du Lemme 4.8 L'ingrédient principal de la preuve est l'inégalité triangulaire. Soit i un entier entre 1 et $d-1$. Notons $x_0 = x, \dots, x_d = y$ les sommets de la décomposition. Puisque l'ensemble $F_i(x,y)$ sépare x et y ou bien vaut $\{y\}$, l'arc γ doit rencontrer cet ensemble. Montrons que la rencontre se fait nécessairement entre x_i et x_{i+1}. En effet:

- le sous arc $[xx_i]_\gamma$ est dans la h–boule $B_i(x)$ (car il contient x et est réunion de i arcs libres), donc $\partial B_i(x)$ ne rencontre pas $[xx_i]_\gamma$ (puisque les h–boules sont des ouverts du plan);
- si $i < d-1$, le sous-arc $[x_{i+1}y]_\gamma$ est dans la h–boule $B_{d-i-1}(y)$. Or d'après l'inégalité triangulaire, on a $B_{d-i-1}(y) \cap B_i(x) = \emptyset$, donc $\partial B_i(x)$ ne rencontre pas $[x_{i+1}y]_\gamma$.

Puisque $F_i(x,y) \subset \partial B_i(x)$, on a bien

$$F_i(x,y) \cap \gamma \subset \,]x_i x_{i+1}[_\gamma = \operatorname{Int}(\gamma_{i+1}) \quad \text{et} \quad F_{d-1}(x,y) \cap \gamma \subset \,]x_{d-1}x_d]_\gamma \subset \gamma_d$$

si $i < d-1$. Ce que l'on voulait. □

Preuve du Lemme 4.9 On montre la première équivalence, la seconde en découle (en changeant h en h^{-1}).

Montrons la première implication. On suppose que $M_\leftrightarrow(\gamma_1 * \gamma_2) = (\rightarrow)$. D'après les Lemmes 3.7 et 3.13, pour h^n, $\gamma_1 * \gamma_2$ est encore une décomposition minimale d'un arc géodésique, et le mot horizontal associé est encore $(\rightarrow)$. Autrement dit, pour tout entier $n > 0$, on a $h^n(\gamma_1) \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. Par compacité, on en déduit facilement que $\gamma_1 \times \gamma_2$ contient un couple singulier.

Montrons l'implication réciproque. Ceci revient à montrer que si $M_\leftrightarrow(\gamma_1 * \gamma_2) = (\leftarrow)$, alors $\gamma_1 \times \gamma_2$ ne contient pas de couple singulier. Exactement comme dans la preuve du Lemme 3.13 (cf Figure 8), l'hypothèse $M_\leftrightarrow(\gamma_1 * \gamma_2) = (\leftarrow)$ permet de trouver deux disques topologiques fermés D_1 et D_2, dont les intérieurs contiennent respectivement γ_1 et γ_2, et tels que $h^n(\operatorname{Int}(D_1))$ soit disjoint de $\operatorname{Int}(D_2)$ pour tout entier $n > 0$. On en déduit que $\gamma_1 \times \gamma_2$ ne contient pas de couple singulier. □

Preuve du Théorème B-bis Soient x et y deux points du plan, et $d = d_h(x,y)$. On suppose $d \geq 2$, sans quoi il n'y a rien à montrer. Soit i un entier entre 1 et $d-1$. Le Théorème A-bis nous dit que $(F_{d-i}(y,x), F_i(x,y))$ est une composante de Reeb pour (x,y), et en particulier que le produit $F_{d-i}(y,x) \times F_i(x,y)$ est singulier pour h ou bien pour h^{-1}.

Pour fixer les idées, supposons que $F_{d-i}(y,x) \times F_i(x,y) \subset \operatorname{Sing}(h)$. On considère une décomposition minimale $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d$ d'un arc géodésique joignant x à

y. Le Lemme 4.8 montre que dans ce cas, $\gamma_i \times \gamma_{i+1} \cap \mathrm{Sing}(h) \neq \emptyset$. D'autre part, il suit des définitions que $M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)_i = M_{\leftrightarrow}(\gamma_i * \gamma_{i+1})$. Le Lemme 4.9 dit alors que $M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)_i = \rightarrow$. On a montré que la $i$ème flèche du mot ne dépend pas de γ, ce qui termine la preuve. □

Au passage, on a obtenu l'énoncé suivant (qui peut être vu comme une version "technique" du Théorème B).

Théorème B-ter *Pour tout* $i = 1, \ldots, d-1$,

$$M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)_i = \leftarrow \quad \Leftrightarrow \quad F_{d-i}(y,x) \times F_i(x,y) \subset \mathrm{Sing}(h^{-1})$$
$$M_{\leftrightarrow}(\gamma_1 * \cdots * \gamma_d)_i = \rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad F_{d-i}(y,x) \times F_i(x,y) \subset \mathrm{Sing}(h).$$

5 Topologie de la suite des itérés d'un disque libre

Cette partie est indépendante des Sections 3 et 4. Les démonstrations de tous les énoncés se trouvent en Section 5.5. Nous allons étudier en détail le comportement de la suite des itérés positifs d'un disque libre D. Le premier résultat est que cette suite converge (Lemme 5.1). Bien sûr, ceci vaut également pour la suite des itérés négatifs. Les ensembles-limite positifs et négatifs étant disjoints et disjoints de D, leur réunion découpe le plan en trois parties, une partie "négative", une partie "centrale" (contenant D) et une partie "positive": on a ainsi associé à D une partition du plan en cinq morceaux (Lemme 5.4). Un résultat technique essentiel complète la description; il affirme qu'on ne peut pas aller continûment de la partie centrale à l'un des deux ensembles-limite sans rencontrer une infinité d'itérés du disque D (Proposition 5.5, cf Figure 12). Enfin, en faisant tendre le diamètre du disque D vers 0, on localise ces constructions en un point z, ce qui permet d'associer au point z une nouvelle partition en cinq morceaux (Lemme 5.8). Au passage, le Lemme 5.6 explique le lien avec l'ensemble singulier de h: un couple (x,y) est singulier si et seulement si y appartient à l'ensemble-limite positif de x. Ainsi, les résultats de cette section permettent de construire des "grands" ensembles de couples singuliers, et nous les utiliserons dans la Section 6 pour prouver l'existence des composantes de Reeb requises par le Théorème A.

5.1 Ensembles-limite

On note $\mathcal{K}$ l'espace des compacts de la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, muni de la topologie de Hausdorff (voir [20], chap. IV, paragraphes 38 et 42; une définition possible de la convergence dans cet espace est donnée dans la preuve du lemme ci-dessous).

Lemme 5.1 *Soit D un disque topologique fermé libre; alors la suite des itérés $(h^n(D))_{n\geq 0}$ converge dans $\mathcal{K}$.*[7]

Rappelons que l'espace $\mathcal{K}$ est métrique, compact, et que l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}$ qui sont connexes est encore compact. La limite de cette suite est donc un compact connexe de la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, qui contient le point ∞ puisque les orbites des points tendent vers ∞. On note $\lim^+ D$ l'intersection de la limite avec le plan $\mathbb{R}^2$. On définit de même l'ensemble $\lim^- D$ comme la trace dans le plan de la limite de la suite $(h^n(D))_{n\leq 0}$. Ces deux ensembles sont des fermés du plan, on les appellera *ensembles-limite* du disque D.

Affirmation 5.2 *Les trois ensembles D, $\lim^+ D$ et $\lim^- D$ sont deux à deux disjoints.*

5.2 Partition du plan

L'Affirmation 5.2 permet de définir les ensembles suivants.

Définition 5.3 (Figure 12) Soit D un disque topologique fermé libre.

- $U(D)$ est la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus (\lim^+ D \cup \lim^- D)$ contenant D;
- $U^-(D)$ est l'union des composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(U(D))$ dont la frontière rencontre $\lim^- D$;
- $U^+(D)$ est l'union de celles dont la frontière rencontre $\lim^+ D$.

Lemme 5.4 (Partition associée à un disque libre) *Soit D un disque topologique fermé libre. On a une partition du plan*

$$\mathbb{R}^2 = U^-(D) \sqcup \lim{}^- D \sqcup U(D) \sqcup \lim{}^+ D \sqcup U^+(D),$$

et chacun des ensembles de cette partition est invariant par h. De plus, $\partial U(D) = \lim{}^+ D \cup \lim{}^- D$.

[7] Remarquons qu'on peut en déduire que ce résultat est aussi vrai pour un disque qui n'est pas libre: en effet, un tel disque est réunion d'un nombre fini de disques libres. Le résultat n'est pas connu pour un compact connexe quelconque (voir aussi le Lemme 9.2).

5.3 Disposition des itérés de D

Proposition 5.5 (Non-accessibilité) *Soit D un disque topologique fermé libre. Soit α un arc joignant un point de $U(D)$ à un point de $\lim^+ D \cup \lim^- D$. Alors il existe un entier n tel que α rencontre l'itéré $h^n(D)$.*

Ce résultat peut être considéré comme le lemme "technique" fondamental de notre étude. Il est déjà présent chez Homma–Terasaka et Andrea (voir [15] lemma 7; [2], proposition 1.7); cependant, le texte [15] est très difficile, et le texte [2] concerne les ensembles-limite de trajectoires. Nous en donnerons une preuve fortement inspirée du texte d'Andrea. Une autre formulation consiste à dire que les points de $\lim^+ D \cup \lim^- D$ ne sont pas accessibles depuis l'ouvert $U(D) \setminus (\cup_{n\in\mathbb{Z}} h^n(D))$. On peut aussi en déduire un énoncé plus fort: sous les mêmes hypothèses, l'arc α rencontre en fait une infinité d'itérés de D. En effet, dans le cas contraire, α contiendrait un sous-arc α', disjoint de tous les itérés de D, et joignant toujours un point de $U(D)$ à un point de $\lim^+ D \cup \lim^- D$; ceci contredirait le lemme. La situation est symbolisée par le dessin de la Figure 12.

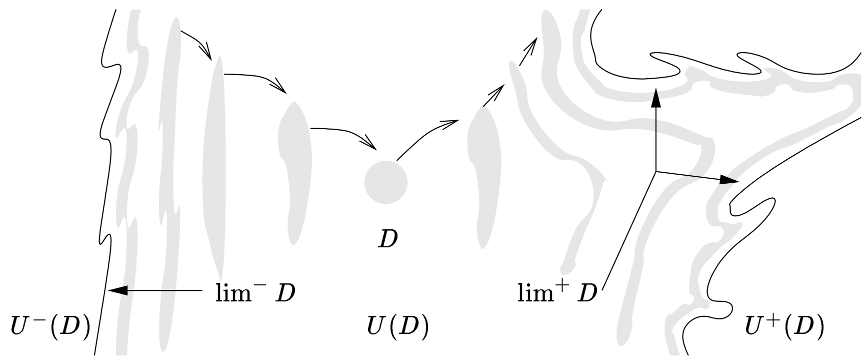

Figure 12: Topologie de la suite des itérés de D

5.4 Partition associée à un point

Pour tout point z, on pose:

$$\lim{}^+ z = \bigcap \{\lim{}^+ D : D \text{ disque topologique libre tel que } z \in \mathrm{Int}(D)\},$$

$$\lim{}^{-} z = \bigcap \{\lim{}^{-} D : D \text{ disque topologique libre tel que } z \in \mathrm{Int}(D)\}.$$

Ces deux ensembles sont appelés *ensembles-limite* du point z.

Lemme 5.6 *Soit (x, y) un couple de points du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le couple (x, y) est singulier;*

(2) $y \in \lim^{+} x$*;*

(3) $x \in \lim^{-} y$*.*

La preuve de ce lemme est immédiate. Une remarque en passant: on déduit du Lemme 5.1 que les ensembles-limite définis pour les homéomorphismes h et h^n (n entier non nul) coïncident; le Lemme 5.6 montre alors que h et h^n ont les mêmes ensembles singuliers.

Définition 5.7 Comme dans le cas des disques, on définit les ensembles suivants.

- $U(z)$ est la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus (\lim^{+} z \cup \lim^{-} z)$ contenant z;
- $U^{-}(z)$ est l'union des composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(U(z))$ dont la frontière rencontre $\lim^{-} z$;
- $U^{+}(z)$ est l'union de celles dont la frontière rencontre $\lim^{+} z$.

Lemme 5.8 (Partition associée à un point) *Soit z un point du plan. On a une partition du plan*

$$\mathbb{R}^2 = U^{-}(z) \sqcup \lim{}^{-} z \sqcup U(z) \sqcup \lim{}^{+} z \sqcup U^{+}(z),$$

où chacun de ces ensembles est invariant par h. De plus, $\partial U(z) = \lim^{+} z \cup \lim^{-} z$, $\partial U^{-}(z) \subset \lim^{-} z$, $\partial U^{+}(z) \subset \lim^{+} z$.

Lemme 5.9 (Liens point/disques) *On a*

$$U(z) = \bigcup \{U(D)\}$$
$$U^{+}(z) = \bigcap \{U^{+}(D)\}$$
$$U^{-}(z) = \bigcap \{U^{-}(D)\}$$

où les unions et intersections ont lieu sur tous les disques topologiques fermés libres D dont l'intérieur contient z.

5.5 Preuves

Preuve du Lemme 5.1 Soit D un disque topologique fermé libre. Notons S et I les *limites supérieures et inférieures* de la suite $(h^n(D))_{n\geq 0}$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall V \text{ voisinage de } x, \forall n_0 \geq 0, \exists n \geq n_0 \text{ tel que } h^n(D) \cap V \neq \emptyset\}$$
$$I = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall V \text{ voisinage de } x, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, h^n(D) \cap V \neq \emptyset\}$$

Prouver la convergence revient à montrer que $S = I$. Bien sûr, $I \subset S$; montrons l'inclusion réciproque. Soit x un point de S, et V un disque fermé libre voisinage de x. Soit n_0 un entier tel que $h^{n_0}(D) \cap \mathrm{Int}(V) \neq \emptyset$ (et donc aussi $h^{n_0}(\mathrm{Int}(D)) \cap \mathrm{Int}(V) \neq \emptyset$). D'après le lemme de Franks (dans la version du Lemme 2.5), l'ensemble des entiers n tels que $h^n(\mathrm{Int}(D))$ rencontre $\mathrm{Int}(V)$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$; mais il contient n_0 et une infinité d'entiers supérieurs à n_0 (par définition de S), donc il contient tous les entiers supérieurs à n_0. Autrement dit, x est un point de I. □

Preuve de l'Affirmation 5.2 Comme D est fermé et libre, on peut trouver un autre disque topologique fermé libre V qui contient D dans son intérieur (en utilisant le théorème de Schoenflies). D'après le Corollaire 2.8 sur les disques libres, ce disque V est disjoint de tous les itérés $h^n(\mathrm{Int}(V))$ pour $n \neq 0$, donc aussi des itérés $h^n(D)$. Par suite, les ensembles $\lim^+ D$ et $\lim^- D$ ne rencontrent pas l'intérieur de V, et sont donc disjoints de D.

On en déduit que tout point x de $\lim^+(D)$ possède un voisinage V' disque topologique fermé libre disjoint de D, et un raisonnement analogue montre que l'ensemble $\lim^-(D)$ ne rencontre pas V'. Par conséquent, les ensembles $\lim^+(D)$ et $\lim^-(D)$ sont disjoints. □

Preuve du Lemme 5.4 On se donne un disque topologique fermé libre D.

Invariance Il est clair que les ensembles $\lim^+ D$ et $\lim^- D$ sont invariants par h. Montrons qu'il en est de même pour l'ouvert $U(D)$. En tant que composante connexe d'un ensemble invariant, il est invariant ou libre. D'après le Lemme 2.4 (compacts connexes libres), il existe un domaine de translation Δ contenant D. Comme h est conjugué à une translation sur Δ, les ensembles $\lim^+ D$ et $\lim^- D$ sont disjoints de Δ. Puisque Δ est connexe, on en déduit qu'il est inclus dans $U(D)$. D'autre part Δ est invariant par h, ce qui prouve que $U(D)$ n'est pas libre, donc est invariant. On en déduit immédiatement l'invariance des ensembles $U^+(D)$ et $U^-(D)$.

Frontière La frontière de l'ensemble $U(D)$ est incluse dans $\lim^+ D \cup \lim^- D$: ceci suit d'un résultat de topologie générale (Proposition A.1 de l'Appendice A). Puisque l'ensemble $U(D)$ est invariant, il contient tous les itérés de D, ce qui entraîne l'inclusion des deux ensembles $\lim^+ D$ et $\lim^- D$ dans $\mathrm{Adh}(U(D))$. Par ailleurs, par définition, $U(D)$ est disjoint de $\lim^+ D$ et $\lim^- D$; donc la frontière de $U(D)$ contient ces deux ensembles. On en déduit l'égalité $\partial U(D) = \lim{}^+ D \cup \lim{}^- D$.

Partition D'après la Proposition A.1, la frontière de toute composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(U(D))$ est non vide et contenue dans $\partial U(D) = \lim{}^+ D \cup \lim{}^- D$. Par conséquent, la définition des ensembles $U^+(D)$ et $U^-(D)$ implique que leur union recouvre le complémentaire de $\mathrm{Adh}(U(D))$. D'après le paragraphe sur la frontière, $\mathrm{Adh}(U(D)) = U(D) \cup \lim^+ D \cup \lim^- D$, et par conséquent les cinq ensembles considérés recouvrent le plan. Il reste à voir que ces cinq ensembles sont disjoints deux à deux. On a

- $U(D) \cap \lim^+ D = \emptyset$, par définition de $U(D)$;
- $U(D) \cap U^+(D) = \emptyset$, par définition de $U^+(D)$;
- de même, $U(D) \cap \lim^- D = \emptyset$ et $U(D) \cap U^-(D) = \emptyset$;
- les ensembles $U^+(D)$ et $U^-(D)$ sont chacun disjoints des ensembles $\lim^+(D)$ et $\lim^-(D)$, d'après l'égalité $\partial U(D) = \lim{}^+ D \cup \lim{}^- D$;
- $\lim^+ D \cap \lim^- D = \emptyset$, d'après l'Affirmation 5.2.

Il reste à voir que $U^+(D)$ et $U^-(D)$ sont disjoints. Soit C une composante connexe du complémentaire de $\mathrm{Adh}(U(D))$; il s'agit de voir que la frontière de C ne peut pas rencontrer à la fois $\lim^- D$ et $\lim^+ D$. D'après le Théorème A.4 de l'appendice, ∂C est connexe; et d'après la Proposition A.1, ∂C est inclus dans $\partial\, \mathrm{Adh}(U(D))$, c'est-à-dire dans $\lim^- D \cup \lim^+ D$. Comme les deux ensembles $\lim^- D$ et $\lim^+ D$ sont des fermés disjoints, ∂C est entièrement inclus dans l'un d'eux, ce que l'on voulait. □

Preuve de la Proposition 5.5 On se donne un disque topologique fermé libre D.

Cas simple Commençons par montrer que *tout arc* α, libre, *joignant un point de* $h^{n_0}(D)$ *à un point de* $\lim^+ D$, *doit rencontrer tous les itérés* $h^n(D)$ *pour* $n \geq n_0$. Supposons le contraire. En utilisant le théorème de Schoenflies, on construit alors un disque topologique fermé D', libre, contenant α dans son intérieur, disjoint d'au moins un itéré $h^n(D)$ pour $n > n_0$. Par définition de l'ensemble $\lim^+ D$, l'intérieur du disque D' rencontre des itérés $h^{n'}(D)$ pour $n' > n$; d'autre part, il rencontre aussi $h^{n_0}(D)$. L'ensemble des entiers k tels que $h^k(D)$ rencontre $\mathrm{Int}(D')$ n'est pas un intervalle, ce qui contredit le lemme de Franks (2.5). On a bien sûr un énoncé équivalent pour $\lim^- D$.

Type des points voisins Pour tout point x du plan, on note $B_r^{\mathrm{eucl}}(x)$ le disque ouvert de centre x et de rayon r pour la distance euclidienne sur le plan. On pose alors

$$\phi(x) = \sup\{r : B_r^{\mathrm{eucl}}(x) \text{ est libre}\}.$$

La fonction ϕ est strictement positive et continue sur le plan, et pour tout x, le disque euclidien ouvert $B_{\phi(x)}^{\mathrm{eucl}}(x)$ est libre. On pose alors

$$V = \{x \in U(D) : B_{\phi(x)}^{\mathrm{eucl}}(x) \cap \partial U(D) \neq \emptyset\}.$$

Cet ensemble est appelé *ensemble des points voisins de* $\partial U(D)$. Il s'agit d'un ensemble ouvert, et $V \cup \partial U(D)$ est un voisinage de $\partial U(D)$ dans $\mathrm{Adh}(U(D))$.

Soit x un point de V. On considère un arc α joignant x à un point de $\partial U(D)$, inclus dans $B_{\phi(x)}^{\mathrm{eucl}}(x)$ et d'intérieur inclus dans $U(D)$ (la définition de V permet de trouver un tel arc). On dira que x est *de type* D si α rencontre un itéré de D, *de type* $\partial U(D)$ sinon (cf Figure 13). L'intérêt de cette définition est qu'elle ne dépend pas du choix de α. En effet, soit α' un autre arc comme ci-dessus, et supposons que α rencontre un itéré de D tandis que α' n'en rencontre pas (cf Figure 14). Alors $\alpha \cup \alpha'$ est libre, et contient un arc β rencontrant $\partial U(D)$ et un unique itéré de D. L'existence de β contredit le "cas simple" étudié au début de cette démonstration. Nous allons voir qu'en réalité, tous les points voisins sont de type D.

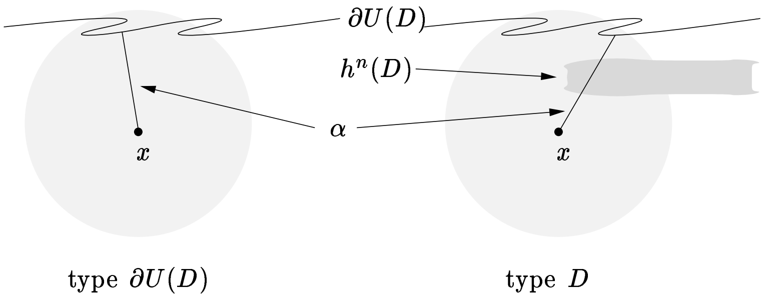

Figure 13: Type des points voisins

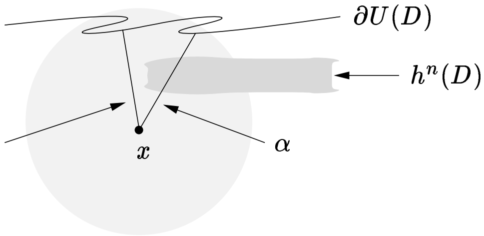

Figure 14: Le type est bien défini

On voit facilement que le type des points de V est localement constant, donc constant sur les composantes connexes de V. En particulier, si une composante connexe de V rencontre un itéré de D, alors tous les points de cette composante connexe sont de type D.

Topologie plane Soit maintenant α un arc vérifiant les hypothèses de la Proposition 5.5, c'est-à-dire joignant un point de $U(D)$ à un point de $\partial U(D)$. Quitte à raccourcir α, on peut supposer que l'intérieur de α est inclus dans $U(D)$; on appelle alors z l'extrémité de α sur $\partial U(D)$. On applique l'affirmation suivante (dont la preuve est donnée plus bas).

Affirmation 5.10 *Pour tout point z de $\partial U(D)$, il existe une composante connexe V' de V telle que $V' \cup \{z\}$ est un voisinage de z dans $U(D) \cup \{z\}$.*

Puisque z appartient à $\lim^+ D \cup \lim^- D$, et que les itérés de D sont dans $U(D)$ (Lemme 5.4), il existe un itéré de D qui rencontre V'. Par conséquent, les points de V' sont tous de type D. D'autre part, quitte à raccourcir α, on peut supposer que l'extrémité x de α dans $U(D)$ est un point de V', et que α est inclus dans le disque $B^{\mathrm{eucl}}_{\phi(x)}(x)$. Le point x est de type D, donc l'arc α rencontre un itéré de D, ce que l'on voulait. $\square$

Preuve de l'Affirmation 5.10 Il s'agit seulement de considérations de topologie plane. On pose $W = V \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U(D))$; c'est une partie ouverte du plan, contenant $\partial U(D)$, et dont la frontière est incluse dans $U(D)$. Soit W' la composante connexe de W contenant z; c'est un ensemble ouvert et connexe. Soit $V' = W' \cap U(D)$: c'est un ensemble inclus dans V, et $V' \cup \{z\}$ est un voisinage de z dans $U(D) \cup \{z\}$. Pour prouver l'affirmation, il suffit donc de montrer que V' est connexe.

Ceci va découler du lemme d'Alexander (Théorème A.3 de l'appendice). On appelle U_1 la réunion de $U(D)$ et de toutes les composantes connexes de W

distinctes de W'. C'est un ensemble ouvert, et comme toute composante connexe de W rencontre $U(D)$ (Proposition A.1) qui est connexe, c'est un ensemble connexe. L'ensemble $U_2 = W'$ est également un ouvert connexe, et $U_1 \cup U_2 = U(D) \cup W = \mathbb{R}^2$. Le lemme d'Alexander affirme alors que l'intersection $U_1 \cap U_2$ est connexe, et cette intersection n'est autre que l'ensemble V'. □

Preuve du Lemme 5.8 Dans toute la preuve, D désigne un disque topologique fermé libre dont l'intérieur contient z.

Par définition, $\lim^+ D$ contient $\lim^+ z$, donc l'ouvert connexe $U(D)$ est disjoint de $\lim^+ z$ (et de même il est disjoint de $\lim^- z$), on en déduit l'inclusion $U(D) \subset U(z)$. Il s'ensuit que

$$\lim{}^+ z \subset \lim{}^+ D \subset \mathrm{Adh}(U(D)) \subset \mathrm{Adh}(U(z)).$$

Il est clair que les ensembles $\lim^+ z$ et $\lim^- z$ sont invariants par h. Puisque l'ensemble $U(D)$ est invariant et inclus dans l'ensemble $U(z)$, celui-ci est aussi invariant. On en déduit l'invariance de $U^+(z)$ et $U^-(z)$.

D'après la Proposition A.1 et la définition de $U(z)$, on a $\partial U(z) \subset \lim^+ z \cup \lim^- z$. D'autre part, l'inclusion $\lim^+ z \subset \mathrm{Adh}(U(z))$ a été montrée dans le paragraphe préliminaire; on a bien sûr l'inclusion analogue pour les limites négatives. L'égalité $\partial U(z) = \lim^+ z \cup \lim^- z$ s'ensuit.

Si U est une composante connexe du complémentaire de $\mathrm{Adh}(U(z))$, on montre à l'aide de la Proposition A.1 et du Théorème A.4 que la frontière de U est incluse dans l'un des deux ensembles $\lim^- z$ et $\lim +z$ (exactement comme dans l'argument final de la preuve du Lemme 5.4). Ceci permet de voir que $\partial U^-(z) \subset \lim^- z$ et $\partial U^+(z) \subset \lim^+ z$.

De manière tout à fait analogue au cas des disques (Lemme 5.4), on montre que les cinq ensembles recouvrent le plan, puis qu'ils sont deux à deux disjoints. □

Preuve du Lemme 5.9 Ici encore, D désigne un disque topologique fermé libre dont l'intérieur contient z. Montrons la première des trois égalités. Soit $(D_k)_{k\geq 0}$ une suite décroissante de disques topologiques fermés libres, dont les intérieurs contiennent z, et dont l'intersection est réduite à $\{z\}$. Il est clair que l'application $D \mapsto \lim^+ D$ est croissante (par rapport à l'inclusion). D'après la définition de $U(D)$, l'application $D \mapsto U(D)$ est alors décroissante. On en déduit que

$$\lim{}^+ z = \bigcap_{k\geq 0} \lim{}^+ D_k \quad \text{et que} \quad \bigcup\{U(D)\} = \bigcup_{k\geq 0}\{U(D_k)\}.$$

Soit maintenant un point y dans $U(z)$, c'est-à-dire tel que $\lim^+ z \cup \lim^- z$ ne sépare pas y et z. Il existe alors un arc γ joignant y à z dans le complémentaire de $\lim^+ z \cup \lim^- z$; puisque l'intersection des compacts $\cap_k \{(\lim^+ D_k \cup \lim^- D_k) \cap \gamma, k \geq 0\}$ est vide, c'est qu'il existe un disque D_k tel que $(\lim^+ D_k \cup \lim^- D_k) \cap \gamma$ est vide. On en déduit que γ est entièrement inclus dans $U(D_k)$. Ceci prouve l'inclusion $U(z) \subset \cup\{U(D_k), k \geq 0\}$. L'inclusion réciproque vient de la propriété $U(D) \subset U(z)$ vue dans le paragraphe préliminaire de la preuve du Lemme 5.8.

Montrons maintenant que $U^+(z) \subset \cap\{U^+(D)\}$. Pour cela, on considère une composante connexe U de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(U(z))$ dont l'adhérence rencontre $\lim^+ z$. Pour tout D, l'ensemble $\lim^+ D$ contient $\lim^+ z$, il rencontre donc l'adhérence de U ; mais par ailleurs l'ensemble $\mathrm{Adh}(U(D))$ est inclus dans $\mathrm{Adh}(U(z))$ (voir le paragraphe préliminaire de la preuve précédente), il est donc disjoint de U. Ceci prouve que U est inclus dans $U^+(D)$, ce que l'on cherchait. De la même manière, on obtient l'inclusion $U^-(z) \subset \cap\{U^-(D)\}$.

Montrons les inclusions réciproques. Soit y un point de $\cap\{U^+(D)\}$. Ce point n'est dans aucun des ensembles $U(D)$, donc n'appartient pas à $U(z)$ (d'après la première égalité). De même, y n'appartient pas à $\lim^+(z)$ ni à $\lim^-(z)$. De même, puisque $U^-(z) \subset \cap\{U^-(D)\}$, y n'est pas dans $U^-(z)$. D'après le Lemme 5.8, y appartient à $U^+(z)$. Ceci prouve que $\cap\{U^+(D)\} \subset U^+(z)$. L'inclusion pour les ensembles négatifs est analogue. □

6 Preuve du Théorème A: existence des composantes de Reeb

Dans cette partie, nous utilisons les résultats de la section précédente pour démontrer le Théorème A-bis. Malheureusement, l'auteur n'a pas réussi à trouver une preuve qui ne brise pas la symétrie des rôles de x et de y. Il s'en excuse auprès du lecteur, et incite celui-ci à chercher une preuve symétrique! Pour montrer que les couples $(F_{d-i}(y,x), F_i(x,y))$ sont des composantes de Reeb, la vraie difficulté consistera à montrer que le produit de ces deux ensembles est singulier. En effet, la définition de l'ensemble singulier entraînera ensuite que les deux ensembles sont disjoints; on en déduira facilement que les propriétés de séparation (2 et 3) de la définition des composantes de Reeb sont satisfaites.

Essayons de donner une idée de la preuve du Théorème A-bis. Pour cela, imaginons un point mobile z qui s'éloigne d'un point x immobile; le point z sort successivement des h–boules de centre x et de rayon 1, 2, 3, *etc.*. Dans la première étape, nous montrons qu'au moment où la distance de translation de z à x augmente d'une unité (autrement dit si z est sur la frontière d'une h-boule de centre x), ou bien l'union des deux ensembles-limite de z contient x, ou bien elle sépare x de z (Affirmation 6.1).

Pour simplifier, oublions la première des deux possibilités, et plaons-nous dans le cas (générique) où l'ensemble $\lim^- z \cup \lim^+ z$ sépare x de z. Notons $O_x(z)$ la composante connexe du complémentaire de $\lim^- z \cup \lim^+ z$ qui contient x (Figure 15). La frontière de $O_x(z)$ rencontre un et un seul des deux ensembles-limite de z, et on dira selon les cas que z est de type positif ou négatif par rapport à x. La deuxième étape de la preuve consiste à montrer que ce que l'on vient de faire est "localement constant". De manière un peu plus précise, considérons un autre point mobile z' qui s'éloigne également de x; on montre que si z et z' sortent tous deux d'une même h-boule de centre x, et qu'ils sont assez proches l'un de l'autre ($d_h(z,z') \leq 1$), alors leur type par rapport à x est le même. Mieux: les ensembles $O_x(z)$ et $O_x(z')$ coïncident (Affirmation 6.2).

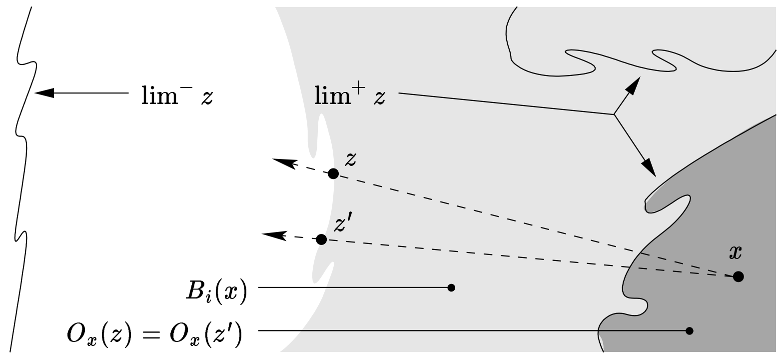

Figure 15: Existence des composantes de Reeb: idée de la preuve

Pour la troisième étape, on se donne deux point x et y, et on considère l'un des ensembles $F_i(x,y)$ candidats à former les bords des composantes de Reeb. Cet ensemble est inclus dans la frontière d'une h-boule de centre x, on peut donc appliquer le résultat de la première étape; de plus, il est connexe, et l'invariance locale obtenue à la deuxième étape entraîne que tous les points z de $F_i(x,y)$ ont le même type par rapport à x, et définissent le même ensemble $O_x(z)$. On considère alors l'ensemble F frontière de $O_x(z)$, et on montre que le couple $(F, F_i(x,y))$ forme une composante de Reeb (Affirmation 6.3).

Indépendamment de tout ce qui précède, on vérifie dans la quatrième étape que toute composante de Reeb pour (x,y) "contient" l'un des couples $(F_{d-i}(y,x), F_i(x,y))$ (Affirmation 6.4). On en déduira d'abord que l'ensemble F de la troisième étape contient $F_{d-i}(y,x)$, et donc que les couples $(F_{d-i}(y,x), F_i(x,y))$ sont bien des composantes de Reeb (on retrouve ainsi la symétrie perdue). On en déduira ensuite qu'il n'existe pas d'autre composante minimale.

6.1 Énoncés des étapes de la preuve

On donne ici les énoncés précis des différentes étapes. Les preuves sont fournies plus bas. La première affirmation est une conséquence des résultats sur la disposition des itérés d'un disque, et surtout du lemme de non-accessibilité.

Affirmation 6.1 *Soient x et z deux points du plan. Si z est sur la frontière d'une h–boule de centre x, alors $x \notin U(z)$.*[8]

Soient $x \in \mathbb{R}^2$, $i \geq 1$, $z \in \partial B_i(x)$. D'après l'affirmation précédente et la partition du plan donnée par le Lemme 5.8, une et une seule des quatre possibilités suivantes est vérifiée:

$$x \in U^-(z), \quad x \in \lim{}^- z, \quad x \in \lim{}^+ z, \quad x \in U^+(z)$$

Selon les cas, on dira que z est *de type U^-, $\lim^-$, $\lim^+$ ou U^+ par rapport à x*. Si z est de type U^- ou U^+, on notera $O_x(z)$ la composante connexe de $U^-(z)$ ou de $U^+(z)$ qui contient x. Les liens entre la partition associée à un point et celle associée à un disque libre le contenant vont nous permettre de montrer la deuxième affirmation.

Affirmation 6.2 (Invariance locale du type) *Soient x un point du plan, $i \geq 1$, et z et z' deux points de $\partial B_i(x)$. On suppose que $d_h(z,z') \leq 1$. Alors*

- *z et z' sont du même type par rapport à x;*
- *si ce type commun est U^+ ou U^-, on a $O_x(z) = O_x(z')$.*

L'invariance locale du type et la connexité des ensembles $F_i(x,y)$ vont entraîner la troisième affirmation.

Affirmation 6.3 (Existence des composantes) *Soient x et y deux points du plan, et $1 \leq i \leq d_h(x,y) - 1$. Il existe alors une partie F du plan telle que le couple $(F, F_i(x,y))$ est une composante de Reeb pour (x,y).*

[8] On pourrait également prouver la réciproque.

La quatrième affirmation, elle, est indépendante des trois premières. Elle résultera surtout des propriétés de la distance de translation (inégalité triangulaire et existence d'arcs géodésiques).

Affirmation 6.4 (Unicité des composantes) *Soient x et y deux points du plan, et $d = d_h(x,y)$. Soit (F,G) une composante de Reeb pour (x,y). Alors il existe un entier i, $1 \leq i \leq d-1$, tel que*

$$F_{d-i}(y,x) \subset F \subset \partial B_{d-i}(y) \text{ et } F_i(x,y) \subset G \subset \partial B_i(x).$$

Dans le cas non dégénéré, l'entier i sera égal à la distance de translation entre le point x et l'ensemble F.

6.2 Première étape: lien entre partition et distance de translation

Preuve de l'Affirmation 6.1 Puisque, d'après le Lemme 5.9, $U(z)$ est l'union des ensembles $U(D)$ pour les disques topologiques fermés libres D dont l'intérieur contient z, il suffit de prouver que si D est un tel disque, $x \notin U(D)$. On raisonne par l'absurde: *on suppose que $x \in U(D)$ pour un tel disque D, et on va montrer que tous les points de D sont à la même h-distance de x*, ce qui contredira le fait que $z \in \partial B_i(x)$.

Puisque D est libre, tout point de D est à h-distance 1 de tout autre point de D, donc aussi de tout point d'un itéré de D (invariance par h de la distance d_h, Lemme 3.7). Le résultat est donc vrai si x appartient à un itéré de D. On suppose maintenant que x n'appartient à aucun itéré de D. Soit y un point de D; on va montrer que *pour tout point y' de D, on a $d_h(x,y') \leq d_h(x,y)$*. Par symétrie des rôles de y et y', ceci conclura la preuve en montrant que tous les points de D sont à même h-distance de x. Pour montrer cette inégalité, on considère un arc géodésique γ de x à y (Figure 16). Soit p le premier point rencontré, en parcourant γ depuis l'extrémité x, sur le fermé

$$\mathrm{Adh}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} h^n(D)\right) = \lim{}^{-}(D) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} h^n(D) \cup \lim{}^{+}(D).$$

Comme on a supposé que x appartient à $U(D)$, d'après la proposition de non-accessibilité (5.5), le point p appartient en fait à un itéré de D. Remarquons que p est différent de x. Soit n_0 tel que $p \in h^{n_0}(D)$. On se donne une décomposition minimale de γ, et on note s le dernier sommet de cette décomposition situé strictement avant p lorsqu'on parcourt γ en partant du point x; on a donc:

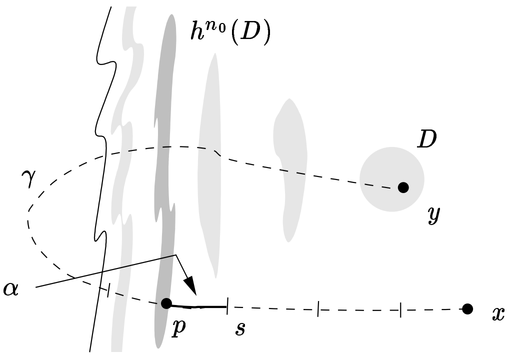

Figure 16: Calculs de distance

- $d_h(x,s) \leq d_h(x,y) - 1$;
- l'arc $\alpha = [sp]_\gamma$ est libre.

D'autre part $h^{n_0}(D)$ est libre, et α ne rencontre aucun autre itéré de D (par définition de p). On en déduit que l'ensemble $\alpha \cup h^{n_0}(D)$ est encore libre. Soit y' un point quelconque de $h^{n_0}(D)$; il existe un arc β reliant s à y' et inclus dans $\alpha \cup h^{n_0}(D)$; en particulier, β est libre. D'après l'Affirmation 3.4, on a $d_h(s,y') = 1$. Par invariance de la h–distance, ceci est encore vrai si y' est un point quelconque de D (Lemme 3.7). Un point y' de D vérifie donc

$$\begin{aligned} d_h(x,y') &\leq d_h(x,s) + d_h(s,y') \\ &\leq d_h(x,y) - 1 + 1 \\ &\leq d_h(x,y). \end{aligned}$$

Ce que l'on voulait. □

6.3 Deuxième étape: invariance locale du x–type

Preuve de l'Affirmation 6.2 On se place sous les hypothèses de l'affirmation. Puisque $d_h(z,z') \leq 1$, ou bien z et z' sont dans la même orbite de h, et la conclusion de l'affirmation est clairement satisfaite; ou bien il existe un arc libre joignant ces deux points, et (par épaississement), il existe aussi un disque topologique fermé libre D dont l'intérieur contient z et z'. Nous nous plaçons dans ce cas.

Supposons d'abord que z est de type U^+ par rapport à x, autrement dit que x appartient à $U^+(z)$. On va appliquer le Lemme 5.9 concernant les liens entre la partition associée au point z et celle associée au disque D. On a $O_x(z) \subset U^+(z) \subset U^+(D)$; or l'ensemble $U^+(D)$ est disjoint des ensembles $U^-(D)$, $\lim^+ D$ et $\lim^- D$, qui contiennent respectivement $U^-(z')$, $\lim^+ z'$ et $\lim^- z'$, par conséquent l'ensemble $O_x(z)$ est disjoint de ces trois ensembles. D'autre part, l'ensemble $O_x(z)$ contient le point x qui n'appartient pas à $U(z')$ (Affirmation 6.1), et $\partial U(z') = (\lim^+ z') \cup (\lim^- z')$ (Lemme 5.8): puisque $O_x(z)$ est un ensemble connexe, qui contient un point hors de $U(z')$ et qui ne rencontre pas $\partial U(z')$, il est disjoint de $U(z')$. On déduit de tout ceci l'inclusion $O_x(z) \subset U^+(z')$. Une première conséquence est que $x \in U^+(z')$, donc z' est bien du même type que z par rapport à x. Ensuite, comme $O_x(z')$ est la composante connexe de $U^+(z')$ contenant x, et que $O_x(z)$ est connexe, on a $O_x(z) \subset O_x(z')$. Par symétrie des rôles de z et z', on a $O_x(z') = O_x(z)$.

Le cas où z est de type U^- se traite bien sûr en appliquant le cas U^+ à h^{-1}. D'autre part, en échangeant les rôles de z et z', on obtient

$$x \in U^+(z) \Leftrightarrow x \in U^+(z') \quad \text{et} \quad x \in U^-(z) \Leftrightarrow x \in U^-(z').$$

Considérons maintenant *le cas où z est de type* $\lim^+$; autrement dit, x appartient à $\lim^+(z)$. D'après ce qui précède, z' ne peut pas être de type U^- ou U^+. D'autre part, dans ce cas, x est dans $\lim^+(D)$, donc n'est pas dans $\lim^-(D)$, qui contient $\lim^-(z')$: par conséquent z' n'est pas de type $\lim^-$, donc z' est de type $\lim^+$. *Le cas où z est de type* $\lim^-$ s'en déduit. □

6.4 Troisième étape: existence de composantes de Reeb

Preuve de l'Affirmation 6.3 Commençons par rappeler que, s'il n'est pas égal à $\{y\}$, l'ensemble $F_i(x,y)$ sépare x et y (Lemme 4.6).

L'ensemble $F_i(x,y)$ est inclus dans $\partial B_i(x)$, donc le type des point de $F_i(x,y)$ par rapport à x est bien défini (Affirmation 6.1). Puisque $F_i(x,y)$ est connexe (Lemme 4.6), et que ce type est localement constant (Affirmation 6.2), tous les points de $F_i(x,y)$ sont du même type par rapport à x.

Considérons le cas où tous les points de $F_i(x,y)$ sont de type $\lim^+$. Dans ce cas, pour tout z dans $F_i(x,y)$, le couple (z,x) est singulier. L'ensemble $F = \{x\}$ vérifie alors la conclusion de l'Affirmation 6.3.

On se place maintenant dans le cas où tous les points de $F_i(x,y)$ sont de type U^+. Par connexité et invariance locale, l'ensemble $O_x = O_x(z)$ ne dépend pas du point z de $F_i(x,y)$. On pose alors $F = \partial O_x$.

D'après la Proposition A.1, pour tout point z de $F_i(x,y)$, F est inclus dans $\partial U^+(z)$, qui est inclus dans $\lim^+ z$ (Lemme 5.8): autrement dit, $F_i(x,y) \times F \subset \mathrm{Sing}(h)$ (Lemme 5.6). D'autre part, on a déjà vu que $F_i(x,y)$ est connexe, et F est également connexe d'après le Théorème A.4 (car F est la frontière de $O_x(z)$, qui est une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(U(z))$, et $U(z)$ est un ouvert connexe). Il reste à prouver les propriétés de séparation de la définition des composantes de Reeb:

(1) $F_i(x,y)$, s'il n'est pas égal à $\{y\}$, sépare $F \cup \{x\}$ et y

(2) F sépare x et $F_i(x,y) \cup \{y\}$

On remarque tout d'abord que les ensembles F et $F_i(x,y)$ sont disjoints, puisque $F_i(x,y) \times F \subset \mathrm{Sing}(h)$.

Montrons alors le premier point. Pour chaque z de $F_i(x,y)$, z appartient à $U(z)$, qui est disjoint de $\mathrm{Adh}(U^+(z))$, qui contient $\mathrm{Adh}(O_x)$. Donc l'ensemble $F_i(x,y)$ est disjoint de $\mathrm{Adh}(O_x)$, or cet ensemble est connexe et contient x. Si $F_i(x,y)$ n'est pas égal à $\{y\}$, il sépare x et y, par conséquent il sépare aussi $\mathrm{Adh}(O_x)$ et y, et l'ensemble $F \cup \{x\}$ est inclus dans $\mathrm{Adh}(O_x)$. Ceci prouve le premier point.

Montrons le second point. Ce qui précède montre que $y \notin \mathrm{Adh}(O_x)$, et comme $x \in \mathrm{Adh}(O_x)$, l'ensemble $F = \partial O_x$ sépare x et y. Il reste à voir que $F_i(x,y)$ est inclus dans la composante connexe du complémentaire de F qui contient y, notée $O_y(F)$. Or dans le cas contraire, l'ensemble $O_y(F) \cup F$ est disjoint de $F_i(x,y)$, par ailleurs il est connexe (Proposition A.1), mais ceci contredit le fait que $F_i(x,y)$ sépare F et y (premier point).

Il découle de ces deux propriétés que le couple $(F, F_i(x,y))$ est une composante de Reeb pour (x,y). La proposition est donc prouvée dans les cas $\lim^+$ et U^+. Les cas $\lim^-$ et U^- s'en déduisent. □

6.5 Quatrième étape: composantes de Reeb minimales

Preuve de l'Affirmation 6.4 On définit (pour tout point z et toute partie E du plan)

$$d_h(z,E) = \min\{d_h(z,z') : z' \in E\}.$$

Cas non dégénéré *On se place d'abord dans le cas où la composante* (F,G) *est non dégénérée*: dans ce cas, F sépare x de $G \cup \{y\}$, et G sépare y de $F \cup \{x\}$. L'entier i sera défini comme $i = d_h(x,F)$. Nous allons prouver successivement:

(1) $F \subset \partial B_{d_h(y,G)}(y)$

(2) $F_{d_h(y,G)}(y,x) \subset F$

(3) $d_h(x,F) = d - d_h(y,G)$ (rappelons que $d = d_h(x,y)$)

Premier point Puisque la composante est non dégénérée, le point y n'appartient pas à G, et on a $d_h(y,G) \geq 1$. Soit z un point de G tel que $d_h(y,z) = d_h(y,G)$. L'ensemble $B_{d_h(y,G)}(y)$ est ouvert, c'est donc un voisinage de z; il est invariant par h. Si z' est un point quelconque de F, comme (F,G) est une composante de Reeb, l'un des deux couples (z,z') et (z',z) est singulier. La définition de l'ensemble singulier entraîne alors que z' appartient à $\mathrm{Adh}(B_{d_h(y,G)}(y))$.

Il reste à voir que F ne rencontre pas $B_{d_h(y,G)}(y)$. Pour cela on considère un arc géodésique γ joignant y à un point z' de F (cf Figure 17). Puisque G sépare F de y, l'arc γ rencontre G en un point z. Puisque $d_h(z,z') = 2$ (Lemme 4.2), toute décomposition de γ a un sommet entre z et z', on en déduit que $d_h(y,z') - 1 \geq d_h(y,z) \geq d_h(y,G)$. Par conséquent z' n'appartient pas à la h–boule $B_{d_h(y,G)}(y)$, ce que l'on voulait.

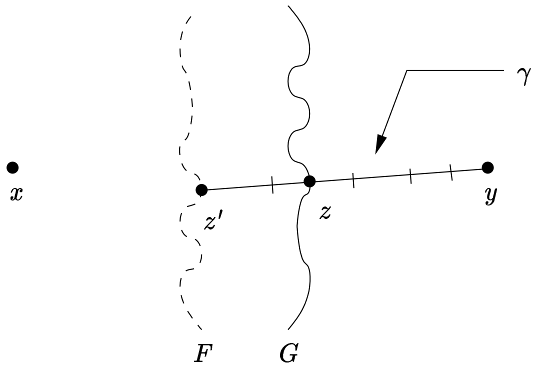

Figure 17: F n'est pas trop près de y

Deuxième point L'ensemble F sépare x et y, il est inclus dans $\partial B_{d_h(y,G)}(y)$, donc il contient $F_{d_h(y,G)}(y,x)$ d'après la propriété de minimalité de cet ensemble (Lemme 4.6).

Troisième point On prouve d'abord l'inégalité $d_h(x,F) \geq d - d_h(y,G)$. Soit z un point quelconque de F. Comme les h–boules sont ouvertes, tous les points z' assez proches de z vérifient $d_h(x,z') \leq d_h(x,z)$. Puisque $F \subset \partial B_{d_h(y,G)}(y)$, il existe un tel point z' vérifiant également $d_h(z',y) \leq d_h(y,G)$. On a alors

$$\begin{aligned} d_h(x,z) &\geq d_h(x,z') \\ &\geq d_h(x,y) - d_h(z',y) \\ &\geq d - d_h(y,G). \end{aligned}$$

Prouvons l'inégalité inverse. Soit $\gamma = [x_0x_1] * \cdots * [x_{d-1}x_d]$ une décomposition minimale d'un arc géodésique de $x = x_0$ à $y = x_d$. Comme F sépare x et y, l'arc γ rencontre F. Comme le sous-arc $[x_{d-d_h(y,G)}x_d]_\gamma$ est inclus dans $B_{d_h(y,G)}(y)$, ce sous-arc est disjoint de F (par le premier point), c'est donc que $[x_0x_{d-d_h(y,G)}]_\gamma$ rencontre F. Comme $[x_0x_{d-d_h(y,G)}]_\gamma \subset B_{d-d_h(y,G)}(x)$, on a bien $d_h(x,F) \leq d - d_h(y,G)$.

Fin de la preuve dans le cas non dégénéré On recopie maintenant la preuve des premier et deuxième points en échangeant les rôles de x et de y (et donc ceux de F et de G). On obtient ainsi que $F_{d_h(x,F)}(x,y) \subset G \subset \partial B_{d_h(x,F)}(x)$. Le troisième point montre alors que l'entier $i = d_h(x,F)$ convient. Ceci termine la preuve dans le cas non dégénéré.

Cas dégénéré *Il reste à traiter les cas où la composante (F,G) est dégénérée.* Dans le cas où G contient y et F contient x, le couple (x,y) est singulier pour h ou h^{-1}, et la preuve est très simple: on utilise le Lemme 4.2, et on voit que $d_h(x,y) = 2$, $F_1(y,x) = \{x\}$ et $F_1(x,y) = \{y\}$ (par définition).

Traitons rapidement le cas où G contient y et F ne contient pas x en suivant la même démarche que dans le cas non dégénéré. Le produit $\{y\} \times F$ est singulier pour h ou h^{-1}, donc $F \subset \partial B_1(y)$ (Lemme 4.2). Avec les mêmes arguments que dans la situation non dégénérée (deuxième et troisième points), on en déduit $F_1(y,x) \subset F$, puis $d_h(x,F) = d - 1$. On prouve ensuite que $G \subset \partial B_{d-1}(x)$ comme pour le premier point du cas non dégénéré. On en déduit que $F_{d-1}(x,y) = \{y\}$ par définition. Tout ceci prouve que l'entier $i = d - 1$ convient. Le cas où F contient x et G ne contient pas y est symétrique. □

6.6 Dernière étape: preuve du Théorème A-bis

Preuve du Théorème A-bis Soient x et y deux points du plan, et $d = d_h(x,y)$. Montrons tout d'abord que pour chaque entier j entre 1 et $d -$

1, $(F_{d-j}(y,x), F_j(x,y))$ est une composante de Reeb pour (x,y). D'après l'Affirmation 6.3, il existe un ensemble F tel que $(F, F_j(x,y))$ est une composante de Reeb pour (x,y). On applique alors l'Affirmation 6.4 à cette composante. L'entier i fourni par cette affirmation vérifie notamment $F_i(x,y) \subset F_j(x,y)$; il coïncide alors avec l'entier j, sans quoi ces deux ensembles seraient respectivement inclus dans les "h–sphères" $\partial B_i(x)$ et $\partial B_j(x)$, mais celles-ci sont sont disjointes si $i \neq j$. On a donc, d'après l'Affirmation 6.4, $F_{d-j}(y,x) \subset F$, par conséquent

$$F_{d-j}(y,x) \times F_j(x,y) \subset F \times F_j(x,y) \subset \mathrm{Sing}(h) \text{ ou } \mathrm{Sing}(h^{-1}).$$

Il reste à montrer les propriétés de séparation requises par la définition des composantes de Reeb. Or le couple $(F, F_j(x,y))$ vérifie ces propriétés (Affirmation 6.3), et comme $F_{d-j}(y,x) \subset F$, on voit facilement que le couple $(F_{d-j}(y,x), F_j(x,y))$ les vérifient également: notamment, $F_j(x,y)$ sépare y et $F_{d-j}(y,x) \cup \{x\}$, ce qui constitue la propriété 2 de la définition des composantes, et on en déduit la propriété 3 par symétrie des rôles de x et y.

On a montré que le couple $(F_{d-j}(y,x), F_j(x,y))$ est une composante de Reeb pour (x,y). La minimalité de cette composante de Reeb est évidente au vu du lemme topologique 4.6. L'Affirmation 6.4 montre maintenant qu'il n'y a pas plus de $d-1$ composantes de Reeb minimales pour (x,y), ce qui achève la démonstration du théorème. □

7 Géodésiques infinies et points Nord et Sud

Dans cette partie, nous montrons quelques propriétés simples des suites géodésiques infinies. Rappelons que celles-ci apparaissent naturellement dans l'étude de la dynamique locale (voir l'introduction). Dans la Section 7.1, on définit les géodésiques infinies et la relation d'équivalence "définir les mêmes bouts", et on déduit du Théorème A-bis que deux géodésiques infinies définissant les mêmes bouts induisent la même suite de composantes de Reeb et le même mot horizontal. Dans la Section 7.2, on associe à toute classe d'équivalence $[\Gamma]$ de géodésiques infinies une topologie sur le plan augmenté de deux points N et S, situés "à l'infini de part et d'autre de Γ"[9]. En un certain sens, les points N et S représentent aussi les "deux faons d'aller à l'infini" sous l'itération de h

[9]Dans la situation décrite en introduction où h est le relevé canoniquement associé à un point fixe x_0 d'un homéomorphisme de surface, il faut penser à N comme étant un "relevé" du point fixe x_0: notamment, la projection sur la surface d'une suite qui tend vers N tend vers x_0.

(relativement à $[\Gamma]$); ceci est précisé dans la Section 7.3. La Section 7.4 énonce une propriété qui restreint fortement les dynamiques possibles dans un bord de composante de Reeb: ou bien presque toute orbite va de N à S, ou bien presque toute orbite va de S à N.

7.1 Les géodésiques infinies et leurs bouts

Géodésiques infinies

Définition 7.1 Une *suite géodésique infinie* est un plongement isométrique de $\mathbb{Z}$ dans le plan muni de la distance d_h, autrement dit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de points du plan, telle que pour tous entiers k, k', on a

$$d_h(x_k, x_{k'}) = |k - k'|.$$

Une *droite géodésique* est une droite topologique orientée Γ, munie d'une décomposition

$$\Gamma = \cdots * \gamma_{-1} * \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots$$

où les sous-arcs γ_i sont libres, et dont les sommets forment une suite géodésique infinie (x_k). Les indices sont choisis dans le sens croissant de l'orientation de Γ.

Définition 7.2 Le *mot horizontal associé* à la suite géodésique infinie $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite $(M_{\leftrightarrow}(x_{k-1}, x_{k+1}))_{k\in\mathbb{Z}}$.

Définition 7.3 La *suite de composantes de Reeb associée* à la suite géodésique infinie $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite $(F_k, G_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, où (F_k, G_k) est l'unique composante de Reeb minimale pour le couple (x_{k-1}, x_{k+1}); autrement dit, avec les notations du Théorème A-bis, $(F_k, G_k) = (F_1(x_{k+1}, x_{k-1}), F_1(x_{k-1}, x_{k+1}))$.

On associe également à toute droite géodésique un mot horizontal et une suite de composantes, *via* la suite de ses sommets (la Proposition 7.7 ci-dessous va entraîner que ceci ne dépend pas de la décomposition choisie).

Remarque 7.4 Une composante de Reeb associée à une suite géodésique infinie n'est jamais dégénérée. En effet, supposons (pour fixer les idées) que la composante (F_0, G_0) est dégénérée, avec $x_1 \in G_0$. La définition des composantes de Reeb montre qu'alors $x_1 \in \partial B_1(x_{-1})$. Mais d'autre part $x_1 \in B_1(x_2)$, et les boules sont des ouverts du plan, par conséquent les boules $B_1(x_{-1})$ et $B_1(x_2)$ se rencontrent, et l'inégalité triangulaire donne $d_h(x_{-1}, x_2) \leq 2$, ce qui contredit le caractère géodésique.

Bouts

Définition 7.5 On dira que les suites géodésiques $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(x'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *définissent les mêmes bouts* s'il existe un entier p tel que pour tout entier k, $d_h(x_k, x'_k) \leq p$.[10]

Cette relation est clairement une relation d'équivalence. Elle induit une relation d'équivalence sur les droites géodésiques, *via* les suites géodésiques de sommets. On notera $[(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}]$ et $[\Gamma]$ les classes d'équivalences.

Remarque 7.6 Pour toute suite géodésique $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, il existe une droite géodésique Γ' dont les sommets forment une suite géodésique définissant les mêmes bouts que $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Montrons rapidement cette remarque. Il est clair qu'il existe une courbe Γ, qui passe successivement par tous les sommets de la suite géodésique donnée, telle que chaque sous-courbe $[x_k x_{k+1}]_\Gamma$ est un arc libre. En effaçant les boucles de Γ, on obtient une courbe Γ' sans point double (comme dans la preuve du Corollaire 3.5, cf Figure 6); cette courbe Γ' est naturellement décomposée en sous-arcs $[x'_k x'_{k+1}]_{\Gamma'} \subset [x_k x_{k+1}]_\Gamma$. En utilisant cette dernière inclusion et le caractère géodésique de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, on vérifie que la nouvelle suite $(x'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est encore une suite géodésique. Il reste à voir que Γ' est bien d'une droite topologique. Toute partie compacte du plan est incluse dans une boule $B_k(x'_0)$; comme la suite des sommets de Γ' est géodésique, seule une partie bornée de Γ' peut rester dans cette boule, ce qui montre que Γ' est proprement plongée dans le plan.

Le résultat principal concernant les bouts est le suivant.

Proposition 7.7 *Deux suites géodésiques infinies définissant les mêmes bouts ont les mêmes mots horizontaux et les mêmes suites de composantes de Reeb associées (à décalage d'indice près).*

Cet énoncé est avant tout une conséquence de "l'unicité" dans le Théorème A-bis. La fin de cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 7.7,

[10] Cette définition peut paraître un peu restrictive; en réalité, c'est simplement qu'elle est adaptée à notre espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_h)$, qui se trouve avoir une géométrie proche de celle d'un arbre. Par exemple, on pourrait montrer que si $\exists p$ tel que $\forall k$, $\exists k'$ tel que $d_h(x_k, x'_{k'}) \leq p$, alors la suite géodésique infinie (x'_k) définit les mêmes bouts que l'une des deux suites (x_k) et (x_{-k}). à l'opposé, on pourrait également montrer que les deux suites définissent les mêmes bouts si et seulement si $\exists k_0$ tel que $\forall k$, $d_h(x_k, x'_{k+k_0}) \leq 2$.

qui sera organisée comme suit. On remarque d'abord qu'une composante de Reeb pour un couple de points donné est encore une composante de Reeb pour beaucoup d'autres couples de points (Affirmation 7.8). Pour une suite géodésique (finie ou infinie), cette propriété se traduit par une compatibilité entre les composantes de Reeb associées aux différents couples de sommets (Lemme 7.9). Ceci permet de clarifier la topologie des composantes de Reeb associées aux suites géodésiques infinies et de leurs composantes complémentaires (Lemme 7.11). Nous en déduirons la proposition.

Si A est une partie du plan et x un point hors de A, nous noterons systématiquement $O_x(A)$ la composante connexe du complémentaire de A qui contient x. La preuve de l'affirmation suivante est laissée au lecteur.

Affirmation 7.8 *Soient x et y deux points du plan, et (F,G) une composante de Reeb pour (x,y), qui est non dégénérée: F ne contient pas x et G ne contient pas y. Si x' est un point de $O_x(F)$, et si y' est un point de $O_y(G)$, alors (F,G) est encore une composante de Reeb pour (x',y'). De plus, si (F,G) est minimale pour (x,y), elle est aussi minimale pour (x',y').*

Nous reprenons les notations de la Section 4.3 concernant les composantes de Reeb minimales.

Lemme 7.9 (Compatibilité des composantes) *Considérons une suite géodésique (finie) $(x=x_0,\dots,y=x_d)$, et i un entier entre 1 et $d-1$. Alors*

$$F_{d-i}(y,x)=F_1(x_{i+1},x_{i-1}) \text{ et } F_i(x,y)=F_1(x_{i-1},x_{i+1}).$$

On en déduit notamment que pour tous $0\leq i<j\leq d$, les composantes de Reeb minimales pour (x_i,x_j) sont des composantes de Reeb minimales pour (x_0,x_d).

Preuve du Lemme 7.9 *Supposons tout d'abord que* $1<i<d-1$. Dans ce cas, d'après les définitions, la composante $(F_{d-i}(y,x),F_i(x,y))$ pour (x,y) n'est pas dégénérée. L'ensemble $F_i(x,y)$ est inclus dans la frontière de la h–boule $B_i(x)$ (Lemme 4.6). L'inégalité triangulaire permet de voir que $F_i(x,y)$ ne rencontre pas la h–boule $B_{d-i-1}(y)$. Or cette h–boule est connexe, elle contient le point x_{i+1}, on en déduit que x_{i+1} est dans $O_y(F_i(x,y))$. De manière symétrique, on montre que x_{i-1} est dans $O_x(F_{d-i}(y,x))$. L'Affirmation 7.8 nous dit maintenant que $(F_{d-i}(y,x),F_i(x,y))$ est une composante de Reeb minimale pour le couple (x_{i-1},x_{i+1}). Or d'après le Théorème A, ce couple admet une unique composante de Reeb minimale, d'où les deux égalités.

Si $i = 1$ ou $d - 1$, il faut étudier à part les cas où la composante est dégénérée, ce qui ne pose pas de problème. Les détails sont laissés au lecteur. □

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite géodésique infinie, (F_k, G_k) la suite de composantes associées. Comme dans la preuve du lemme ci-dessus, l'inégalité triangulaire permet de voir que *tous les sommets x_k avec $k \leq -1$ appartiennent à la même composante connexe de* $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$; on la notera $O_-(F_0)$ (cf Figure 18). On voit également (par exemple à l'aide du lemme) que *tous les sommets x_k avec $k \geq 0$ appartiennent eux aussi à une même composante connexe de* $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$, que l'on notera $O_+(F_0)$. On définit de même des ensembles $O_-(F_k)$ et $O_+(F_k)$ pour tout entier k, et aussi des ensembles $O_-(G_k)$ et $O_+(G_k)$ (cf Figure 18).[11]

Définition 7.10 Les ouverts $O_-(F_k)$, $O_+(F_k)$, $O_-(G_k)$ et $O_+(G_k)$ sont appelés respectivement *ensembles complémentaires négatif et positif* de F_k et de G_k.

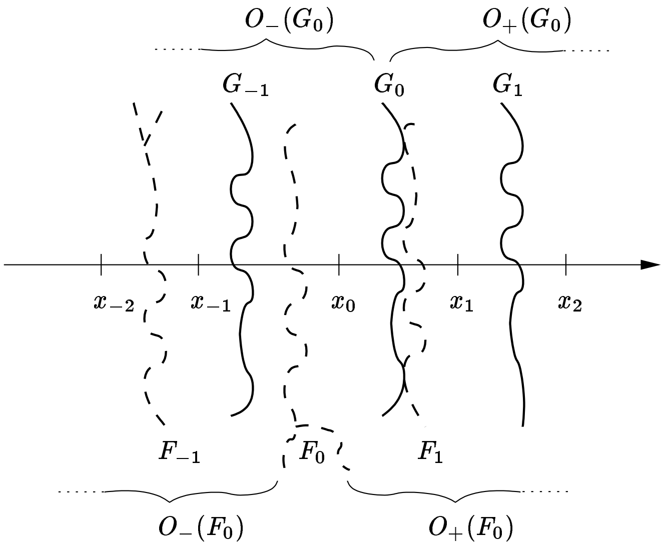

Figure 18: Composantes de Reeb associées à une droite géodésique infinie

Le lemme suivant décrit la disposition topologique des différents ensembles.

[11]Pour compléter la description, on pourrait également définir l'ouvert $O_k = O_+(F_k) \cap O_-(G_k)$. À l'aide du lemme d'Alexander (Théorème A.3), on peut voir que O_k est connexe, et qu'il s'agit de l'unique composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus (F_k \cup G_k)$ dont l'adhérence rencontre à la fois F_k et G_k.

Lemme 7.11 *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite géodésique infinie.*

(1) *Les deux ensembles complémentaires positif et négatif de F_k sont disjoints;*

(2) *on a $k<l \Leftrightarrow O_-(F_k) \not\subseteq O_-(F_l)$;*

(3) *les bords des composantes associées à (x_k) et leurs ensembles complémentaires sont tous invariants par h;*

(4) *les ensembles complémentaires de F_k ne dépendent que de la classe d'équivalence $[(x_k)]$.*

Bien sûr, on a des résultats symétriques sur les ensembles complémentaires de G_k.

Preuve du Lemme 7.11 Sans perte de généralité, on suppose que $k=0$.

Premier point La composante de Reeb $(F_0,G_0)=(F_1(x_1,x_{-1}),F_1(x_{-1},x_1))$ du couple (x_{-1},x_1) est non dégénérée (Remarque 7.4). Par suite F_0 sépare x_1 et x_{-1}, ce qui prouve le premier point, étant donnée la définition des ensembles complémentaires de F_0.

Deuxième point Soit $0<l$. D'après le premier point, l'ensemble F_l sépare x_{l-1} et x_l; Or l'ensemble $O_+(F_0)$ est connexe et contient ces deux points, c'est donc que F_l rencontre $O_+(F_0)$. D'autre part, d'après le Lemme 7.9, F_0 et F_l sont respectivement inclus dans les frontières des h–boules $B_{l+1}(x_{l+1})$ et $B_1(x_{l+1})$; les h–boules étant ouvertes, les frontières des boules de même centre et de rayon distincts sont disjointes, et par conséquent F_0 et F_l sont disjoints. On en déduit que F_l est entièrement inclus dans $O_+(F_0)$. D'après le premier point, F_l est disjoint de $O_-(F_0)$. Ce dernier ensemble est connexe, disjoint de F_l, et il contient x_{-1}, il est donc inclus dans $O_-(F_l)$. Mieux: comme $O_-(F_0)\cup F_0$ est connexe (Proposition A.1), F_0 est aussi inclus dans $O_-(F_l)$. Ceci montre que l'inclusion $O_-(F_0)\subset O_-(F_l)$ est stricte, et entraîne l'équivalence voulue.

Troisième point Le Lemme 7.9 montre que $F_0=F_1(x_1,x_{-2})$, on en déduit l'invariance de F_0 par le Lemme 4.7. Les ensembles complémentaires sont donc invariants ou libres. Mais d'après l'inégalité triangulaire, $O_-(F_0)$ contient par exemple la h–boule $B_1(x_{-2})$, qui est invariante. On en déduit que $O_-(F_0)$ est invariante; on montre de même que $O_+(F_0)$ l'est aussi.

Le dernier point sera prouvé en même temps que la Proposition 7.7 (sans raisonnement circulaire...). □

Preuve de la Proposition 7.7, et du dernier point du Lemme 7.11
Soient (x_k) et (x'_k) deux suites géodésiques infinies définissant les mêmes bouts, et p un entier tel que pour tout k, $d_h(x_k, x'_k) \leq p$. Nous commençons par prouver que *toute composante de Reeb associée à la suite (x_k) est aussi une composante de Reeb associée à la suite (x'_k)*. Il suffit bien sûr de prouver ceci pour la composante $(F_0, G_0) = (F_1(x_1, x_{-1}), F_1(x_{-1}, x_1))$.

Rappelons que (d'après la définition), l'ensemble F_0 est inclus dans la h–boule $B_2(x_1)$. D'après l'inégalité triangulaire, l'ouvert $O_-(F_0)$ contient donc la h–boule $B_p(x_{-k})$ pour tout $k \geq p+100$ (cf Figure 19); en particulier, il contient le point x'_{-k}. De même, l'ouvert $O_+(G_0)$ contient x'_k. D'après l'Affirmation 7.8, ceci force (F_0, G_0) à être une composante de Reeb minimale pour le couple (x'_{-k}, x'_k). On applique maintenant le Lemme 7.9 sur la compatibilité des composantes pour voir que (F_0, G_0) est une composante de Reeb associée à la suite (x'_k).

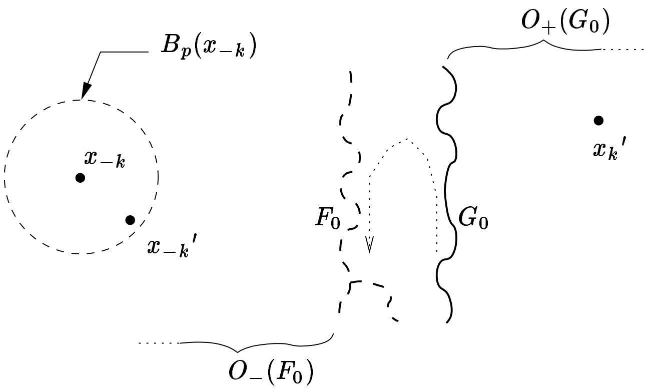

Figure 19: Toute composante de Reeb pour (x_k) est une composante de Reeb pour $(x_k{}')$

Par symétrie, on obtient que l'ensemble des composantes de Reeb associées à la suite (x_k) coïncide avec l'ensemble des composantes associées à (x'_k). Notons (F_k, G_k) et (F'_k, G'_k) les deux suites de composantes associées. Pour tout entier k, on définit alors $\phi(k)$ comme l'unique entier tel que $(F_k, G_k) = (F'_{\phi(k)}, G'_{\phi(k)})$; il reste à voir que l'application ϕ est un décalage (ie $\phi(k) = k + k_0$ pour un certain k_0). On a déjà vu que ϕ est surjective. Il suffit alors de montrer qu'elle est (strictement) croissante. On a déjà vu que $O_-(F_0)$ contient le point

x'_{-p-100}, on en déduit que $O_-(F_0) = O_-(F'_{\phi(0)})$; et plus généralement que tous les ensembles complémentaires associés à (x_k) et (x'_k) coïncident. Ceci prouve le dernier point du Lemme 7.11. D'autre part, le Lemme 7.11 caractérise le fait que $k < l$ par la propriété topologique $O_-(F_k) \subset O_-(F_l)$; en appliquant ceci successivement aux deux suites géodésiques, on obtient

$$\begin{aligned} k < l \quad &\Leftrightarrow \quad O_-(F_k) \not\subseteq O_-(F_l) \\ &\Leftrightarrow \quad O_-(F'_{\phi(k)}) \not\subseteq O_-(F'_{\phi(l)}) \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(k) < \phi(l). \end{aligned}$$

Ceci montre que ϕ est strictement croissante, et termine la preuve en ce qui concerne les composantes de Reeb généralisées. Puisque les mots horizontaux dépendent uniquement des composantes de Reeb (Théorème B-ter, Section 4.5), on en déduit que les suites géodésiques ont aussi le même mot horizontal. $\square$

7.2 Les points N et S

On se donne une droite géodésique Γ. On appelle $O_N(\Gamma)$ et $O_S(\Gamma)$ les deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, avec la convention que $O_N(\Gamma)$ est située à gauche de Γ quand on parcourt Γ dans le sens positif (cf Figure 20).

Soit F une partie fermée du plan telle que $F \cap \Gamma$ est compacte; on peut alors compactifier F en un espace $\widehat{F} = F \cup \{N, S\}$ de la manière suivante: on ajoute un point N par la compactification d'Alexandroff de $F \cap \mathrm{Adh}(O_N(\Gamma))$, et un point S par la compactification d'Alexandroff de $F \cap \mathrm{Adh}(O_S(\Gamma))$.[12]

Définition 7.12 L'espace topologique $\widehat{F} = F \cup \{N, S\}$ est appelé *compactification Nord-Sud de F (associée à Γ).*

Précisons immédiatement qu'en général cette topologie dépend de Γ (et pas seulement de $[\Gamma]$), voir la remarque à la fin de cette partie.

Compactification des boules

Soit F une partie du plan. Supposons que l'intersection $F \cap \Gamma$ soit non vide et d'adhérence compacte.

[12] Autrement dit, par exemple, une base de voisinages de N est formée des ensembles $(O_N(\Gamma) \setminus K) \cap F$ où K décrit l'ensemble des compacts du plan.

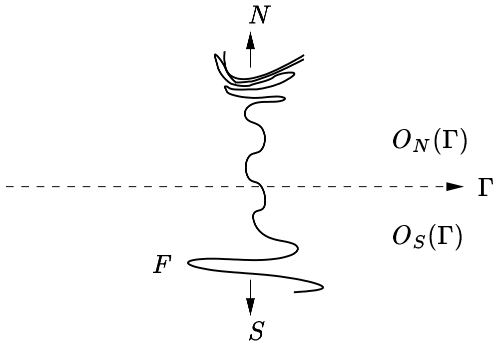

Figure 20: Compactification Nord-Sud

Définition 7.13 On dira alors que F *sépare les deux bouts de* Γ si F sépare les deux composantes connexes non bornées de $\Gamma \setminus F$.[13]

Par exemple, le premier point du Lemme 7.11 montre que chaque bord de composante de Reeb associée à Γ sépare les deux bouts de Γ. Soit y un point du plan. Pour tout entier positif d, l'intersection de la boule $B_d(y)$ avec la géodésique Γ est incluse dans une partie compacte de Γ. Soit (x_k) la suite des sommets de la décomposition de Γ; alors l'ensemble $\mathrm{Adh}(B_1(x_1))$ sépare les deux bouts de Γ, puisqu'il contient le bord F_0 d'une composante de Reeb associée. Si on choisit d assez grand pour que $B_d(y)$ contienne la boule $B_1(x_0)$, alors l'adhérence de la boule $B_d(y)$ sépare les deux bouts de Γ.

Affirmation 7.14 *Soit $B_d(y)$ une boule du plan séparant les deux bouts de Γ. Alors la topologie obtenue sur l'ensemble $\widehat{\mathrm{Adh}}(B_d(y)) = \mathrm{Adh}(B_d(y)) \cup \{N, S\}$ par la compactification Nord-Sud associée à Γ ne dépend que de $[\Gamma]$.*

Preuve de l'Affirmation 7.14 Notons O_- et O_+ les composantes connexes du complémentaire de $\mathrm{Adh}(B_d(y))$ qui contiennent les parties non bornées respectivement négative et positive de Γ. On définit de même les ensembles O'_- et O'_+ comme les composantes connexes du complémentaire de $\mathrm{Adh}(B_{d+1}(y))$ qui contiennent les parties non bornées de Γ. On montre facilement que les quatre ensembles O_-, O_+, O'_- et O'_+ ne dépendent que du choix de $[\Gamma]$ (comme pour le dernier point du Lemme 7.11). En particulier, puisque $B_d(y)$ sépare les deux bouts de Γ, les ensembles O_- et O_+ sont disjoints, on en déduit que $B_d(y)$

[13]Là encore, cette notion dépend du choix de Γ, mais elle ne dépend que de $[\Gamma]$ pour les ensembles bornés pour la distance de translation.

sépare les deux bouts de toute droite géodésique Γ' définissant les mêmes bouts que Γ. Notons que O'_- et O'_+ sont inclus respectivement dans O_- et O_+.

Le lemme suivant est très classique, on peut le prouver à l'aide de triangulations; les détails sont laissés au lecteur.

Lemme 7.15 (Régularisation) *Soit F une partie fermée et connexe de $\mathbb{R}^2$, et O une partie ouverte contenant F. Alors il existe une partie fermée et connexe F_0, qui est une sous-variété à bord du plan, contenant F et contenue dans O.*

On applique le Lemme 7.15 avec $F = \mathrm{Adh}(B_d(y))$ et $O = B_{d+1}(y)$ (cf Figure 21), pour obtenir une sous-variété à bords F_0. Il est clair que F_0 est disjointe de O'_- et O'_+. De plus, la composante connexe O_0^- de $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$ qui contient O'_- n'est pas bornée. Par conséquent, le bord de O_0^- est une droite topologique, on la note Δ^-. On définit symétriquement Δ^+. Les deux droites topologiques Δ^- et Δ^+ sont disjointes, le théorème de Schoenflies permet de trouver un homéomorphisme Φ du plan, préservant l'orientation, tel que $\Delta^- = \Phi(\{0\} \times \mathbb{R})$ et $\Delta^+ = \Phi(\{1\} \times \mathbb{R})$ (cf Figure 21). Appelons B la bande $\Phi([0,1] \times \mathbb{R})$. Par connexité, le fermé $F = \mathrm{Adh}(B_d(y))$ est inclus dans la bande B. On a donc montré:

Affirmation 7.16 *Il existe une partie B du plan, telle que*

- *B contient $\mathrm{Adh}(B_d(y))$, et est disjointe de O'_- et O'_+;*
- *il existe un homéomorphisme Φ qui envoie $[0,1] \times \mathbb{R}$ sur B;*
- *le bord $\Delta^- = \Phi(\{0\} \times \mathbb{R})$ est inclus dans O^-;*
- *le bord $\Delta^+ = \Phi(\{1\} \times \mathbb{R})$ est inclus dans O^+.*

On considère la compactification en bouts $\widehat{B} = B \cup \{N, S\}$, où N et S sont choisis comme sur la Figure 21.[14] Grâce à la première propriété de l'affirmation, l'intersection $B \cap \Gamma$ est compacte et non vide, et B sépare les deux bouts de Γ. On en déduit facilement que la topologie de la compactification Nord-Sud associée à Γ sur l'ensemble $\widehat{\mathrm{Adh}(B_d(y))} = \mathrm{Adh}(B_d(y)) \cup \{N, S\}$ coïncide avec la topologie induite par la topologie de $\widehat{B}$. Mais comme les ensembles O_-, O_+, O'_- et O'_+ ne dépendent que du choix de $[\Gamma]$, tout ceci est encore vraie pour une géodésique infinie Γ' définissant les mêmes bouts que Γ. En particulier, la topologie de la compactification Nord-Sud sur $\widehat{\mathrm{Adh}(B_d(y))}$ ne dépend que de $[\Gamma]$. □

[14] On compactifie $\mathbb{R}$ de manière usuelle en $\widehat{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; on peut alors construire $\widehat{B}$ comme le quotient de l'espace $[0,1] \times \widehat{\mathbb{R}}$ par la relation d'équivalence qui identifie les points de $[0,1] \times \{+\infty\}$ entre eux (ce qui donne le point N), et les points de $[0,1] \times \{-\infty\}$ entre eux (ce qui donne le point S).

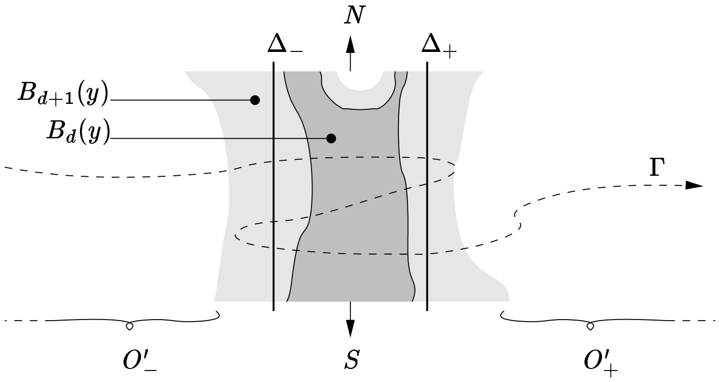

Figure 21: La compactification ne dépend que de $[\Gamma]$

Topologie sur $\mathbb{R}^2 \cup \{N, S\}$

Remarquons que si $B_{d'}(y')$ est une boule qui contient $B_d(y)$, alors la topologie de la compactification Nord-Sud sur $\widehat{\mathrm{Adh}}(B_{d'}(y'))$ induit celle sur $\widehat{\mathrm{Adh}}(B_d(y))$.

On peut maintenant définir une topologie sur $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{N, S\}$, en décidant qu'une partie $\widehat{O}$ de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ est ouverte si et seulement si, pour toute boule $B_d(y)$ séparant les deux bouts de Γ, l'ensemble $\widehat{O} \cap \widehat{\mathrm{Adh}}(B_d(y))$ est une partie ouverte de $\widehat{\mathrm{Adh}}(B_d(y))$. Cette topologie sera appelée *topologie associée à* Γ. Il est clair que, là encore, cette topologie ne dépend que du choix de $[\Gamma]$.

La droite topologique orientée $h(\Gamma)$ est une droite géodésique, et elle définit les mêmes bouts que Γ (puisque la distance de translation entre un point et son image par h vaut 1). On en déduit que l'homéomorphisme h s'étend en un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ qui fixe N et S. On notera encore h cette extension.

Remarque 7.17 Soit F une partie fermée du plan telle que $F \cap \Gamma$ est compacte; la compactification Nord-Sud $\widehat{F}$ associée à Γ coïncide-t-elle avec la topologie induite par la topologie de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ associée à Γ? En général, la réponse est négative; cependant, les deux topologies coïncident effectivement dans le cas des h–boules, donc aussi si F est borné pour la distance d_h; en fait, cette topologie n'aura d'intérêt que pour de tels ensembles. Le cas des bords de composantes de Reeb associées à Γ nous intéressera tout particulièrement.

7.3 Partition dynamique du plan

Comme avant, on se donne une droite géodésique Γ, et on note $O_N(\Gamma)$ et $O_S(\Gamma)$ les deux composantes connexes du complémentaire.

Corollaire 7.18 *Pour tout point x du plan, de deux choses l'une:*

(1) *ou bien il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $h^n(x) \in O_N(\Gamma)$;*

(2) *ou bien il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $h^n(x) \in O_S(\Gamma)$.*

De plus, cette alternative ne dépend que de $[\Gamma]$: si $[\Gamma'] = [\Gamma]$, alors on a l'équivalence

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, h^n(x) \in O_N(\Gamma) \Longleftrightarrow \exists n_0', \forall n \geq n_0', h^n(x) \in O_N(\Gamma').$$

Preuve Soit y un point du plan, et d un entier positif tel que la h-boule $B_d(y)$ sépare les deux bouts de Γ. L'espace $\widehat{\mathrm{Adh}}(B_d(y))$ est compact, et tous les points de $\mathrm{Adh}(B_d(y))$ sont errants pour h. On en déduit facilement que l'orbite positive de tout point de $\mathrm{Adh}(B_d(y))$ doit tendre vers N ou S (voir par exemple [26], preuve du corollaire 9.8). Puisque ceci est vrai pour toute h-boule séparant les deux bouts de Γ, l'orbite positive de tout point x du plan tend vers N ou S dans $\widehat{\mathbb{R}^2}$. Puisque les ensembles $O_N(\Gamma) \cup \{N\}$ et $O_S(\Gamma) \cup \{S\}$ sont respectivement des voisinages de N et S, on a bien la dichotomie annoncée. Comme la topologie sur $\widehat{\mathbb{R}^2}$ ne dépend que de $[\Gamma]$, l'alternative ne dépend elle aussi que de $[\Gamma]$. $\square$

On dira que le point x *va vers le Nord* dans le premier cas, *va vers le Sud* dans le second (et on utilisera de même les expressions *venir du Nord* et *venir du Sud*). On définit les ensembles

$$\begin{aligned} W_{N\to}(\mathbb{R}^2) &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to-\infty} h^n(x) = N\right\} \\ W_{\to N}(\mathbb{R}^2) &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to+\infty} h^n(x) = N\right\} \end{aligned}$$

et, de manière similaire, les ensembles $W_{S\to}(\mathbb{R}^2)$ et $W_{\to S}(\mathbb{R}^2)$; puis on pose

$$W_{N\to N}(\mathbb{R}^2) = W_{N\to}(\mathbb{R}^2) \cap W_{\to N}(\mathbb{R}^2); \quad W_{S\to S}(\mathbb{R}^2) = W_{S\to}(\mathbb{R}^2) \cap W_{\to S}(\mathbb{R}^2)$$
$$W_{N\to S}(\mathbb{R}^2) = W_{N\to}(\mathbb{R}^2) \cap W_{\to S}(\mathbb{R}^2); \quad W_{S\to N}(\mathbb{R}^2) = W_{S\to}(\mathbb{R}^2) \cap W_{\to N}(\mathbb{R}^2).$$

On notera également $W_{N\to}(F)$ l'ensemble $W_{N\to}(\mathbb{R}^2) \cap F$, *etc.*.

On a ainsi associé à toute classe d'équivalence de droites géodésiques une partition dynamique du plan,

$$\mathbb{R}^2 = W_{S\to S} \sqcup W_{S\to N} \sqcup W_{N\to S} \sqcup W_{N\to N}.$$

Remarque 7.19 Si l'on part non plus d'une droite géodésique mais simplement d'une suite géodésique infinie (x_k), on peut récupérer les constructions des Sections 7.2 et 7.3. En effet, on commence par se donner une droite géodésique Γ dont la suite des sommets définit les mêmes bouts que (x_k) (Remarque 7.6); on construit les topologies associées à Γ, et on remarque que ces topologies ne dépendent pas du choix de Γ (d'après l'Affirmation 7.14). Nous parlerons donc dans ce qui suit de la *compactification Nord-Sud associée à une suite géodésique infinie* (x_k).

7.4 Sens de circulation dans les bords de composantes de Reeb

La preuve de la proposition suivante occupera la Section 9. L'idée intuitive est que les bords de composantes de Reeb minimales sont trop étroits pour que la circulation puisse se faire dans les deux sens. Notons que l'énoncé est faux pour les composantes de Reeb non minimales, comme le montre l'exemple de la Figure 31 de l'Appendice B.

Proposition 7.20 *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite géodésique infinie, et soit F un bord de composante de Reeb associée à (x_k). Soit $\widehat{F}$ la compactification Nord-Sud de F associée à (x_k). Alors:*

- *l'un des deux ensembles $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ est vide;*
- *l'autre est un ouvert dense de F, et il est connexe;*
- *les ensembles $W_{N\to N}(F)$ et $W_{S\to S}(F)$ sont fermés.*

On dira que F est *de type dynamique Sud-Nord* si $W_{S\to N}(F)\neq\emptyset$, et que F est *de type dynamique Nord-Sud* si $W_{N\to S}(F)\neq\emptyset$. D'après la Proposition 7.20, F est d'un et d'un seul des deux types, et F est de type Sud-Nord si et seulement si il existe un ouvert (non vide) de points de F dans $W_{\to N}(F)$.

8 Flèches verticales

Le résultat principal de cette section est que deux bords de composantes de Reeb "adjacents" ont le même type dynamique (défini précisément à la Section 7): le "sens de circulation", du Nord vers le Sud ou bien du Sud vers le Nord, est le même. Ceci permet d'associer un mot infini à toute suite géodésique infinie, en insérant, dans le mot horizontal, une flèche $\uparrow$ aux endroits correspondant à des bords de type Sud-Nord et une flèche $\downarrow$ pour les bords de type Nord-Sud. Nous utilisons ici tous les résultats de la section précédente.

8.1 Énoncé précis du Théorème D

Théorème D-bis *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite géodésique infinie et $((F_k, G_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite des composantes de Reeb associée. Alors pour tout entier k, G_k et F_{k+1} ont le même type dynamique.*

Supposons de plus que (x_k) est la suite des sommets d'une droite géodésique Γ. Alors,

- *si l'unique lettre du mot $M_\leftrightarrow(x_{k-1}, x_{k+1})$ est $\rightarrow$, alors G_k et F_{k+1} sont de type dynamique Sud-Nord si et seulement si le point x_k va vers le Nord;*
- *si cette lettre est $\leftarrow$, alors G_k et F_{k+1} sont de type dynamique Sud-Nord si et seulement si le point x_k vient du Sud.*

On a bien sûr un énoncé analogue pour x_{k+1} (obtenu à partir du Théorème D-bis en inversant l'orientation de Γ):

- si $M_\leftrightarrow(x_k, x_{k+2}) = (\leftarrow)$, alors G_k et F_{k+1} sont de type dynamique Sud-Nord si et seulement si le point x_{k+1} va vers le Nord;
- si $M_\leftrightarrow(x_k, x_{k+2}) = (\rightarrow)$, alors G_k et F_{k+1} sont de type dynamique Sud-Nord si et seulement si le point x_{k+1} vient du Sud. Le théorème est illustré par la Figure 22.

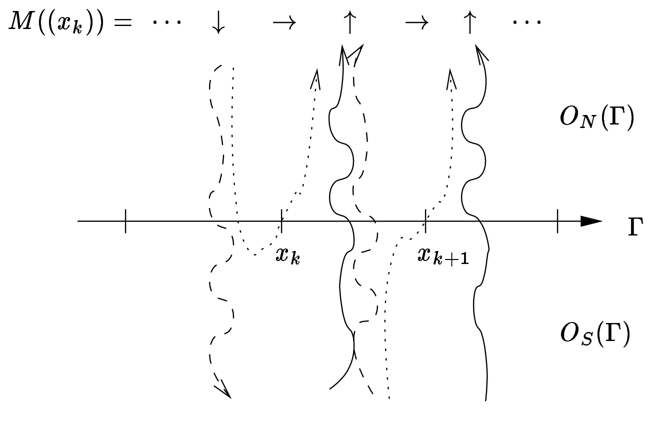

Figure 22: Flèches verticales et dynamique des sommets d'une droite géodésique

Notamment, l'énoncé implique que, étant données les flèches horizontales associées à la droite géodésique Γ, les dynamiques de deux sommets consécutifs sont étroitement reliées.

8.2 Définition des flèches verticales

Définition 8.1 Le *mot vertical* associé à (x_k) est la suite $(M_{\updownarrow_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de l'alphabet $\{\uparrow,\downarrow\}$ définie par

$$\begin{aligned} M_{\updownarrow_k} = \uparrow \quad &\Leftrightarrow \quad G_k \text{ et } F_{k+1} \text{ sont de type dynamique Sud-Nord} \\ M_{\updownarrow_k} = \downarrow \quad &\Leftrightarrow \quad G_k \text{ et } F_{k+1} \text{ sont de type dynamique Nord-Sud.} \end{aligned}$$

On obtient ainsi un invariant de conjugaison, associé à la donnée de h et d'une classe d'équivalence de suites géodésiques infinies. Cet invariant complète le mot horizontal défini à la Section 3.3; la définition suivante regroupe flèches horizontales et verticales dans un même mot.

Définition 8.2 On associe à toute suite géodésique infinie (x_k) le mot $M((x_k))$ obtenu en intercalant les lettres des mots horizontal et vertical,

$$M((x_k)) := (\dots, M_{\updownarrow_{k-1}}, M_{\leftrightarrow k}, M_{\updownarrow_k}, M_{\leftrightarrow k+1}, M_{\updownarrow_{k+1}}, \dots).$$

Notons que le mot $M((x_k))$ détermine le type dynamique de chacun des points x_k.

Ce mot n'intervient pas dans la suite du texte. Mentionnons cependant une propriété de ce mot, qui fournit également une interprétation des flèches qui le composent, et justifie ainsi le choix de ces symboles. En utilisant les techniques de décompositions en briques (voir [21], [26]), on montrera dans l'article [27] les résultats suivants. Pour toute composante de Reeb (F_k, G_k) associée à (x_k), il existe une droite de Brouwer Δ_k qui sépare les deux bords F_k et G_k. De plus, l'indice partiel de h entre Δ_k et Δ_l (au sens de [26]) est entièrement déterminé par le mot $M((x_k))$. Plus précisément, cet indice est égal au "nombre de tours qu'effectue la flèche" dans le mot

$$(M_{\leftrightarrow k}, M_{\updownarrow_k}, \dots, M_{\updownarrow_{l-1}}, M_{\leftrightarrow l}).$$

Par exemple, le mot $(\rightarrow, \uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow)$ correspond à un indice égal à $-1/2$.

8.3 Preuve dans le cas simple (mot attractif ou répulsif)

Notations

Soit (x_k) une suite géodésique infinie. D'après la Section 7,

– on peut choisir une droite géodésique Γ dont la suite des sommets définit les mêmes bouts que (x_k) (Remarque 7.6);

– la suite de composantes associée à Γ est la même que celle associée à (x_k) (Proposition 7.7);

– la définition des types dynamiques de G_k et F_{k+1} ne dépend pas du choix de cette courbe géodésique Γ.

Par conséquent, on peut supposer dans toute la preuve du Théorème D-bis que (x_k) est la suite des sommets d'une droite géodésique Γ. Comme avant, on notera $O_N(\Gamma)$ et $O_S(\Gamma)$ les composantes connexes gauches et droites du complémentaire de Γ. Afin d'alléger les notations, on supposera (sans perte de généralité) que $k = 0$, et on notera $G = G_0$ et $F = F_1$. On note

$$\Gamma = \cdots * \gamma_{-1} * \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots$$

la décomposition de Γ. En appliquant le Lemme 4.8 sur le franchissement des composantes de Reeb, et le Lemme 7.9 sur la compatibilité des composantes de Reeb, on voit que $\Gamma \cap (G \cup F)$ est non vide et inclus dans l'intérieur de l'arc γ_0. *On se place ici dans les cas "attractif" ou "répulsif", ie on suppose que le mot $M_{\leftrightarrow}(x_{-1}, x_2)$ vaut $(\rightarrow\leftarrow)$ ou $(\leftarrow\rightarrow)$.* De plus, il suffit de faire la preuve quand $M_{\leftrightarrow}(x_{-1}, x_2) = (\rightarrow\leftarrow)$, l'autre cas s'en déduisant en appliquant le résultat à h^{-1}.

Démonstration

Le fait que Γ soit géodésique va entraîner la propriété-clé suivante.

Affirmation 8.3 *Pour tout $n \geq 1$, $h^n(\gamma_0) \cap \Gamma = \emptyset$.*

Preuve Soit $n \geq 1$. On doit montrer que pour tout entier k, $h^n(\gamma_0) \cap \gamma_k = \emptyset$.

- Pour $k = 0$, ceci vient de la liberté de γ_0 (Corollaire 2.8).
- Pour $k = 1$ ou $k = -1$, ceci vient de l'hypothèse $M_{\leftrightarrow}(x_{-1}, x_2) = (\rightarrow\leftarrow)$ et de la définition des flèches horizontales (Affirmation 3.10 et Définition 3.11).
- Pour $|k| > 1$, ceci provient de la géodésicité de Γ (cf premier point du Lemme 3.8 sur les itérés d'un arc géodésique). □

Soit D_0 un disque topologique fermé libre, vérifiant $\Gamma \cap D_0 = \gamma_0$ et $\mathrm{Int}(\gamma_0) \subset \mathrm{Int}(D_0)$. On obtient facilement un tel disque en épaississant γ_0 (à l'aide du théorème de Schoenflies). On peut alors renforcer l'affirmation précédente:

Affirmation 8.4 *Sous les hypothèses ci-dessus, $h^n(D_0) \cap \Gamma = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$.*

Preuve On pourrait faire la démonstration en recopiant la preuve de l'affirmation précédente, en utilisant une version adaptée du lemme de Franks. Voici une autre possibilité, qui consiste à "perturber" Γ. On raisonne par l'absurde. Supposons que n est un entier strictement positif tel que $h^n(D_0)$ rencontre Γ, et soit $y \in D_0 \cap h^{-n}(\Gamma)$. Soit γ_0' un arc inclus dans D_0, de mêmes extrémités que γ_0, et passant par y. On obtient une nouvelle droite géodésique Γ' à partir de Γ en remplaçant γ_0 par γ_0'. Puisque D_0 est libre, il est disjoint de tous ses itérés, et $h^n(y)$ n'est pas sur γ_0; par conséquent $y \in \gamma_0' \cap h^{-n}(\Gamma')$. D'autre part, la nouvelle droite géodésique définit clairement les mêmes bouts que l'ancienne; par conséquent, leurs mots horizontaux coïncident (Proposition 7.7), et on peut appliquer l'Affirmation 8.3 à Γ'. Ceci contredit le fait que $y \in \gamma_0' \cap h^{-n}(\Gamma')$. □

Preuve du Théorème D-bis dans le cas simple, fin On reprend le disque D_0 introduit ci-dessus. Soit x un point quelconque de $D_0 \cap G$ (qui n'est pas vide puisque G rencontre γ_0). *Supposons que x soit dans $W_{\to N}(G)$*: il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $h^n(x)$ est dans l'ouvert $O_N(\Gamma)$ à gauche de Γ. Alors l'Affirmation 8.4 implique que pour tout $n \geq n_0$, le disque $h^n(D_0)$ est entièrement inclus dans l'ouvert $O_N(\Gamma)$; en particulier, tous les points de D_0 vont vers le Nord. Les ensembles $G \cap \mathrm{Int}(D_0)$ et $F \cap \mathrm{Int}(D_0)$ sont des ouverts non vides de $W_{\to N}(G)$ et $W_{\to N}(F)$ respectivement. D'après la Proposition 7.20 et la définition des types dynamiques, G et F sont tous les deux de type dynamique Sud-Nord. De plus, les points x_0 et x_1 vont vers le Nord. *Si x est dans $W_{\to S}(G)$*, on montre de manière symétrique que G et F sont de type dynamique Nord-Sud, et que x_0 et x_1 vont vers le Sud. Ceci termine la preuve du théorème dans les cas "attractif" et "répulsif". □

Affirmation 8.5 (Complément au cas attractif) *On suppose que le mot est attractif, c'est-à-dire que*

$$M_{\leftrightarrow}(x_{-1}, x_2) = (\rightarrow\leftarrow).$$

Dans ce cas, si $h(\gamma_0)$ est inclus dans $O_S(\Gamma)$, alors $h^n(\gamma_0)$ est encore inclus dans $O_S(\Gamma)$ pour tout $n \geq 2$. En particulier, on a les équivalences

$$\begin{aligned} h(\gamma_0) \subset O_S(\Gamma) \quad &\Leftrightarrow \quad x_k \text{ et } x_{k+1} \text{ vont vers le Sud} \\ &\Leftrightarrow \quad G_k \text{ et } F_{k+1} \text{ sont de type dynamique Nord-Sud} \\ &\Leftrightarrow \quad M_{\updownarrow k} = \downarrow. \end{aligned}$$

Preuve On suppose que $h(\gamma_0)$ est inclus dans $O_S(\Gamma)$. L'arc γ_0 est libre, mais $\gamma_0 \cup \gamma_1$ ne l'est pas, et la flèche $M_{\leftrightarrow}(x_0, x_2) = \leftarrow$ indique que c'est l'image de γ_1 qui rencontre γ_0. Il existe donc un point x sur γ_1 tel que $[x_0 x[_\Gamma$ soit libre, mais $[x_0x]_\Gamma$ ne le soit pas: le point $h(x)$ est donc sur γ_0. On considère l'arc $\alpha = [h(x)x]_\Gamma$. Le point-clé, prouvé plus bas, consiste à voir que

$$\forall n \geq 2, \quad h^n(\alpha) \cap \Gamma = \emptyset.$$

En effet, on en déduit que l'ensemble

$$\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)$$

est disjoint de Γ, or il est connexe et il rencontre $h(\gamma_0)$, c'est donc qu'il est inclus dans $O_S(\gamma)$; mais pour tout $n \geq 2$, $h^n(\gamma_0)$ rencontre à son tour cet ensemble, et est disjoint de Γ d'après l'Affirmation 8.3, c'est donc que $h^n(\gamma_0) \subset O_S(\Gamma)$.

Montrons le point-clé. Soit y un point de α. Si y est dans $[h(x)x_1]_\gamma$, alors $h^n(y)$ appartient à $h^n(\gamma_0)$, et l'Affirmation 8.3 dit que $h^n(y) \notin \Gamma$ pour tout $n \geq 1$. Si $y = x$, on conclut de même, puisque $h(x) \in \gamma_0$. Il reste le cas où y est dans $]x_1x[_\Gamma$. Dans ce cas, l'arc $[x_0y]_\Gamma$ est libre: par suite, on obtient une nouvelle décomposition de Γ en posant

$$x_1{}' = y, \quad \gamma_0{}' = [x_0x_1{}']_\Gamma, \quad \gamma_1{}' = [x_1{}'x_2]_\Gamma,$$
$$\gamma_i{}' = \gamma_i \quad \forall i \neq 0,1 \quad \text{et} \quad x_i{}' = x_i \quad \forall i \neq 1.$$

On applique alors l'Affirmation 8.3 à cette nouvelle décomposition. Ceci donne notamment, pour tout $n \geq 1$, $h^n(x_0{}') \notin \Gamma$, comme voulu. □

8.4 Preuve dans le cas difficile (mot indifférent)

On se place maintenant dans le cas "indifférent", où le mot $M_\leftrightarrow(x_{-1}, x_2)$ *vaut* $(\rightarrow\rightarrow)$ *ou* $(\leftarrow\leftarrow)$. On reprend les notations du cas simple. Quitte à remplacer h par h^{-1}, on peut supposer que $M_\leftrightarrow(x_{-1}, x_2) = (\rightarrow\rightarrow)$. On note $O_-(G)$ et $O_+(G)$ les ensembles complémentaires de G (Définition 7.10); rappelons que ces ensembles sont invariants (Lemme 7.11). On note p le premier point et d le dernier point sur G quand on parcourt la droite orientée Γ de $(-\infty)$ vers $(+\infty)$ (cf Figure 23). Les points p et d sont situés entre x_0 et x_1 sur Γ (d'après le Lemme 7.9 et l'inégalité triangulaire). Les demi-droites $]-\infty, p[_\Gamma$ et $]d, +\infty[_\Gamma$ sont incluses respectivement dans les ouverts $O_-(G)$ et $O_+(G)$.

Nous allons prouver successivement les résultats suivants.

Affirmation 8.6 *Pour tout* $n \geq 1$,

- $h^n([x_0p]_\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$;

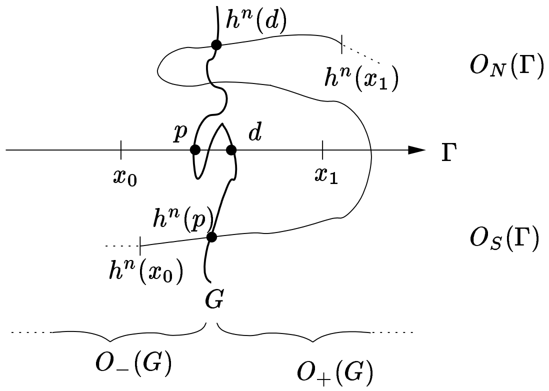

Figure 23: Disposition de l'image de γ_0 (cas indifférent)

- $h^{-n}([dx_1]_\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$.

Affirmation 8.7 *Soit $n \geq 1$. On a l'équivalence suivante:*

$$h^n([x_0p]_\Gamma) \subset O_S(\Gamma) \qquad \Leftrightarrow \qquad h^{-n}([dx_1]_\Gamma) \subset O_N(\Gamma).$$

Corollaire 8.8 *On a les équivalences:*

$$\begin{aligned} x_0 \text{ va vers le Sud} &\Leftrightarrow x_1 \text{ vient du Nord} \\ &\Leftrightarrow p \in W_{\to S}(G) \\ &\Leftrightarrow d \in W_{N\to}(G). \end{aligned}$$

Affirmation 8.9

(1) *Si x_1 vient du Nord, alors G est de type dynamique Nord-Sud;*

(2) *Si x_0 va vers le Sud, alors F est de type dynamique Nord-Sud.*

Preuve de l'Affirmation 8.6 Soit $n \geq 1$, et montrons le premier point. Comme dans la preuve de l'Affirmation 8.3, on doit montrer que pour tout entier k, $h^n([x_0p]_\Gamma) \cap \gamma_k = \emptyset$ (cf Figure 23). Comme avant, ceci est vrai pour $k = 0$ (liberté) et pour $|k| > 1$ (géodésicité). Pour $k = -1$, ceci suit du fait que $M_\leftrightarrow(x_{-1}, x_1) = (\to)$. Il reste à voir que $h^n([x_0p]_\Gamma) \cap \gamma_1 = \emptyset$. Ceci vient du fait que l'arc $[x_0p]_\Gamma$ est inclus dans l'ensemble fermé invariant $O_-(G) \cup G$, tandis que l'arc $\gamma_1 = [x_1x_2]_\Gamma$ est inclus dans $O_+(G)$.

Le deuxième point de l'affirmation se démontre de façon symétrique. □

Preuve de l'Affirmation 8.7 Afin de simplifier les notations, on écrit seulement la preuve pour $n = 1$; la preuve pour $n > 1$ étant identique. D'après l'Affirmation 8.6, il suffit de montrer que $h(p)$ est à droite de Γ (ie dans $O_S(\Gamma)$) si et seulement si $h^{-1}(d)$ est à gauche de Γ (ie dans $O_N(\Gamma)$). Soit Γ' la droite topologique orientée image de Γ par h. Comme h préserve l'orientation, le point $h^{-1}(d)$ est à gauche de Γ si et seulement si le point d est à gauche de Γ'. Il s'agit donc de montrer que *le point $B = h(p)$ est à droite de Γ si et seulement si le point $A = d$ est à gauche de Γ'*. Ceci va résulter de considérations de topologie plane. On note (cf Figure 24):

$$\Gamma^- =]-\infty, A]_\Gamma, \qquad \Gamma^+ = [A, +\infty[_\Gamma,$$
$$\Gamma'^- =]-\infty, B]_{\Gamma'}, \qquad \Gamma'^+ = [B, +\infty[_{\Gamma'}.$$

Puisque Γ est une droite topologique, d'après le théorème de Schoenflies, on peut supposer que c'est une droite euclidienne horizontale orientée de la gauche vers la droite, comme sur la Figure 24.

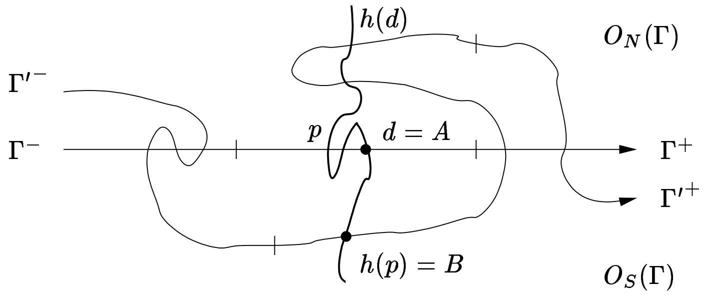

Figure 24: Disposition de la droite géodésique Γ et de son image Γ'

Montrons d'abord les propriétés suivantes.

(1) $\Gamma^+ \cap \Gamma'^+ \neq \emptyset$;

(2) $\Gamma^- \cap \Gamma'^- \neq \emptyset$;

(3) $\Gamma^- \cap \Gamma'^+ = \emptyset$;

(4) $\Gamma^+ \cap \Gamma'^- = \emptyset$.

Les deux premières propriétés viennent du fait que Γ est une droite géodésique (deuxième point du Lemme 3.8). Pour la troisième, on peut même montrer que les demi-droites $]-\infty, x_1]_\Gamma$ et $h([x_0, +\infty[_\Gamma)$ sont disjointes, en utilisant encore le caractère géodésique (premier point du même lemme), ainsi que l'hypothèse $M_\leftrightarrow(x_{-1}, x_2) = (\rightarrow\rightarrow)$ et la définition des flèches. Enfin, la dernière propriété provient simplement des inclusions $\Gamma^+ \subset O_+(G) \cup \{d\}$ et $\Gamma'^- \subset O_-(G) \cup \{h(p)\}$ (rappelons que $h(p) \neq d$, puisque p et d appartiennent à un même arc libre).

Supposons maintenant que B est à droite de Γ, et montrons que A est à gauche de Γ'. Remarquons tout d'abord que A n'est pas sur Γ' (d'après les deux dernières propriétés). Soit $]CD[_{\Gamma'}$ la composante connexe de $\Gamma' \setminus \Gamma$ contenant B, où C et D sont choisis de façon à ce que C soit situé avant D sur la droite topologique orientée Γ'; l'existence de ces deux points vient des deux premières propriétés ci-dessus (cf Figure 25). D'après les deux dernières propriétés, le point C est sur $\Gamma^- \cap \Gamma'^-$, et le point D sur $\Gamma^+ \cap \Gamma'^+$ (et par conséquent C est également situé avant D sur Γ). Par définition, l'arc ouvert $]CD[_{\Gamma'}$ est disjoint de Γ, et la courbe $[CD]_{\Gamma'} \cup [CD]_{\Gamma}$ est une courbe de Jordan (ie elle est homéomorphe au cercle). Soit U le disque topologique ouvert bordé cette courbe. Remarquons que puisque la droite Γ est disjointe de $]CD[_{\Gamma'}$, elle est aussi disjointe de l'ouvert U. D'après le théorème de Schoenflies, sachant que B est à droite de Γ, la situation est homéomorphe au dessin de la Figure 25: on peut supposer que U est un demi-disque euclidien, et U est situé à gauche de l'arc orienté $[CD]_{\Gamma'}$ et à droite de l'arc orienté $[CD]_{\Gamma}$.

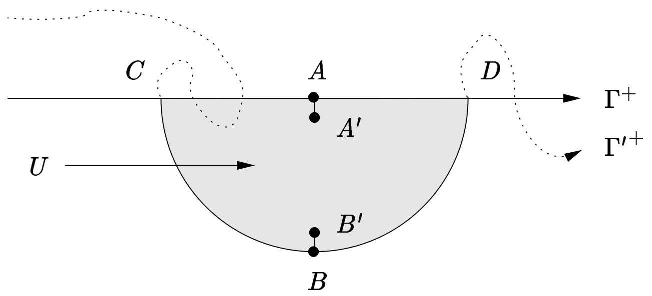

Figure 25: Si B est à droite de Γ...

Sur cette figure, choisissons un point A' dans U, suffisamment proche de A pour que le segment euclidien $[AA']$ soit disjoint de Γ'. De même, on choisit un point B' dans U, suffisamment proche de B pour que le segment euclidien $]BB']$ soit disjoint de Γ'. Puisque B' est à gauche de Γ', pour que le point A soit situé à gauche de Γ' il suffit qu'il existe un arc reliant A' à B' en évitant Γ'. Nous allons trouver un tel arc dans U.

Supposons que cet arc n'existe pas. Alors l'ensemble $\Gamma' \cap U$, qui est une partie fermée de U, sépare A' et B' dans U. L'ouvert U étant homéomorphe au plan, on peut appliquer le Théorème A.5 de l'appendice: il existe une composante connexe de $\Gamma' \cap U$ qui sépare encore A' et B'. Cette composante connexe est un intervalle de Γ'^- ou bien de Γ'^+; elle est disjointe de $[CD]_{\Gamma'}$. Puisqu'elle sépare A' et B' dans U, et ne rencontre ni $[AA']$ ni $[BB']$, son adhérence doit rencontrer chacun des deux arcs $[CA]_\Gamma$ et $[AD]_\Gamma$. Ceci contredit l'une des deux propriétés 3 et 4.

Nous avons donc montré que si B est à droite de Γ, alors A est à gauche de Γ'. On montre de même que si B est à gauche de Γ, alors A est à droite de Γ'. Ce qui conclut. □

Preuve du Corollaire 8.8 Si x_0 va vers le Sud, alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $h^n(x_0) \in O_S(\Gamma)$. Mais alors d'après l'Affirmation 8.6, pour $n \geq n_0$, on a $h^n([x_0 p]_\Gamma) \subset O_S(\Gamma)$, et en particulier le point p va aussi vers le Sud. Et d'après l'Affirmation 8.7, toujours pour $n \geq n_0$, on a $h^{-n}([dx_1]_\Gamma) \subset O_N(\Gamma)$, par conséquent les points d et x_1 viennent du Nord. □

Preuve de l'Affirmation 8.9 Pour prouver cette affirmation, nous commençons par remplacer Γ par une autre droite géodésique Γ', qui définira les mêmes bouts que Γ. Par conséquent, G sera encore un bord de composante de Reeb associée à Γ' (Proposition 7.7), et on pourra appliquer le Corollaire 8.8 à cette nouvelle situation.

Puisque les ensembles $W_{N\to N}(G)$ et $W_{S\to S}(G)$ sont fermés (Proposition 7.20) et disjoints, il existe un voisinage V du point d qui ne rencontre pas simultanément ces deux ensembles.

En épaississant légèrement l'arc $[dx_1]_\Gamma$ (à l'aide du théorème de Schoenflies), on choisit maintenant un disque topologique fermé D tel que (cf Figure 26)

- $\Gamma \cap D$ est un sous-arc de Γ dont x_1 est une extrémité;
- $d \in \mathrm{Int}(D)$;
- $D \cap G \subset V$;
- D est libre.

Rappelons que l'ensemble G est inclus dans l'adhérence de $B_1(x_{-1})$ (par définition). Par construction, D contient donc des points à h–distance 1 de x_{-1}, autrement dit il existe un arc libre γ' joignant x_{-1} à un point de D; et on peut supposer, quitte à raccourcir cet arc, que $\gamma' \cap D$ contient un unique point qu'on appelle x'_0. Remarquons que γ' est disjoint de $[x_1, +\infty[_\Gamma$, car (x_k) est une suite géodésique. On pose $x'_1 = x_1$, et on choisit un arc γ'_0 joignant x'_0 à x'_1 dans D (cet arc est donc libre, et ne rencontre γ' qu'au point x'_0). On appelle x'_{-1} le dernier point d'intersection de γ' avec $]-\infty, x_{-1}]_\Gamma$ lorsqu'on

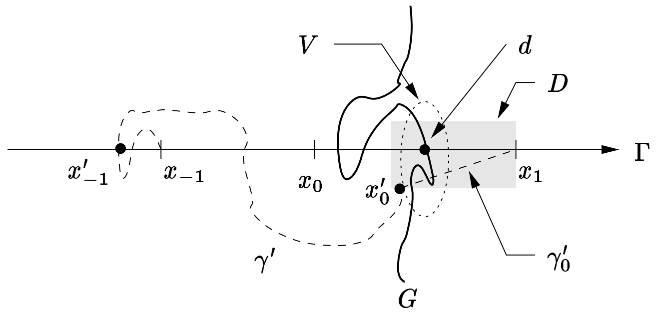

Figure 26: Construction de la géodésique Γ' (I)

parcourt γ' depuis x_{-1} vers x'_0. Remarquons encore que ce point est situé sur $]x_{-2}, x_{-1}]_\Gamma$, toujours à cause du caractère géodésique de (x_k). On pose alors (cf Figure 27)

$$\gamma'_{-2} = [x_{-2} x'_{-1}]_\Gamma, \qquad \gamma'_{-1} = [x'_{-1} x'_0]_{\gamma'}$$
$$\Gamma' =]-\infty, x'_{-2}]_\Gamma \cup \gamma'_{-2} \cup \gamma'_{-1} \cup \gamma'_0 \cup [x_1, +\infty[_\Gamma.$$

Remarquons que par définition du point x'_{-1}, ce point est l'unique point d'intersection des arcs γ'_{-2} et γ'_{-1}.

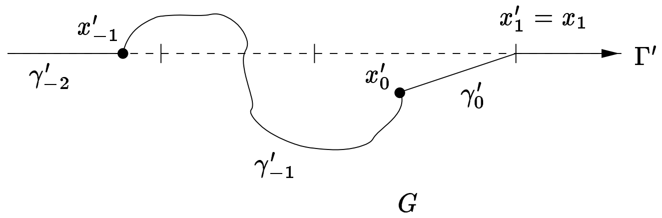

Figure 27: Construction de la géodésique Γ' (II)

Dans cette situation, la droite Γ'*, munie de la décomposition*

$$\Gamma' = \cdots * \gamma_{-3} * \gamma'_{-2} * \gamma'_{-1} * \gamma'_0 * \gamma_1 * \cdots$$

est une droite géodésique, qui définit les mêmes bouts que Γ*.* En effet, on vérifie que la courbe est sans point double par construction; le fait qu'il s'agit bien d'une droite géodésique, et qu'elle définit les mêmes bouts que Γ, est immédiat.

En appliquant le Lemme 4.8 sur le franchissement des composantes de Reeb, on voit que $\Gamma' \cap G \subset \gamma'_0$, donc $\Gamma' \cap G \subset D \cap G \subset V$. Comme pour Γ, on définit les points p' et d' comme étant les premier et dernier points sur G lorsqu'on parcourt Γ' de $(-\infty)$ vers $(+\infty)$. Ces deux points sont dans V.

On suppose maintenant que le point $x_1 = x'_1$ vient du Nord. On applique alors le Corollaire 8.8 à la droite géodésique Γ'; on obtient que le point p' est dans $W_{\to S}(G)$ et le point d' dans $W_{N\to}(G)$. Le choix de V empêche alors qu'on ait simultanément $p' \in W_{S\to S}(G)$ et $d' \in W_{N\to N}(G)$. On en conclut que l'un des deux points au moins est dans $W_{N\to S}(G)$. Ceci prouve que le type dynamique de G est Nord-Sud.

La deuxième partie de l'Affirmation 8.9 provient d'une construction entièrement symétrique.[15] □

Preuve du Théorème D-bis dans le cas difficile, fin Le point x_0 va vers le Sud ou vers le Nord (Corollaire 7.18). On suppose par exemple qu'il va vers le Sud, l'autre cas se traitant de manière identique en inversant les rôles des points N et S. Dans ce cas, d'après le Corollaire 8.8, le point x_1 vient du Nord. D'après l'Affirmation 8.9, F et G sont tous deux de type dynamique Nord-Sud. Ceci achève la preuve du théorème. □

9 Dynamique dans les continus minimaux

Dans cette section, nous prouvons la Proposition 7.20. *Les Sections 9.3 et 9.4 sont indépendantes du reste du texte.* Rappelons qu'un *continu* est un espace topologique (métrisable) compact et connexe.

Le résultat principal de cette section dit qu'un bord F de composante de Reeb (associé à une suite géodésique infinie (x_k)) contient soit des points qui vont du Nord au Sud, soit des points qui vont du Sud au Nord, mais pas les deux à la fois. Cette propriété est avant tout la conséquence de la minimalité de F (en tant qu'ensemble fermé, connexe, séparant les deux bouts de (x_k)). Ceci va nous entraîner dans des considérations de dynamique topologique abstraite, où les seuls souvenirs de la dynamique plane seront deux propriétés techniques, conséquences du lemme de Franks, et prouvées dans la Section 9.1. De ce point de vue, cette partie apparaît comme étant le prolongement de l'article [24]: dans un contexte plus général (qui correspond aux trois premières propriétés de

[15] Plus précisément, on considère l'homéomorphisme $h' = h^{-1}$, et la droite géodésique Γ' obtenue à partir de la droite topologique Γ en renversant l'orientation et en choisissant la décomposition dont la suite des sommets est $(x'_k := x_{1-k})$. On a alors $M_{\leftrightarrow}^{h'}(x'_{-1}, x'_2) = (\to\to)$, tandis que les rôles de x_0 et de x_1 sont inversés, ainsi que ceux de N et de S, et ceux de F et de G. En appliquant le point 1 de l'affirmation à cette situation symétrique, on obtient alors le point 2.

l'hypothèse (H) ci-dessous, augmentées d'une hypothèse de connexité locale qui n'était pas essentielle), on montrait l'existence d'au moins *un* point dont l'orbite traverse F du Nord au Sud ou du Sud au Nord. L'hypothèse de minimalité et les "souvenirs du plan" que nous ajoutons ici permettent donc de renforcer sérieusement les résultats préliminaires de [24], résultats que nous réutilisons ici (sous la forme du Lemme 9.5). Je dois à Patrice Le Calvez l'idée d'utiliser des compacts minimaux dans le contexte de l'article [24].

9.1 Préliminaires: deux conséquences du lemme de Franks

Rappelons que la *limite supérieure* d'une suite de parties d'un espace topologique X est l'ensemble des points de X dont tout voisinage rencontre une infinité d'éléments de la suite. Nous aurons également besoin du concept suivant, qui est une bonne alternative à la notion de *composantes connexes par arcs* dans les espaces où celles-ci sont trop petites pour être utiles (par exemple, quand elles sont réduites à des points).

Définition 9.1 Soit X un espace topologique. On définit une relation d'équivalence sur X, en décidant que deux points sont équivalents si ils appartiennent à une même partie compacte et connexe de X. On appellera *composantes compactement connexes* les classes d'équivalence pour cette relation.

Ces définitions sont utilisées par W. Daw dans l'article [7]. Elles apparaissent déjà dans le livre de K. Kuratowski, [20] (paragraphe 42, VIII; les composantes compactement connexes y sont appelées des *constituants*.) Dans les bons espaces, les composantes compactement connexes sont "assez grandes", elles "vont à l'infini" (voir l'appendice, Corollaire A.2). Notons aussi qu'une composante compactement connexe n'est pas nécessairement fermée.

On considère un homéomorphisme de Brouwer h. Nous démontrons les deux énoncés suivants.

Lemme 9.2 *Si C est une partie compacte du plan, alors la limite supérieure de la suite $(h^n(C))_{n\geq 0}$ ne contient pas C.*

Lemme 9.3 *Si E est une partie compactement connexe du plan, libre par h, et si $E \not\subset \mathrm{Adh}(h(E))$, alors la limite supérieure de la suite $(h^n(\mathrm{Adh}(E)))_{n\geq 0}$ ne contient pas E.*

Preuve du Lemme 9.2 Pour donner l'idée de la preuve, commençons par le cas simple où C est un disque topologique fermé. On peut alors écrire C comme la réunion d'un nombre fini de disques topologiques fermés D_i, libres, d'intérieurs deux à deux disjoints. On sait que la suite $(h^n(C))$ converge (Lemme 5.1). Si C était inclus dans la limite de cette suite, alors pour tout disque D_i, il existerait un disque D_j et un entier $n_i > 0$ tel que $h^{n_i}(\mathrm{Int}(D_j))$ rencontre $\mathrm{Int}(D_i)$. Puisque les disques D_i sont en nombre finis, on en déduirait l'existence d'une chaîne de disques périodique, ce qu'interdit le lemme de Franks.

Voici la preuve dans le cas général.[16] Soit C vérifiant les hypothèses du lemme. On considère un quadrillage d'un carré du plan contenant C (comme sur la Figure 28). Pour tout point x de C, on note $D(x)$ la réunion des petits carrés fermés contenant x : $D(x)$ est un disque topologique fermé réunion de 1, 2 ou 4 petits carrés, et on peut choisir le quadrillage pour que tous les ensembles $D(x)$ soient libres. Remarquons que x appartient à l'intérieur de $D(x)$. D'autre part, si y est un point de C qui n'est pas dans $D(x)$, alors les deux disques $D(y)$ et $D(x)$ sont d'intérieurs disjoints.

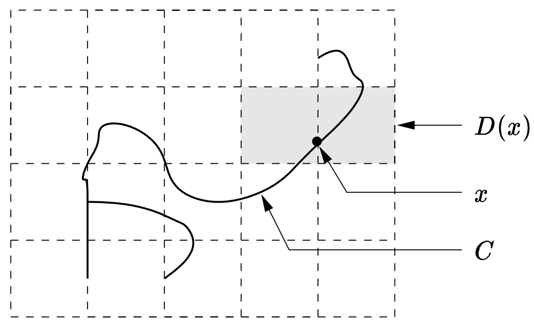

Figure 28: approximation de C par des carrés libres

On suppose que C est inclus dans la limite supérieure C_∞ de $(h^n(C))_{n\geq 0}$, et on va construire par récurrence une chaîne de disques (pour h^{-1}). Soit x_1 un point quelconque de C. Puisque $x_1 \in \mathrm{Int}(D(x_1)) \cap C_\infty$, il existe un entier $n_1 > 0$ et un point x_2 de C tels que $h^{n_1}(x_2)$ appartient à l'intérieur de $D(x_1)$. En itérant la construction, on trouve une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ de points de C et une suite d'entiers $n_i > 0$ telles que pour tout $i \geq 1$, $h^{n_i}(x_{i+1})$ appartient à l'intérieur de $D(x_i)$. Puisque le nombre de petits carrés du quadrillage qui rencontrent

[16] Par rapport au cas simple, la complication vient du fait qu'on ne sait pas recouvrir C facilement par des disques topologiques fermés d'intérieurs deux à deux disjoints, et dont les intérieurs rencontrent C.

C est fini, il existe un entier $i \geq 1$ tel que x_{i+1} appartient à l'un des disques $D(x_j)$ pour $1 \leq j \leq i$. On appelle i_2 le plus petit des tels entiers i, et $i_1 \leq i_2$ un entier tel que x_{i_2+1} appartient à $D(x_{i_1})$. On a

- les disques $D(x_1), \dots, D(x_{i_2})$ sont d'intérieurs deux à deux disjoints, grâce au choix de i_2;
- pour $1 \leq i \leq i_2 - 1$, l'intérieur de $h^{n_i}(D(x_{i+1}))$ rencontre l'intérieur de $D(x_i)$ (puisque $h^{n_i}(x_{i+1}) \in \mathrm{Int}(D(x_i))$);
- l'intérieur de $h^{n_{i_2}}(D(x_{i_1}))$ rencontre l'intérieur de $D(x_{i_2})$ (puisque $D(x_{i_1})$ contient x_{i_2+1} et $h^{n_{i_2}}(x_{i_2+1}) \in \mathrm{Int}(D(x_{i_2}))$).

Autrement dit, la suite $(D(x_{i_2}), D(x_{i_2-1}), \dots, D(x_{i_1}))$ est une chaîne de disques périodique, ce qui contredit le lemme de Franks.[17] □

Preuve du Lemme 9.3 Soit E vérifiant les hypothèses du lemme. Puisque $E \not\subset \mathrm{Adh}(h(E))$, il existe un disque topologique fermé libre D_1, disjoint de $h(E)$, dont l'intérieur rencontre E (cf Figure 29). On raisonne par l'absurde, en supposant que la limite supérieure E_∞ de la suite $(h^n(\mathrm{Adh}(E)))_{n \geq 0}$ contient E. En particulier, E_∞ rencontre l'intérieur de D_1, et il existe un entier $n \geq 100$ tel que $h^n(E)$ rencontre l'intérieur de D_1. Puisque E est compactement connexe et rencontre $\mathrm{Int}(D_1)$ et $h^{-n}(\mathrm{Int}(D_1))$, il existe une partie compacte et connexe C de E qui rencontre encore $\mathrm{Int}(D_1)$ et $h^{-n}(\mathrm{Int}(D_1))$. On a

(1) C est libre (car E l'est);

(2) $h(C)$ est disjoint de D_1 (car $h(E)$ l'est).

(3) $h(\mathrm{Int}(D_1))$ rencontre $h(C)$;

(4) $h^{n-1}(h(C))$ rencontre $\mathrm{Int}(D_1)$.

Si (par miracle!) C est un disque topologique fermé, alors la suite $(D_1, h(C))$ forme une chaîne de disques périodique, contredisant le lemme de Franks 2.7, et la preuve est terminée. Dans le cas général, on remplace C par un disque D_2, de la faon suivante. On utilise les propriétés 3 et 4 ci-dessus pour trouver un point x_1 de l'intérieur de D_1 tel que le point $y_1 := h(x_1)$ est dans $h(C)$, et un point x_2 de $h(C)$ tel que le point $y_2 := h^{n-1}(x_2)$ est dans l'intérieur de D_1. Puisque $h(C)$ est un compact connexe libre et disjoint de D_1, il est inclus dans un ouvert connexe libre et disjoint de D_1 (par exemple un ϵ–voisinage de C), et il suffit de choisir un disque topologique fermé D_2 inclus dans cet ouvert, et contenant les points y_1 et x_2 dans son intérieur. La suite (D_1, D_2) forme alors une chaîne de disques périodique, et on aboutit à la même contradiction que dans le cas miraculeux. □

[17] Ceci est le seul endroit du texte où nous utilisons l'absence de chaîne périodique de plus de deux éléments.

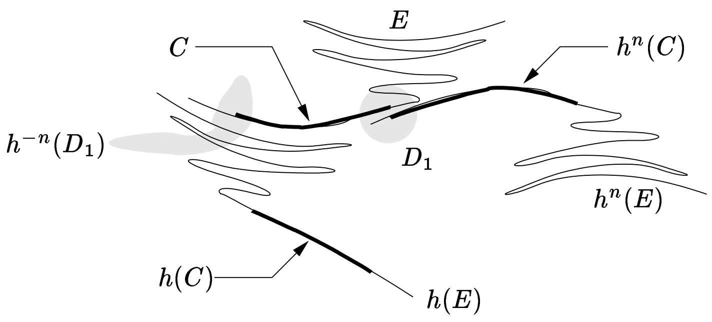

Figure 29: Construction d'une chaîne périodique à deux disques

9.2 Hypothèses

On se place maintenant dans un espace topologique abstrait $\widehat{F}$, et on considère un homéomorphisme h de $\widehat{F}$. On note (H) l'ensemble des hypothèses suivantes.

(1) l'espace topologique $\widehat{F}$ est compact, connexe, métrisable;

(2) l'homéomorphisme $h\colon \widehat{F} \to \widehat{F}$ a exactement deux points fixes, notés N et S; on pose alors $F = \widehat{F} \setminus \{N, S\}$;

(3) tous les points de l'ensemble F sont errants;

(4) (*propriété de minimalité*) il n'existe pas de sous-ensemble strict L de $\widehat{F}$ compact, connexe, et contenant N et S;

(5) (*souvenirs du plan*)

   (a) si C est une partie compacte de F, alors la limite supérieure de la suite $(h^n(C))_{n\geq 0}$ ne contient pas C;

   (b) si E est une partie compactement connexe de F, libre par h, et si $E \not\subset \mathrm{Adh}(h(E))$, alors la limite supérieure de $(h^n(\mathrm{Adh}(E)))_{n\geq 0}$ ne contient pas E.

Affirmation 9.4 *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite géodésique, et soit F un bord de composante de Reeb associée à (x_k). On munit l'ensemble $\widehat{F} = F \cup \{N, S\}$ de la topologie de la compactification Nord-Sud associée à $[(x_k)]$. Alors l'espace $\widehat{F}$ et l'homéomorphisme h prolongé à $\widehat{F}$ vérifient les hypothèses* (H).

Preuve On considère une droite géodésique Γ définissant les mêmes bouts que la suite (x_k). Nous vérifions successivement les différents points de l'hypothèse (H).

(1) La compacité de $\widehat{F}$ suit facilement de la Définition 7.12. Remarquons en particulier que $\widehat{F}$ est un espace topologique séparé.
Puisque F est connexe, pour voir que $\widehat{F}$ l'est également, il suffit de montrer la densité du premier dans le second. Par l'absurde, si F n'est pas dense dans $\widehat{F}$, alors il existe un voisinage de N ou de S dans $\widehat{F}$ qui est disjoint de F; supposons qu'il s'agisse de N. Par définition de la topologie sur $\widehat{F}$, ceci signifie que l'ensemble $F \cap \mathrm{Adh}(O_N(\Gamma))$ est compact. Ceci contredit le fait que F sépare les deux bouts de Γ (Lemme 7.11).
On peut vérifier que l'espace $\widehat{F}$ possède une base dénombrable d'ouverts. On a vu qu'il est aussi compact (et notamment séparé). On en déduit la métrisabilité à l'aide des théorème généraux (voir par exemple le corollaire 2.59 du chapitre 2 de [16]).

(2) Les points 2...

(3) ...et 3 de l'hypothèse (H) sont clairement vérifiés (l'errance vient du Corollaire 2.9).

(4) Soient x et y deux sommets de Γ tels que F soit un bord d'une des composantes de Reeb minimales associées à (x, y). Soit L un sous-ensemble strict de $\widehat{F}$, compact, contenant N et S. D'après le Lemme 4.6 sur la topologie des ensembles $F_i(x, y)$, L ne sépare pas les points x et y. Comme L est compact, les composantes connexes du complémentaire de L dans le plan sont ouvertes, donc connexes par arcs; il existe alors un arc γ' reliant x à y et évitant L. On en déduit facilement l'existence d'une droite topologique Γ', incluse dans $\Gamma \cup \gamma'$, et disjointe de L. Comme Γ' sépare les points N et S dans $\mathbb{R}^2 \cup \{N, S\}$, l'ensemble L ne peut pas être connexe. Ceci prouve le quatrième point.

(5) Ces deux propriétés correspondent aux Lemmes 9.2 et 9.3. □

Sous les hypothèses (H), on définit les ensembles $W_{N\rightarrow}(F)$, *etc.* comme indiqué à la Section 7.3. Rappelons que l'errance des points implique que tout point va vers le Nord ou le Sud, et vient du Nord ou du Sud.

9.3 Énoncés

Le résultat principal de cette section est une version abstraite de la Proposition 7.20; jointe à l'Affirmation 9.4, cette version abstraite entraînera immédiatement la Proposition 7.20.

Proposition 7.20-bis *Sous les hypothèses* (H),

- *l'un des deux ensembles $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ est vide;*
- *l'autre est un ouvert connexe dense dans F;*
- *les ensembles $W_{N\to N}(F)$ et $W_{S\to S}(F)$ sont fermés.*

Voici les énoncés des lemmes de la démonstration. Les preuves se trouvent dans la section suivante.

Lemme 9.5 *On se place sous les hypothèses 1, 2 et 3 de* (H). *Supposons que pour tous voisinages V_N de N et V_S de S, il existe un entier positif n tel que $h^n(V_S)$ rencontre V_N. Alors l'ensemble $W_{S\to N}(F)$ est non vide.*

Lemme 9.6 *Sous les hypothèses* (H), *toute composante compactement connexe de F est entièrement incluse dans l'un des quatre ensembles $W_{N\to S}(F)$, $W_{S\to N}(F)$, $W_{N\to N}(F)$, $W_{S\to S}(F)$.*

Lemme 9.7 *On se place sous les hypothèses* (H). *Soit E une composante compactement connexe de F incluse dans $W_{S\to N}(F)$.*

- *Si E est invariante par h, alors E est dense dans $\widehat{F}$;*
- *dans le cas contraire, E est libre, et E est incluse dans l'adhérence de $h(E)$ ou dans celle de $h^{-1}(E)$. De plus, l'union de tous les itérés de E est un ensemble connexe, dense dans $\widehat{F}$, et invariant par h.*

Corollaire 9.8 *Si l'ensemble $W_{S\to N}(F)$ n'est pas vide, il est dense dans F et connexe.*

9.4 Preuves

On note $\mathcal{K}(\widehat{F})$ l'espace des parties compactes de $\widehat{F}$, muni de la métrique de Hausdorff. On rappelle que c'est un espace métrique compact.

Preuve du Lemme 9.5 La preuve est essentiellement contenue dans la preuve de la Proposition 6 de l'article [24]. En voici une version abrégée. L'hypothèse entraîne qu'il existe une suite $(x_p)_{p\geq 0}$ d'éléments de F convergeant vers S, et une suite d'entiers positifs (n_p) telle que la suite $(h^{n_p}(x_p))_{p\geq 0}$ converge vers N. Soit

$$K_p = \{x_p, h(x_p), \dots, h^{n_p}(x_p)\}.$$

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite (K_p) converge dans l'espace $\mathcal{K}(\widehat{F})$. On note L sa limite. La fin de la preuve consiste à montrer que L contient une orbite allant de S à N. Pour cela, on montre d'abord que l'ensemble L est invariant par h, et qu'il est localement fini, au sens où toute partie compacte de $F = \widehat{F} \setminus \{N, S\}$ ne contient qu'un nombre fini de points de L (ceci vient de l'errance des points, propriété 3 de l'hypothèse (H)). Soit d une distance sur $\widehat{F}$ (propriété 1 de l'hypothèse (H)). Puisque L est localement fini, il existe un réel positif r tel qu'aucun point de L n'est à distance r de N. On appelle alors V_N l'ensemble des points x de $\widehat{F}$ vérifiant $d(N,x) < r$, V_S l'ensemble de ceux vérifiant $d(N,x) > r$. On pose maintenant $E_{S \to N}(L) = L \cap V_S \cap h^{-1}(V_N)$ et $E_{N \to S}(L) = L \cap V_N \cap h^{-1}(V_S)$. Ce sont des ensembles finis. Le fait que L soit limite de morceaux d'orbites allant d'un point proche de S à un point proche de N permet de montrer que la différence entre le nombre d'éléments de $E_{S \to N}(L)$ et le nombre d'éléments de $E_{N \to S}(L)$ vaut 1. D'autre part, un petit argument combinatoire montre que cette différence est égale à la différence entre le nombre d'orbites de L dans $W_{S \to N}(F)$ et le nombre d'orbites de L dans $W_{N \to S}(F)$. En particulier, L doit contenir au moins une orbite dans $W_{S \to N}(F)$, ce que l'on voulait. □

Preuve du Lemme 9.6 On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une composante compactement connexe de F contenant deux points x et y ayant des destins dynamiques différents; pour fixer les idées, on suppose par exemple que $x \in W_{\to N}(F)$ et $y \in W_{\to S}(F)$. Par définition des composantes compactement connexes, il existe un compact connexe C, inclus dans F, contenant x et y. Soit C_∞ une valeur d'adhérence, dans l'espace $\mathcal{K}(\widehat{F})$, de la suite $(h^n(C)_{n \geq 0})$. Il s'agit d'un sous-ensemble compact et connexe de $\widehat{F}$, et puisque C contient le point x qui va vers le Nord et le point y qui va vers le Sud, l'ensemble C_∞ contient N et S. D'après l'hypothèse de minimalité (propriété 4 de l'hypothèse (H)), on a alors $C_\infty = \widehat{F}$. En particulier C_∞ contient C, et *a fortiori* la limite supérieure de la suite $(h^n(C))_{n \geq 0}$ contient C. Ceci contredit le premier "souvenir du plan" (hypothèse 5 (a) de (H)). □

Preuve du Lemme 9.7 Tout d'abord, il est clair que l'image par h d'une composante compactement connexe de F est encore une composante compactement connexe de F; par conséquent, chaque composante compactement connexe est soit invariante, soit libre par h.

Premier cas Soit E une composante compactement connexe de F incluse dans $W_{S \to N}$, que l'on suppose invariante par h. Comme E contient une orbite allant de S à N, l'adhérence de E dans $\widehat{F}$, qui est compacte et connexe, contient N et S. Par minimalité (propriété 4), on a donc $\mathrm{Adh}(E) = \widehat{F}$.

Deuxième cas Soit E une composante compactement connexe de F incluse dans $W_{S\to N}$, que l'on suppose libre par h. D'après le Corollaire A.2 de l'appendice, E "va à l'infini", ie l'adhérence de E contient l'un au moins des deux points N et S. *On suppose dans un premier temps que* $\mathrm{Adh}(E)$ *contient le point* S. Nous allons montrer que dans ce cas, $E \subset \mathrm{Adh}(h(E))$. Soit E_∞ une valeur d'adhérence, dans $\mathcal{K}(\widehat{F})$, de la suite des itérés positifs de $\mathrm{Adh}(E)$: l'ensemble E_∞ est compact et connexe. Comme le point S est dans $\mathrm{Adh}(E)$, il appartient aussi à E_∞. Comme E est incluse dans $W_{S\to N}$, l'ensemble E_∞ contient aussi le point N. Par minimalité (hypothèse 4), on a alors $E_\infty = \widehat{F}$. En particulier, E_∞ contient E. On conclut que $E \subset \mathrm{Adh}(h(E))$ grâce au deuxième "souvenir du plan" (hypothèse 5 (b) de (H)).

On a donc prouvé que si $S \in \mathrm{Adh}(E)$, alors $E \subset \mathrm{Adh}(h(E))$. On en déduit d'abord que l'union des itérés de E est connexe. Ensuite, la suite $(h^n(\mathrm{Adh}(E)))$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{K}(\widehat{F})$, donc convergente. Par minimalité, sa limite est $\widehat{F}$ et par conséquent, l'union des itérés de E est dense dans $\widehat{F}$. Il est clair qu'il s'agit d'un ensemble invariant par h.

Il reste à traiter le cas où $\mathrm{Adh}(E)$ *contient le point* N. En étudiant cette fois-ci les itérés de E par h^{-1}, on montre alors que $E \subset \mathrm{Adh}(h^{-1}(E))$, et on conclut de manière analogue. □

Preuve du Corollaire 9.8 Si l'ensemble $W_{S\to N}(F)$ n'est pas vide, d'après le Lemme 9.6, il contient une composante compactement connexe E de F. Le Lemme 9.7 entraîne alors la densité de l'union E' des itérés de E, donc celle de $W_{S\to N}(F)$. Ce lemme montre aussi que E' est connexe; $W_{S\to N}(F)$ est connexe car il contient un ensemble connexe dense. □

Preuve de la Proposition 7.20 *Montrons tout d'abord que l'un au moins des deux ensembles* $W_{S\to N}(F)$ *et* $W_{N\to S}(F)$ *n'est pas vide.*[18] On raisonne par l'absurde: dans le cas contraire, les deux ensembles $W_{S\to S}(F) \cup \{S\}$ et $W_{N\to N}(F) \cup \{N\}$ forment une partition de $\hat{F}$. Par connexité, il existe un point de l'un qui est dans l'adhérence de l'autre. On en déduit que pour tout

[18] Ce raisonnement fournit une alternative à la démonstration de l'article [24], alternative qui permet de se passer du lemme de Birkhoff, et donc de l'hypothèse de connexité locale.

couple V_N, V_S de voisinages de N et S respectivement, il existe un itéré positif de V_S qui rencontre V_N (en utilisant la continuité des itérés de h). Le Lemme 9.5 affirme alors que l'ensemble $W_{S\to N}(F)$ n'est pas vide, ce que l'on voulait démontrer.

Montrons maintenant que l'un au moins des deux ensembles $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ est vide.[19] Supposons que l'ensemble $W_{S\to N}(F)$ ne soit pas vide. Alors il est dense dans F (Corollaire 9.8). D'autre part, puisque $F = W_{\to N}(F) \cup W_{\to S}(F)$, on peut écrire l'ensemble $W_{\to N}(F)$ de la manière suivante:

$$W_{\to N}(F) = \{x \in F : \forall V_N \text{ voisinage de } N,\ \exists n > 0 \text{ tel que } h^n(x) \in V_N\}$$

On en déduit que l'ensemble $W_{S\to N}(F)$ est un G_δ de F (Rappelons qu'un ensemble est un G_δ s'il peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts). De manière symétrique, l'ensemble $W_{N\to S}(F)$ est aussi un G_δ de F qui est soit vide, soit dense dans $\widehat{F}$. Comme $\widehat{F}$ est un espace métrique compact, il a la propriété de Baire: il ne peut pas contenir deux ensembles G_δ denses disjoints. On en déduit que l'un des deux ensembles $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ est vide.

On peut maintenant montrer que l'ensemble $W_{N\to N}(F)$ est fermé: dans le cas contraire, il existerait un point x dans l'adhérence de $W_{N\to N}(F)$ qui viendrait du Sud ou qui irait vers le Sud; dans les deux cas, on montre que pour tous voisinages V_N et V_S de N et S respectivement, il existerait un itéré positif de V_N rencontrant V_S et un itéré positif de V_S rencontrant V_N. On peut alors appliquer deux fois le Lemme 9.5, et voir qu'aucun des deux ensembles $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ n'est vide. Ceci contredirait ce qui précède. De même, l'ensemble $W_{S\to S}(F)$ est fermé, ce qui prouve le troisième point de la proposition.

Puisque les quatre ensembles $W_{N\to N}(F)$, $W_{S\to S}(F)$, $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ forment une partition de F, on en déduit que celui des ensembles $W_{S\to N}(F)$ et $W_{N\to S}(F)$ qui n'est pas vide est ouvert. Le Corollaire 9.8 montre qu'il est également dense et connexe. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Références

[1] **S A Andrea**, *On homoeomorphisms of the plane which have no fixed points*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 30 (1967) 61–74

[2] **S A Andrea**, *The plane is not compactly generated by a free mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970) 481–498

[19] Cette preuve simple, *via* l'argument de G_δ, m'a été suggérée par Sylvain Crovisier.

[3] **F Béguin**, **F Le Roux**, *Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer, homéomorphismes de Reeb*, Bull. Soc. Math. France 131 (2003) 149–210

[4] **L E J Brouwer**, *Beweis des ebenen translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1912) 37–54

[5] **M Brown**, **E E Slaminka**, **W Transue**, *An orientation preserving fixed point free homeomorphism of the plane which admits no closed invariant line*, Topology Appl. 29 (1988) 213–217

[6] **S S Cairns**, *An elementary proof of the Jordan–Schoenflies theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 860–867

[7] **E W Daw**, *A maximally pathological Brouwer homeomorphism*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994) 559–573

[8] **J Franks**, *Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem*, Ann. of Math. (2) 128 (1988) 139–151

[9] **J Franks**, *Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1989) 107–115

[10] **J Franks**, *A new proof of the Brouwer plane translation theorem*, Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992) 217–226

[11] **C Godbillon**, *Fibrés en droites et feuilletages du plan*, Enseignement Math. (2) 18 (1972) 213–224 (1973)

[12] **C Godbillon**, **G Reeb**, *Fibrés sur le branchement simple*, Enseignement Math. (2) 12 (1966) 277–287

[13] **L Guillou**, *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré–Birkhoff*, Topology 33 (1994) 331–351

[14] **A Haefliger**, **G Reeb**, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan*, Enseignement Math. (2) 3 (1957) 107–125

[15] **T Homma**, **H Terasaka**, *On the structure of the plane translation of Brouwer*, Osaka Math. J. 5 (1953) 233–266

[16] **J G Hocking**, **G S Young**, *Topology*, second edition, Dover Publications Inc. New York (1988)

[17] **W Kaplan**, *Regular curve-families filling the plane I*, Duke Math. J. 7 (1940) 154–185

[18] **W Kaplan**, *Regular curve-families filling the plane II*, Duke Math J. 8 (1941) 11–46

[19] **B Kerékjártó**, *Sur le groupe des transformations topologiques du plan* Ann. S.N.S. Pisa (1934)

[20] **K Kuratowski**, *Topologie II*, Troisième Édition, Monografie Matematyczne, Tom 21, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw (1961)

[21] **P Le Calvez**, **A Sauzet**, *Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer*, Exposition. Math. 14 (1996) 277–287

[22] **F Le Roux**, *Étude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, doctoral thesis, Institut Fourier, Grenoble (1997)

[23] **F Le Roux**, *Bounded recurrent sets for planar homeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999) 1085–1091

[24] **F Le Roux**, *Migration des points errants d'un homéomorphisme de surface*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000) 225–230

[25] **F Le Roux**, *Il n'y a pas de classification borélienne des homéomorphismes de Brouwer*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001) 233–247

[26] **F Le Roux**, *Homéomorphismes de surfaces: théorèmes de la fleur de Leau–Fatou et de la variété stable*, Astérisque (2004) vi+210

[27] **F Le Roux**, *Un indice qui affine l'indice de Poincaré–Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces*, `arXiv:math.DS/0506042`

[28] **H Nakayama**, *A non-flowable plane homeomorphism whose non-Hausdorff set consists of two disjoint lines*, Houston J. Math. 21 (1995) 569–572

[29] **H Nakayama**, *On dimensions of non-Hausdorff sets for plane homeomorphisms*, J. Math. Soc. Japan 47 (1995) 789–793

[30] **M H A Newman**, *Elements of the topology of plane sets of points*, Dover Publications Inc. New York (1992)

Appendices

A Topologie

A.1 Topologie générale

Proposition A.1 *Soit X un espace topologique connexe, métrisable, qui est localement connexe ou compact. Soit F une partie fermée non vide de X, et A une composante connexe de $X \setminus F$. Alors ∂A est non vide et inclus dans ∂F. En particulier, si F est connexe, $A \cup F$ est connexe.*

Le cas localement connexe est très facile, la preuve est laissée au lecteur (par ailleurs, nous ne l'utilisons que dans le cas où X est le plan $\mathbb{R}^2$). Le cas compact est plus difficile; la preuve nécessite la notion d'ϵ*–chaîne*. En fait, nous ne l'utilisons que dans la preuve du corollaire suivant, sous une version faible: il nous suffit de savoir que ∂A *rencontre* ∂F. Sous cette forme faible, l'énoncé est classique (voir [20], chap. V, 42, III, théorème 2).

Corollaire A.2 *On se place dans un espace métrique X connexe et localement compact, mais non compact. Notons $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X, et supposons que $\hat{X}$ est métrisable. Alors pour toute composante compactement connexe E de X, le point ∞ est dans l'adhérence dans $\hat{X}$ de E.*

Preuve du Corollaire A.2 Comme X est localement compact, l'espace $\hat{X}$ est compact. Soit x un point de X, et V un voisinage fermé du point ∞ ne contenant pas x. Soit C_x la composante connexe de x dans $\hat{X} \setminus V$. D'après la Proposition A.1, l'adhérence de C_x rencontre V. Or l'adhérence de C_x est compacte et ne contient pas le point ∞, elle est donc incluse dans la composante compactement connexe de x dans X. Celle-ci rencontre donc tout voisinage du point ∞, donc son adhérence contient le point ∞. □

A.2 Topologie plane

Voici une version du lemme d'Alexander (que l'on peut prouver avec un peu d'homologie):

Théorème A.3 (Corollaire 2 du théorème V.9.2 de [30]) *Soient U_1 et U_2 deux ouverts connexes du plan. Si $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^2$, alors $U_1 \cap U_2$ est connexe.*

Ensuite, un énoncé dans la même veine, plus fin:

Théorème A.4 (Théorème V.14.2 de [30]) *Si D est un ouvert connexe du plan, alors les composantes connexes de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Adh}(D)$ ont toutes des frontières connexes.*

On en déduit immédiatement:

Théorème A.5 (Théorème V.14.3 de [30]) *Si x et y sont deux points du plan séparés par une partie fermée F, alors il existe une composante connexe de F qui les sépare.*

B Exemples

Dans cette section, nous décrivons les composantes de Reeb sur quelques exemples (très classiques, voir en particulier l'appendice de [15]). Rappelons que les exemples les plus simples sont obtenus en intégrant les champs de vecteurs (cf les Figures 1 et 2 de l'introduction). Pour ceux-ci, toute composante de Reeb (F,G) associée à un couple de points (x,y) est minimale (sauf éventuellement si elle est dégénérée), et les bords F et G sont des droites topologiques invariantes par la dynamique. De plus, les flèches verticales associées à une suite géodésique infinie sont toujours alternativement $\uparrow$ et $\downarrow$ (Section 8).

Les autres exemples sont obtenus en modifiant des flots. Sur la Figure 30, à gauche, le couple (x,y) possède une composante de Reeb minimale (F,G) dont le bord négatif F est libre (et non pas invariant, cf Lemme 4.7). Sur l'exemple de droite, le couple (x,y) possède une infinité de composantes de Reeb (dont le bord négatif contient la droite verticale F et les itérés d'un segment horizontal de longueur variable). Par contre, il y a bien une unique composante minimale, dont les bords sont encore des droites topologiques. Notons qu'on peut bien sûr compliquer les bords des composantes de Reeb minimales pour obtenir des bords qui ne sont pas localement connexes. On peut trouver des constructions formelles de ces exemples dans [22, 25]. Le dernier exemple

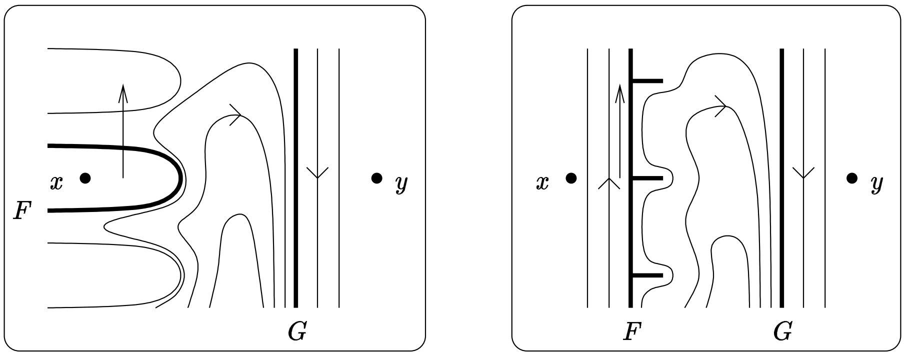

Figure 30: Exemples de composantes de Reeb (I)

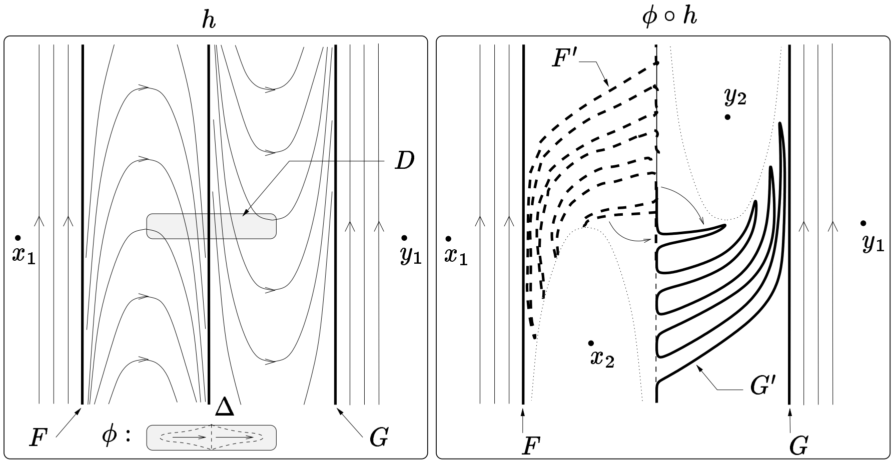

Figure 31: Exemples de composantes de Reeb (II)

est un peu plus compliqué. Nous partons d'un homéomorphisme h temps 1 d'un flot (Figure 31, gauche). Les points x_1 et y_1 sont à h–distance 3, deux composantes de Reeb (F, Δ) et (Δ, G) leur sont associées. On perturbe h en le composant par un homéomorphisme ϕ, à support dans un disque topologique libre D (comme indiqu sur la figure). Considérons l'homéomorphisme perturbé $h' = \phi \circ h$. La droite Δ est maintenant "dédoublée" en deux courbes F' et G', d'adhérences respectives $F' \cup F$ et $G' \cup G$. La distance de translation entre les deux points x_1 et y_1 a chuté à 2; l'unique composante de Reeb minimale du couple (x_1, y_1) est (F, G). Les points x_2 et y_1 sont aussi à h'–distance 2; par contre, la composante minimale de (x_2, y_1) est $(F \cup F', G)$. Ainsi, $(F \cup F', G)$ est une composante de Reeb pour chacun des couple (x_1, y_1) et (x_2, y_1), cependant elle est minimale pour le second mais pas pour le premier. De même, $(F, G' \cup G)$ est la composante minimale associée au couple (x_1, y_2). Les points x_2 et y_2, eux, sont à h'–distance 1.

Sur cet exemple, on peut voir la nécessité de prendre l'adhérence dans la formule définissant les composantes minimales (détaillée à la Section 4.3; rappelons que $F_1(x, y)$ est le bord de la composante connexe de y dans l'ensemble complémentaire de l'*adhérence* de la boule $B_1(x)$, *etc.*). En effet, considérons les boules pour la distance de translation associée à h'. La boule $B_1(x_1)$ est l'ouvert à gauche de la courbe G'; symétriquement, $B_1(y_1)$ est l'ouvert à droite de la courbe F'. Ainsi, le complémentaire de $B_1(x_1)$ est connexe, sa frontière est $G' \cup G$; de même, la frontière du complémentaire de $B_1(y_1)$ est $F' \cup F$; mais le couple $(F' \cup F, G' \cup G)$ ne peut pas être une composante de Reeb puisque F' et G' ne sont même pas disjoints. Par contre le complémentaire de l'*adhérence* de $B_1(x_1)$ a deux composantes connexes (l'une contenant y_1, l'autre contenant y_2), dont les frontières sont respectivement G et $G' \cup G$.

On peut facilement étendre cet exemple pour qu'il existe une courbe géodésique infinie dont x_1 et y_1 sont deux sommets (Section 7). Dans ce cas, le couple (F, G) est une composante de Reeb associée à cette courbe géodésique, et les deux flèches verticales indiquant le sens de la dynamique dans F et G sont égales à $\uparrow$ (rappelons que ceci n'arrive jamais dans le cas du temps 1 d'un flot). On peut voir ici l'importance de la minimalité des composantes de Reeb considérées dans la définition des flèches verticales (Section 8): en effet, le couple $(F, G' \cup G)$ est une composante de Reeb (non minimale), et son bord $G' \cup G$ contient à la fois des points allant de N vers S (dans G') et d'autres allant de S vers N (dans G); ainsi, il n'est pas possible de définir le type dynamique de ce bord (la Proposition 7.20 devient fausse pour les composantes non minimales).

De même, on peut étendre l'exemple pour qu'il existe une courbe géodésique infinie dont x_1 et y_2 sont des sommets. Cette fois-ci, c'est $(F, G' \cup G)$ qui est une composante de Reeb associée; les flèches correspondantes sont $(\uparrow, \downarrow)$. Confrontons cet exemple à l'étude de la dynamique dans les continus minimaux (Proposition 7.20 et Section 9): l'ensemble $G' \cup G \cup \{N, S\}$ est muni de la topologie de la compactification Nord-Sud (pour laquelle l'adhérence de G est $G \cup \{S\}$, contrairement à ce que suggère la figure, cf Section 7.2). Cette topologie en fait un espace compact, et les composantes compactement connexes de $G \cup G'$ sont précisément G et G'. Les points de G' vont tous du Nord au Sud, les points de G vont tous du Sud au Sud. On obtient ainsi un exemple avec deux types de comportements dynamiques. On pourrait également obtenir un bord avec trois types de comportements (ce qui est le maximum autorisé par la Proposition 7.20; ceci est une remarque commune avec C. Bonatti et S. Crovisier). Terminons par deux questions.

Question *On considère la compactification Nord-Sud induite par une géodésique infinie, et (F, G) une composante de Reeb associée à cette géodésique. L'ensemble $W_{N \to S}(G)$ est-il toujours compactement connexe?*

Dans l'exemple précédent, l'ensemble $G' \cup G$ n'est pas compactement connexe, mais $W_{N\to S}(G' \cup G) = G'$ l'est.

Question *Soit (F,G) une composante de Reeb minimale (associée à un couple (x,y) quelconque). Peut-il exister deux points z, z' dans le bord G tels que $d_h(z,z') = 3$?*

Autrement dit, le "h–diamètre" d'un bord de composante de Reeb minimale peut-il être égal à 3? On voit facilement qu'il est inférieur ou égal à 3, et dans l'exemple précédent le h-diamètre de $G' \cup G$ est 2.