*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5*

*УДК 512.54*

# О СЛАБО S–ВЛОЖЕННЫХ И СЛАБО $\tau$–ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУППАХ

**С. Чен, В. Го**

**Аннотация.** Пусть $G$ — конечная группа. Подгруппа $H$ группы $G$ называется слабо S-вложенной в $G$, если в $G$ существует нормальная подгруппа $K$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \leq H_{seG}$, где $H_{seG}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы $H$, которые S-квазинормально вложены в $G$. Будем говорить, что подгруппа $H$ группы $G$ *слабо $\tau$-вложена в* $G$, если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \leq H_{\tau G}$, где $H_{\tau G}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы $H$, которые $\tau$-квазинормальны в $G$. В настоящей работе исследуются свойства слабо S-вложенных и слабо $\tau$-вложенных подгрупп. Также эти понятия используются для изучения строения конечных групп.

**Ключевые слова:** конечная группа, слабо S-вложенная подгруппа, слабо $\tau$-вложенная подгруппа.

## 1. Введение

Все группы, рассматриваемые в статье, конечны, и $G$ всегда означает конечную группу. Обозначения и термины, не введенные в тексте, стандартны, и их можно найти в [1–3].

Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется S-*квазинормальной* (S-*перестановочной* или $\pi$-*квазинормальной*) в $G$, если $H$ перестановочна с любой силовской подгруппой группы $G$. Это понятие было введено Кегелем [4] в 1962 г. и впоследствии изучалось многими авторами. В 1998 г. Баллестер-Болинше и Педраса-Агилера [5] рассмотрели более общее понятие S-квазинормальной вложенности: подгруппа $H$ группы $G$ называется S-*квазинормально вложенной* в $G$, если любая силовская подгруппа группы $H$ является силовской подгруппой некоторой S-квазинормальной подгруппы группы $G$. Также рассматривались и другие обобщения. Например, в 2008 г. Ли и др. [6] ввели понятие SS-квазинормальности: подгруппа $H$ группы $G$ называется SS-*квазинормальной* в $G$, если в $G$ существует добавление $B$ к $H$ такое, что $H$ перестановочна с любой силовской подгруппой группы $B$. В 1987 г. Чен [7] ввел понятие S-полуперестановочности: подгруппа $H$ группы $G$ называется S-*полуперестановочной* в $G$, если $H$ перестановочна с любой силовской $p$-подгруппой группы $G$ такой, что $(p, |H|) = 1$. Кроме того, в 2008 г. В. О. Лукьяненко и А. Н. Скиба [8] предложили понятие $\tau$-квазинормальности: подгруппа $H$ группы $G$ называется $\tau$-*квазинормальной* в $G$, если $H$ перестановочна со всеми силовскими $q$-подгруппами $Q$ группы $G$ такими, что $(q, |H|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$.

Research is supported by a NNSF grant of China (grant #11071229), and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant 20113402110036).

Несложно заметить, что любая SS-квазинормальная или S-полуперестановочная подгруппа группы $G$ будет $\tau$-квазинормальной в $G$. Действительно, из S-полуперестановочности $\tau$-квазинормальность очевидно следует по определению. Предположим, что подгруппа $H$ группы $G$ SS-квазинормальна в $G$. Тогда в $G$ есть подгруппа $B$ такая, что $G = HB$ и $H$ перестановочна с любой силовской подгруппой группы $B$. Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ такая, что $(p, |H|) = 1$. Существует элемент $h \in H$ такой, что $P^h \leq B$. Тогда $HP^h = P^hH$ и, значит, $HP = PH$. Таким образом, $H$ S-полуперестановочна и, как следствие, $\tau$-квазинормальна в $G$.

В 2009 г. Го, Шум и А. Н. Скиба [9] предложили определение S-вложенной подгруппы: подгруппа $H$ группы $G$ называется S-*вложенной* в $G$, если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \leq H_{sG}$, где $H_{sG}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы $H$, которые S-квазинормальны в $G$.

В продолжение исследований S-квазинормально вложенных подгрупп в 2011 г. Ли и др. [10] ввели следующее понятие слабой S-вложенности.

Определение 1.1. Подгруппа $H$ группы $G$ называется *слабо* S-*вложенной* в $G$, если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \leq H_{seG}$, где $H_{seG}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы $H$, которые S-квазинормально вложены в $G$.

Определение 1.2. Подгруппа $H$ группы $G$ называется *слабо* $\tau$-*вложенной* в $G$, если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \leq H_{\tau G}$, где $H_{\tau G}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы $H$, которые $\tau$-квазинормальны в $G$.

Очевидно, любая $\tau$-квазинормальная подгруппа и любая S-вложенная подгруппа группы $G$ будут слабо $\tau$-вложенными в $G$. Следовательно, любая S-квазинормальная, SS-квазинормальная или S-полуперестановочная подгруппа группы $G$ также слабо $\tau$-вложена в $G$. Однако, как показывают следующие два примера, в общем случае обратное неверно.

Пример 1.3. Пусть $G = S_4$ — симметрическая группа степени 4 и $H = \langle(14)\rangle$. Возьмем $Q = \langle(123)\rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Тогда, очевидно, $Q^G = A_4$, где $A_4$ — знакопеременная группа степени 4. Поскольку $HQ \neq QH$, группа $H$ не $\tau$-квазинормальна в $G$. Однако в силу того, что $G = HA_4$ и $H \cap A_4 = 1$, группа $H$ слабо $\tau$-вложена в $G$.

Пример 1.4. Пусть $G = A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $H = A_4$. В силу простоты группы $A_5$ единственные нормальные подгруппы группы $G$ — это 1 и $G$. Пусть $P$ — силовская 2-подгруппа группы $G$, содержащая $\langle(15)\rangle$. Поскольку $PH \neq HP$, группа $H$ не S-квазинормальна в $G$ и, значит, $H$ не S-вложена в $G$. Однако $G = H\langle(12345)\rangle$, поэтому $H$ $\tau$-квазинормальна в $G$, следовательно, она слабо $\tau$-вложена в $G$.

Более того, следующие два примера демонстрируют, что слабая S-вложенность и слабая $\tau$-вложенность не зависят друг от друга.

Пример 1.5. Пусть $G = A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $H = \langle(123)\rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Поскольку любая холлова подгруппа S-квазинормально вложена в $G$, группа $H$ слабо S-вложена в $G$. С другой стороны, пусть $Q = \langle(12345)\rangle \in \mathrm{Syl}_5(G)$. Тогда $Q^G = G$. Ясно, что $HQ$ не подгруппа в $G$. Значит, $H$ не $\tau$-квазинормальна в $G$. В силу того, что $H_{\tau G}$ $\tau$-квазинормальна в $G$ (см. лемму 2.7(1) ниже), получаем, что $H$ не является слабо $\tau$-вложенной в $G$.

Пример 1.6. Пусть $A = A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $B = \mathrm{Inn}(A_5) \cong A_5$. Положим $G = A \rtimes B$ и $H = A \rtimes \langle(12)(34)\rangle$. Поскольку $\pi(G) = \pi(H)$, группа $H$ будет $\tau$-квазинормальной в $G$ и, значит, слабо $\tau$-вложенной в $G$. С другой стороны, $Z(A_5) = 1$, поэтому $B \ntrianglelefteq G$. Очевидно, что субнормальные подгруппы группы $G$ — это в точности 1, $A$ и $G$. Предположим, что $H$ слабо S-вложена в $G$. Тогда существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \leq H_{seG}$. Поскольку $H$ не S-квазинормальна в $G$ (см. лемму 2.1(1) ниже), единственная возможность — это $K = G$. Следовательно, $H = H_{seG}$. Для любой неединичной подгруппы $L$ группы $H$, S-квазинормально вложенной в $G$, и любой неединичной силовской подгруппы $D$ группы $L$ существует S-квазинормальная подгруппа $U$ группы $G$ такая, что $D \in \mathrm{Syl}(U)$. Из того, что $\pi(L) \subseteq \pi(|G : L|)$, и леммы 2.1(1) вытекает равенство $U = A$ и, значит, $L \leq A$. Следовательно, $H = H_{seG} \leq A$; противоречие. Таким образом, $H$ не является слабо S-вложенной в $G$.

Цель настоящей работы — изучение строения конечных групп с использованием понятий слабо S-вложенности и слабо $\tau$-вложенности. Для краткости будем говорить, что подгруппа $H$ группы $G$ *удовлетворяет условию* ($\triangle$) в $G$, если $H$ слабо S-вложена или слабо $\tau$-вложена в $G$.

## 2. Предварительные леммы

В статье $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{U}$ обозначают классы конечных нильпотентных, $p$-нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ через $Z_\mathfrak{F}(G)$ (и, как правило, через $Z_\infty(G)$ вместо $Z_\mathfrak{N}(G)$) обозначается $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы $G$, т. е. произведение всех нормальных подгрупп $L$ группы $G$, $G$-главные факторы $H/K$ которых удовлетворяют условию $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Также через $|G|_p$ обозначается порядок силовской $p$-подгруппы группы $G$.

**Лемма 2.1** [4, 11]. *Предположим, что $H$ S-квазинормальна в $G$, $U \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *$H$ субнормальна в $G$.*

(2) *$H/H_G$ нильпотентна.*

(3) *$H \cap U$ S-квазинормальна в $U$.*

(4) *$HN/N$ S-квазинормальна в $G/N$.*

(5) *Если $H$ — $p$-подгруппа группы $G$, то $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

**Лемма 2.2** [12, следствие 1]. *Предположим, что $A$ и $B$ — S-квазинормальные подгруппы в $G$. Тогда $\langle A, B\rangle$ и $A \cap B$ также S-квазинормальны в $G$.*

**Лемма 2.3.** *Предположим, что $H$ — S-квазинормальная подгруппа в $G$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа в $H$, где $p$ — простой делитель числа $|H|$. Если $H_G = 1$, то $P$ S-квазинормальна в $G$.*

Доказательство. Это утверждение легко выводится из леммы 2.1(2) и [12, предложение B].

**Лемма 2.4** [5, лемма 1]. *Предположим, что $H$ — S-квазинормально вложенная подгруппа в $G$, $U \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *Если $H \leq U$, то $H$ — S-квазинормально вложенная подгруппа в $U$.*

(2) *$HN$ — S-квазинормально вложенная подгруппа $G$, и $HN/N$ — S-квазинормально вложенная подгруппа $G/N$.*

Следующая лемма является прямым следствием леммы 2.4.

**Лемма 2.5.** *Предположим, что $H \le U \le G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда*
(1) $H_{seG} \le H_{seU}$;
(2) $H_{seG}N/N \le (HN/N)_{se(G/N)}$.

**Лемма 2.6.** *Предположим, что $H$ — $\tau$-квазинормальная подгруппа в $G$, $U \le G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда выполнены следующие утверждения.*
(1) *Если $H \le U$, то $H$ $\tau$-квазинормальна в $U$.*
(2) *Если $\pi(HN/N) = \pi(H)$, то $HN/N$ $\tau$-квазинормальна в $G/N$.*
(3) *Если $(|H|, |N|) = 1$, то $HN/N$ $\tau$-квазинормальна $G/N$.*

Доказательство. См. [13, лемма 2.2] для (1) и (3). Докажем (2). Пусть $Q/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$, причем $(|HN/N|, |(Q/N)^{(G/N)}|) \neq 1$ и $q \notin \pi(HN/N) = \pi(H)$. Тогда для некоторой силовской $q$-подгруппы $G_q$ группы $G$ имеем $Q = G_qN$. Поскольку $(Q/N)^{(G/N)} = Q^G/N = (G_qN)^G/N = G_q^GN/N \cong G_q^G/G_q^G \cap N$, получаем, что $\left(|H|, |G_q^G|\right) \neq 1$. Следовательно, по условию леммы выполнено $(HN/N)(Q/N) = HG_qN/N = G_qHN/N = (Q/N)(HN/N)$.

Из леммы 2.6 непосредственно следует

**Лемма 2.7.** *Предположим, что $H \le U \le G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда выполнены следующие утверждения.*
(1) [13, лемма 2.3(1)]. *Если $H$ — $p$-подгруппа, то $H_{\tau G}$ $\tau$-квазинормальна в $G$ и $H_G \le H_{\tau G}$.*
(2) [13, лемма 2.3(2)]. $H_{\tau G} \le H_{\tau U}$.
(3) *Если $H$ — $p$-подгруппа, то $H_{\tau G}N/N \le (HN/N)_{\tau(G/N)}$.*
(4) *Если $(|H|, |N|) = 1$, то $H_{\tau G}N/N \le (HN/N)_{\tau(G/N)}$.*

**Лемма 2.8.** *Пусть $P$ — $p$-подгруппа в $G$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*
(1) *$P$ S-квазинормальна в $G$.*
(2) [14, лемма 2.4]. *$P \le O_p(G)$ и $P$ S-квазинормально вложена в $G$.*
(3) [13, лемма 2.2(4)]. *$P \le O_p(G)$ и $P$ $\tau$-квазинормальна в $G$.*

**Лемма 2.9** [10, лемма 2.4]. *Предположим, что $H$ слабо S-вложена в $G$, $U \le G$ и $N \trianglelefteq G$.*
(1) *Если $H \le U$, то $H$ слабо S-вложена в $U$.*
(2) *Если $N \le H$, то $H/N$ слабо S-вложена в $G/N$.*
(3) *Если $(|H|, |N|) = 1$, то $HN/N$ слабо S-вложена в $G/N$.*

Сформулируем некоторые основные свойства слабо $\tau$-вложенных подгрупп.

**Лемма 2.10.** *Предположим, что $H$ слабо $\tau$-вложена в $G$, $U \le G$ и $N \trianglelefteq G$.*
(1) *Если $H \le U$, то $H$ слабо $\tau$-вложена в $U$.*
(2) *Если $H$ — $p$-подгруппа и $N \le H$, то $H/N$ слабо $\tau$-вложена в $G/N$.*
(3) *Если $(|H|, |N|) = 1$, то $HN/N$ слабо $\tau$-вложена в $G/N$.*

Доказательство. По условию существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK$ S-квазинормальна в $G$ и $H \cap K \le H_{\tau G}$.

(1) $K \cap U \trianglelefteq U$ и группа $H(K \cap U) = HK \cap U$ S-квазинормальна в $U$ по лемме 2.1(3). В силу леммы 2.7(2) получаем, что $H \cap (K \cap U) = H \cap K \le H_{\tau G} \le H_{\tau U}$. Следовательно, $H$ слабо $\tau$-вложена в $U$.

(2) $KN/N \trianglelefteq G/N$ и группа $(H/N)(KN/N) = HKN/N$ S-квазинормальна в $G/N$ по лемме 2.1(4). Поскольку $(H/N) \cap (KN/N) = (H \cap K)N/N$, по лемме 2.7(3) выполнено $(H/N) \cap (KN/N) \leq H_{\tau G}N/N \leq (H/N)_{\tau(G/N)}$. Значит, $H/N$ слабо $\tau$-вложена в $G/N$.

(3) $KN/N \trianglelefteq G/N$ и группа $(HN/N)(KN/N) = HKN/N$ S-квазинормальна в $G/N$ по лемме 2.1(4). Несложно заметить, что $(|N \cap HK : N \cap H|, |N \cap HK : N \cap K|) = 1$. Тогда $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$ и, значит, $HN \cap KN = (H \cap K)N$ по [15, гл. A, лемма 1.2]. Из леммы 2.7(4) следует, что $(HN/N) \cap (KN/N) = (H \cap K)N/N \leq H_{\tau G}N/N \leq (HN/N)_{\tau(G/N)}$. Таким образом, $HN/N$ слабо $\tau$-вложена в $G/N$.

**Лемма 2.11** [3, лемма 3.4.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Предположим, что $G \notin \mathfrak{F}$, но любая собственная подгруппа группы $G$ лежит в $\mathfrak{F}$ и, кроме того, в $G$ есть нормальная силовская $p$-подгруппа $G_p \neq 1$, где $p$ — простой делитель числа $|G|$. Тогда*

(1) *$G_p = G^{\mathfrak{F}}$;*

(2) *$F(G) = F_p(G) = G_p\Phi(G)$.*

**Лемма 2.12.** *Пусть $p$ — простой делитель числа $|G|$ такой, что*

$$(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1.$$

*Если $H \trianglelefteq G$, $p^{n+1} \nmid |H|$ для некоторого числа $n \geq 1$ и $G/H$ $p$-нильпотентна, то $G$ также $p$-нильпотентна. В частности, если $p^{n+1} \nmid |G|$, то $G$ $p$-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что заключение неверно, и пусть $(G, H)$ — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$. Для любой нетривиальной подгруппы $F$ группы $G$ пара $(F, H \cap F)$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда в силу выбора пары $(G, H)$ группа $F$ $p$-нильпотентна. Отсюда следует, что $G$ — минимальная не $p$-нильпотентная группа, а значит, минимальная ненильпотентная группа ввиду [1, гл. IV, теорема 5.4]. По [3, теорема 3.4.11] и лемме 2.11 имеем $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_p} \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, то $(G/N, HN/N)$ удовлетворяет условию теоремы. Значит, $G/N$ $p$-нильпотентна в силу выбора пары $(G, H)$. Следовательно, $P = G^{\mathfrak{N}_p} = N$ — элементарная абелева группа. Ясно, что $P \leq H$, поэтому $|P| \leq p^n$. Поскольку $N_G(P)/C_G(P) \lesssim \mathrm{Aut}(P)$, выполнено $|N_G(P)/C_G(P)|\,|(p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)$. Значит, $N_G(P) = C_G(P)$. Таким образом, по тереме Бернсайда группа $G$ $p$-нильпотентна; противоречие.

**Лемма 2.13** [1, гл. VI, лемма 4.10]. *Пусть $A$ и $B$ — подгруппы группы $G$ такие, что $G \neq AB$. Если $A^gB = BA^g$ для всех $g \in G$, то существует нетривиальная нормальная подгруппа $N$ группы $G$, содержащая $A$ или $B$.*

**Лемма 2.14.** *Пусть $p$ — простой делитель числа $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Если в $G$ есть холлова $p'$-подгруппа, то любые две холловы $p'$-подгруппы группы $G$ сопряжены в $G$.*

Доказательство. Если $p = 2$, то по [16, теорема A] любые две холловы $p'$-подгруппы сопряжены в $G$. Если $p$ — нечетное простое число, то $2 \nmid |G|$. По теореме Фейта — Томпсона группа $G$ разрешима. Следовательно, любые две холловы $p'$-подгруппы сопряжены в $G$.

Подгруппа $M_n$ группы $G$ называется *$n$-максимальной* ($n \geq 1$) *в* $G$, если в $G$ есть цепочка подгрупп $M_n < M_{n-1} < \dots < M_1 < M_0 = G$ такая, что $M_i$ — максимальная подгруппа в $M_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$. Следующая лемма очевидна.

**Лемма 2.15.** *Пусть $p$ — простой делитель числа $|G|$, $H \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Если $|HN/N|_p \geq p^{n+1}$ для некоторого целого числа $n \geq 1$, то для любой $T/N \in \mathrm{Syl}_p(HN/N)$ существует силовская $p$-подгруппа $P$ группы $H$ такая, что $T/N = PN/N$; для любой $n$-максимальной подгруппы $T_n/N$ группы $T/N$ существует $n$-максимальная подгруппа $P_n$ группы $P$ такая, что $T_n/N = P_nN/N$ и $P_n \cap N = P \cap N$.*

**Лемма 2.16** [17, лемма 2.8]. *Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ и $P$ — нормальная $p$-подгруппа группы $G$ такая, что $G = PM$, где $p$ — простой делитель числа $|G|$. Тогда $P \cap M$ нормальна в $G$.*

**Лемма 2.17** [18]. *Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, где $p$ — простой делитель числа $|G|$. Если $N \trianglelefteq G$ и $N \cap P \subseteq \Phi(P)$, то $N$ $p$-нильпотентна.*

**Лемма 2.18** [15, гл. A, предложение 4.13(b)]. *Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_r$, где каждая $G_i$ — неабелева простая группа. Тогда подгруппа $S$ субнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда $S$ —* (прямое) *произведение некоторого числа факторов $G_i$.*

**Лемма 2.19** [19, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Предположим, что $A \leq G$.*

(1) *Если $A \trianglelefteq G$, то $AZ_{\mathfrak{F}}(G)/A \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/A)$.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ S-замкнута, то $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap A \leq Z_{\mathfrak{F}}(A)$.*

(3) *Если $G \in \mathfrak{F}$, то $Z_{\mathfrak{F}}(G) = G$.*

**Лемма 2.20** [1, гл. III, теорема 7.2]. *Пусть $G$ — $p$-группа. Предположим, что $H_1$ и $H_2$ —* (нормальные) *подгруппы группы $G$ такие, что $H_1 \leq H_2$ и $|H_2 : H_1| = p^s$. Тогда для любого целого числа $1 \leq t \leq s$ существует* (нормальная) *подгруппа $H_3$ группы $G$ такая, что $H_1 \leq H_3 \leq H_2$ и $|H_3 : H_1| = p^t$.*

**Лемма 2.21** [14, лемма 2.8]. *Пусть $p$ — простое число, делящее $|G|$, $G$ $A_4$-свободная и $(|G|, p-1) = 1$. Предположим, что $N$ — нормальная подгруппа в $G$ такая, что $G/N$ $p$-нильпотентна и $|N|$ не делится на $p^3$. Тогда $G$ тоже $p$-нильпотентна.*

**Лемма 2.22.** *Пусть $p$ — простой делитель числа $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Если в $G$ есть циклическая силовская $p$-подгруппа, то $G$ $p$-нильпотентна.*

Доказательство. См. доказательство в [2, (10.1.9)].

**Лемма 2.23** [20, лемма 2.9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$* (*содержащая $\mathfrak{N}$*), *и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если $E$ циклическая* (*$E$ содержится в $Z(G)$ соответственно*), *то $G \in \mathfrak{F}$.*

**Лемма 2.24** [10, основная теорема]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда $G$ содержит нормальную подгруппу $E$ такую, что $G/E \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы $P$ обобщенной подгруппы Фиттинга $F^*(E)$ выполнено следующее: любая максимальная подгруппа группы $P$, не имеющая сверхразрешимого добавления в $G$, или любая циклическая подгруппа $H$ группы $P$ простого порядка или порядка 4* (*если $P$ — неабелева 2-группа и $H \not\subseteq Z_\infty(G)$*), *не имеющая сверхразрешимого добавления в $G$, слабо S-замкнута в $G$.*

## 3. Основные результаты

**Теорема 3.1.** *Пусть $p$ — простой делитель числа $|G|$ такой, что*

$$(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1$$

*для некоторого целого числа $n \geq 1$. Тогда $G$ $p$-нильпотентна в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H$ $p$-нильпотентна и для любой силовской $p$-подгруппы $P$ группы $H$ любая $n$-максимальная подгруппа $P$, не содержащая $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, если такая существует, имеет $p$-нильпотентное добавление в $G$ или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, поэтому нужно доказать достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и пусть $(G, H)$ — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$. Дальнейшее доказательство состоит из следующих шагов.

(1) $|H|_p \geq p^{n+1}$.

По лемме 2.12 если $|H|_p \leq p^n$, то $G$ $p$-нильпотентна; противоречие.

(2) $G$ не является неабелевой простой группой.

Если $G$ — неабелева простая группа, то $G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = H = G$, так как $G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \neq 1$. Поскольку $|G|_p \geq p^{n+1}$, можно взять $n$-максимальную подгруппу $P_n$ силовской $p$-подгруппы $P$ группы $G$. По условию $P_n$ удовлетворяет $(\triangle)$ или имеет $p$-нильпотентное добавление в $G$.

(i) Случай 1: $P_n$ удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$. В этом случае существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $P_nK$ S-квазинормальна в $G$ и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Группа $G$ проста, поэтому $K = 1$ или $G$. Допустим, что $K = 1$. Тогда $P_n$ S-квазинормальна, а значит, субнормальна в $G$ по лемме 2.1(1). Следовательно, $P_n = 1$, так как $G \neq P_n$. Получаем, что $|G|_p = p^n$, а это противоречит (1). Пусть $K = G$. Тогда $P_n = (P_n)_{seG}$ или $P_n = (P_n)_{\tau G}$. В первом случае для любой подгруппы $D$ группы $P_n$, S-квазинормально вложенной в $G$, существует S-квазинормальная подгруппа $U$ группы $G$ такая, что $D \in \mathrm{Syl}_p(U)$. Поскольку $G \neq U$, получаем, что $D = U = 1$. Следовательно, $P_n = (P_n)_{seG} = 1$, и, значит, $|G|_p = p^n$; противоречие. Во втором случае $P_n$ $\tau$-квазинормальна в $G$ по лемме 2.7(1). Так как $G$ не $p$-группа, можно выбрать простое число $q \neq p$, делящее $|G|$, и силовскую $q$-подгруппу $Q$ группы $G$. Предположим, что $P_n \neq 1$. В силу равенства $Q^G = G$ имеем $(p, |Q^G|) \neq 1$. Значит, $Q^g P_n = P_n Q^g$ для всех $g \in G$. Если $G = P_nQ$, то $G$ разрешима по $p^a q^b$-теореме Бернсайда; противоречие. Следовательно, $G \neq P_nQ$. По лемме 2.13 найдется нетривиальная нормальная подгруппа $X$ группы $G$ такая, что $P_n \leq X$ или $Q \leq X$, а это невозможно. Таким образом, получаем, что $P_n = 1$ и $|G|_p = p^n$; снова противоречие.

(ii) Случай 2: $P_n$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ в $G$. Пусть $T_{p'}$ — нормальное $p$-дополнение группы $T$. Тогда $G = P_nT = P_nN_G(T_{p'})$. Если $N_G(T_{p'}) = G$, то $T_{p'} \trianglelefteq G$ и, значит, $T_{p'} = 1$ или $G$. Отсюда следует, что $G$ $p$-нильпотентна; противоречие. Таким образом, $N_G(T_{p'}) < G$. Ясно, что $P \cap N_G(T_{p'}) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(T_{p'}))$ и $P \cap N_G(T_{p'}) < P$. Пусть $P_2$ — максимальная подгруппа группы $P$, содержащая $P \cap N_G(T_{p'})$, и $P_{n2}$ — $n$-максимальная подгруппа группы $P$, содержащаяся в $P_2$. Если $P_{n2}$ удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$, то рассуждение, подобное приведенному выше, приводит к противоречию. Значит, $P_{n2}$ имеет $p$-нильпотентное добавление $E$ в $G$. Пусть $E_{p'}$ — нормальное

$p$-дополнение группы $E$. Тогда также выполнено $G = P_{n2}N_G(E_{p'}) = P_2N_G(E_{p'})$. Поскольку $T_{p'}$ и $E_{p'}$ — холловы $p'$-подгруппы в $G$, по лемме 2.14 существует элемент $g \in P_2$ такой, что $T_{p'} = (E_{p'})^g$. Следовательно, $G = (P_2N_G(E_{p'}))^g = P_2N_G(T_{p'})$, и тем самым $P = P_2(P \cap N_G(T_{p'})) = P_2$; противоречие. Утверждение (2) доказано.

(3) Если $1 \neq L \trianglelefteq G$ такова, что $L \leq H$ или $(|L|, p) = 1$, то $G/L$ $p$-нильпотентна.

Если $|HL/L|_p \leq p^n$, то $G/L$ $p$-нильпотентна по лемме 2.12, поэтому можно считать, что $|HL/L|_p \geq p^{n+1}$. Пусть $PL/L$ — силовская $p$-подгруппа группы $HL/L$, причем $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$, и $P_nL/L$ — $n$-максимальная подгруппа в $PL/L$, не содержащая $(PL/L) \cap (G/L)^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, такая, что $P_n$ — $n$-максимальная подгруппа в $P$ и $P_n \cap L = P \cap L$ (см. лемму 2.15). Поскольку $G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq H$, имеем $(|PG^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap L : P \cap L|, |PG^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap L : G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap L|) = 1$. Значит, $PL \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}L = (P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}})L$ по [15, гл. A, лемма 1.2]. Если $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P_n$, то $(PL/L) \cap (G/L)^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = (PL/L) \cap (G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}L/L) = (P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}})L \leq P_nL/L$; противоречие. Следовательно, по условию $P_n$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ или удовлетворяет $(\triangle)$ в $G$. В первом случае $P_nL/L$ имеет $p$-нильпотентное добавление $TL/L$ в $G/L$. Во втором случае существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $P_nK$ S-квазинормальна в $G$ и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Отметим, что $|L \cap P_nK : L \cap K| = |K(L \cap P_nK) : K| \mid |P_nK : K|$ и $|L \cap P_nK : L \cap P_n| \mid |L : L \cap P_n| = |L : L \cap P| = |PL : P|$. Поскольку $L \leq H$ или $(|L|, p) = 1$, получаем, что $p \nmid |PL : P|$. Отсюда следует, что $(|L \cap P_nK : L \cap K|, |L \cap P_nK : L \cap P_n|) = 1$. Значит, $P_nL \cap KL = (P_n \cap K)L$, как и выше. В силу лемм 2.5(2) и 2.7(3) имеем $(P_nL/L) \cap (KL/L) \leq (P_n)_{seG}L/L \leq (P_nL/L)_{seG}$ или $(P_nL/L) \cap (KL/L) \leq (P_n)_{\tau G}L/L \leq (P_nL/L)_{\tau G}$. Это означает, что $P_nL/L$ удовлетворяет $(\triangle)$ в $G/L$. Следовательно, $(G/L, HL/L)$ удовлетворяет условию теоремы. В силу выбора пары $(G, H)$ группа $G/L$ $p$-нильпотентна.

(4) Если $P \leq F < G$, то $F$ $p$-нильпотентна. В частности, если $H < G$, то $H$ $p$-нильпотентна.

Очевидно, что $P \in \mathrm{Syl}_p(H \cap F)$. Пусть $P_n$ — $n$-максимальная подгруппа группы $P$, не содержащая $P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$. Предположим, что $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P_n$. Тогда $P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P \cap (G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap F) \leq P_n$, что невозможно. Значит, по условию $P_n$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ или удовлетворяет $(\triangle)$ в $G$. Из леммы 2.9(1) и леммы 2.10(1) следует, что $P_n$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T \cap F$ или удовлетворяет $(\triangle)$ в $F$. Силовские $p$-подгруппы сопряжены, поэтому пара $(F, H \cap F)$ удовлетворяет условию теоремы и, значит, $F$ $p$-нильпотентна в силу выбора пары $(G, H)$.

(5) В $G$ есть единственная минимальная нормальная подгруппа $N = G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, содержащаяся в $H$ и такая, что $N \nleq \Phi(G)$ и $|N|_p \geq p^{n+1}$.

Это прямо следует из (3) и леммы 2.12.

(6) $O_{p'}(G) = 1$.

Если это не так, то по (3) группа $G/O_{p'}(G)$ $p$-нильпотентна. Следовательно, $G$ тоже $p$-нильпотентна; противоречие.

(7) $O_p(H) = 1$.

Предположим, что это не так.

(i) $N = O_p(H) \leq O_p(G)$ и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы $M$ группы $G$.

Поскольку $O_p(H)\operatorname{char} H \trianglelefteq G$, получаем, что $N \leq O_p(H)$ и тем самым $N$ абелева. В силу того, что $N \nleq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$ такая, что $G = N \rtimes M = O_p(H)M$. Из леммы 2.16 следует, что $O_p(H) \cap M \trianglelefteq G$. Из единственности группы $N$ получаем, что $O_p(H) \cap M = 1$, откуда $O_p(H) = N(O_p(H) \cap M) = N \leq O_p(G)$.

(ii) Пусть $G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ такая, что $P = G_p \cap H$. Тогда в $P$ существуют максимальная подгруппа $P_1$ и $n$-максимальная подгруппа $P_n$, содержащаяся в $P_1$, такие, что $P_1 \trianglelefteq G_p$ и $P = NP_n = NP_1$. Кроме того, $N \nleq P_1$ и $N \cap P_n$ — $n$-максимальная подгруппа группы $N$.

Ясно, что $G_p = N(G_p \cap M)$. Поскольку $|G_p : G_p \cap M| = |G_pM : M| = |G : M| = |N| \geq p^{n+1}$, существуют $n$-максимальная подгруппа $(G_p)_n$ и максимальная подгруппа $(G_p)_1$ группы $G_p$ такие, что $G_p \cap M \leq (G_p)_n \leq (G_p)_1$. Отсюда следует, что $G_p = N(G_p)_n = N(G_p)_1$. Пусть $P_n = (G_p)_n \cap H$ и $P_1 = (G_p)_1 \cap H$. Очевидно, что $P_1 \trianglelefteq G_p$ и $P \cap M \leq P_n \leq P_1$. Таким образом, $P = N(P \cap M) = NP_n = NP_1$. Более того, так как $|P : P_n| = |G_p \cap H : (G_p)_n \cap H| = |G_p : (G_p)_n| = p^n$ и $|P : P_1| = |G_p \cap H : (G_p)_1 \cap H| = |G_p : (G_p)_1| = p$, группа $P_n$ — $n$-максимальная подгруппа в $P$ и $P_1$ — максимальная подгруппа в $P$. Ясно, что $N \nleq P_1$. В силу равенств $|N : N \cap P_n| = |P : P_n| = p^n$ группа $N \cap P_n$ — $n$-максимальная подгруппа в $N$.

(iii) $P_n$ удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$, т. е. существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $P_nK$ S-квазинормальна в $G$ и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$.

Допустим, что $P_n$ не удовлетворяет ($\triangle$) в $G$. Тогда $P_n$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ в $G$ по условию теоремы. Пусть $T_{p'}$ — нормальное $p$-дополнение группы $T$. Тогда $G = P_nT = P_nN_G(T_{p'})$. Поскольку $M \cong G/N$ $p$-нильпотентна, $M$ имеет нормальное $p$-дополнение $M_{p'}$ такое, что $M \leq N_G(M_{p'}) \leq G$. Если $N_G(M_{p'}) = G$, то $M_{p'} \trianglelefteq G$, откуда $M_{p'} = 1$ по (6). Это означает, что $G$ — $p$-группа; противоречие. Следовательно, $N_G(M_{p'}) = M$. По лемме 2.14 существует элемент $g \in P_n$ такой, что $M_{p'} = (T_{p'})^g$. Тогда $G = (P_nN_G(T_{p'}))^g = P_nN_G(M_{p'}) = P_nM$ и, значит, $P = P_n(P \cap M) = P_n$; противоречие. Таким образом, (iii) выполнено.

(iv) $P_n \cap K = 1$.

Предположим сначала, что $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$. Пусть $D_1, D_2, \dots, D_s$ — все подгруппы группы $P_n$, S-квазинормально вложенные в $G$. Тогда $(P_n)_{seG} = \langle D_1, D_2, \dots, D_s\rangle$. По определению существуют S-квазинормальные подгруппы $U_1, U_2, \dots, U_s$ группы $G$ такие, что $D_i \in \mathrm{Syl}_p(U_i)$ $(1 \leq i \leq s)$. Допустим, что $(U_i)_G \neq 1$. Пусть $N_1$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $(U_i)_G$. Если $N_1 \nleq H$, то $N_1 \cap H = 1$. Пусть $N_2/H$ — нормальная подгруппа группы $G/H$, содержащаяся в $HN_1/H$. Тогда $N_2 \trianglelefteq G$ и, значит, $N_1 \cap N_2 = 1$ или $N_1$. Следовательно, $N_2 = H(N_1 \cap N_2) = H$ или $HN_1$. Поэтому $HN_1/H$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/H$. Поскольку $G/H$ $p$-нильпотентна, она также $p$-разрешима. Из (6) следует, что $N_1 \cong HN_1/H$ — $p$-подгруппа. Значит, $N_1 \leq D_i \leq H$; противоречие. Следовательно, $N_1 \leq H$. Тогда по (5) выполнено $N_1 = N \leq U_i \leq P_n$; это опять дает противоречие. Таким образом, $(U_i)_G = 1$ $(1 \leq i \leq s)$. По леммам 2.2 и 2.3 группы $D_i$ S-квазинормальны в $G$, а значит, группа $(P_n)_{seG}$ тоже S-квазинормальна. Тогда $(P_n)_{seG} \leq O_p(H) = N$ и $O^p(G) \leq N_G((P_n)_{seG})$ в силу лемм 2.1(1) и 2.1(5). Если $(P_n)_{seG} \neq 1$, то $N \leq ((P_n)_{seG})^G = ((P_n)_{seG})^{O^p(G)G_p} = ((P_n)_{seG})^{G_p} \leq (P_n \cap N)^{G_p} \leq (P_1 \cap N)^{G_p} = P_1 \cap N \leq N$. Отсюда следует, что

$N = P_1 \cap N$ и тем самым $N \leq P_1$; противоречие. Таким образом, $(P_n)_{seG} = 1$ и $P_n \cap K = 1$. Теперь рассмотрим случай, когда $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Если $H \cap K \neq 1$, то $N \leq H \cap K \leq K$. Вследствие этого имеем $N \cap P_n \leq P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$, и, значит, $N \cap P_n = N \cap (P_n)_{\tau G}$. Выберем произвольное простое число $q \neq p$, делящее $|G|$, и силовскую $q$-подгруппу $Q$ группы $G$. Предположим, что $(p, |Q^G|) = 1$. Тогда $Q^G \leq O_{p'}(G)$, что противоречит (6). По лемме 2.7(1) группа $(P_n)_{\tau G}$ $\tau$-квазинормальна в $G$, поэтому $(P_n)_{\tau G}Q$ — подгруппа в $G$. Заметим, что $N \cap P_n$ — $n$-максимальная подгруппа группы $N$. Поскольку $|N : N \cap (P_n)_{\tau G}Q| = |N(P_n)_{\tau G}Q : (P_n)_{\tau G}Q| = |N(P_n)_{\tau G} : (P_n)_{\tau G}| = |N : N \cap P_n| = p^n$, выполнено равенство $N \cap (P_n)_{\tau G}Q = N \cap P_n$. Следовательно, $Q \leq N_G(N \cap (P_n)_{\tau G}Q) = N_G(N \cap P_n)$, и, значит, $O^p(G) \leq N_G(N \cap P_n)$. Если $N \cap P_n \neq 1$, то $N \leq (N \cap P_n)^G = (N \cap P_n)^{G_p} \leq (N \cap P_1)^{G_p} = N \cap P_1$. Отсюда следует, что $N \leq P_1$; противоречие. Значит, $N \cap P_n = 1$. Тогда $|N| = p^n$; снова противоречие. Таким образом, $H \cap K = 1$ и $P_n \cap K = 1$. Утверждение (iv) доказано.

(v) $H = G$.

Если $H < G$, то $H$ $p$-нильпотентна в силу (4). Пусть $H_{p'}$ — нормальное $p$-дополнение группы $H$. Тогда $H_{p'} \trianglelefteq G$. Значит, $H_{p'} = 1$ по (6), откуда $H = N = P$. Поскольку $P_n(H \cap K) = P_nK \cap H$ S-квазинормальна в $G$ по лемме 2.2, получаем, что $O^p(G) \leq N_G(P_n(H \cap K))$. Если $P_n(H \cap K) \neq 1$, то $H = (P_n(H \cap K))^G = (P_n(H \cap K))^{G_p} \leq (P_1(H \cap K))^{G_p} = P_1(H \cap K)$. Следовательно, $H = P_1(H \cap K)$ и $H \cap K \neq 1$. Из этого вытекает, что $H \cap K = H$, так как $H$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$. Тогда $H \leq K$ и, значит, $P_n = P_n \cap K = 1$ по (iv). Следовательно, $|H| = p^n$, что противоречит (1). Таким образом, $P_n(H \cap K) = 1$. Также получаем, что $P_n = 1$; противоречие, как и выше.

(vi) Завершение доказательства утверждения (7).

В силу (iv) и (v) выполнено $|K|_p = |K : P_n \cap K|_p = |P_nK : P_n|_p \leq p^n$. Если $K \neq 1$, то $N \leq K$, поэтому $G/K$ $p$-нильпотентна. Из леммы 2.12 следует, что $G$ тоже $p$-нильпотентна; противоречие. Таким образом, можно считать, что $K = 1$. Тогда $P_n$ S-квазинормальна в $G$. Если $P_n \neq 1$, то, как и выше, $N \leq {P_n}^G \leq P_1$; противоречие. Значит, $P_n = 1$ и $|G|_p = p^n$. Это противоречие завершает доказательство утверждения (7).

(8) $H = G$.

Если это не так, то $H$ $p$-нильпотентна по (4). Пусть $H_{p'}$ — нормальное $p$-дополнение в группе $H$. Тогда $H_{p'} \trianglelefteq G$, откуда следует, что $H = O_p(H) = 1$ в силу (6) и (7). Тем самым $G$ $p$-нильпотентна; противоречие.

(9) $O_p(G) = 1$.

Непосредственно следует из (7) и (8).

(10) $N$ не $p$-разрешима.

Если $N$ $p$-разрешима, то $O_{p'}(N) \neq 1$ или $O_p(N) \neq 1$, что противоречит (6) или (9).

(11) Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Тогда $G = PN$ и $P \cap N \nleq \Phi(P)$. Кроме того, $N = O^p(G)$.

Если $PN < G$, то $PN$ $p$-нильпотентна по (4) и, значит, $N$ тоже $p$-нильпотентна, что противоречит (10). Следовательно, $G = PN$. Если $P \cap N \leq \Phi(P)$, то $N$ $p$-нильпотентна по лемме 2.17, что также противоречит (10). Очевидно, $1 \neq O^p(G) \leq N$, откуда $N = O^p(G)$.

(12) Завершение доказательства.

По (11) существует максимальная подгруппа $P_1$ группы $P$ такая, что $P = (P \cap N)P_1$. Очевидно, $P \cap G^{\mathfrak{N}_p} = P \cap N \nleq P_1$. Пусть $P_n$ — $n$-максимальная подгруппа группы $P$, содержащаяся в $P_1$. По условию $P_n$ удовлетворяет $(\triangle)$ или имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ в $G$.

(i) Случай 1: $P_n$ удовлетворяет $(\triangle)$ в $G$. В этом случае существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $P_nK$ S-квазинормальна в $G$ и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Если $K = 1$, то $P_n$ S-квазинормальна в $G$. Из леммы 2.1(1) и (9) вытекает, что $P_n \leq O_p(G) = 1$ и, значит, $|G|_p \leq p^n$, что противоречит (1). Следовательно, можно считать, что $K \neq 1$. Тогда $N \leq K$, откуда $P_n \cap N \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap N \leq (P_n)_{\tau G}$. Сначала предположим, что $P_n \cap N \leq (P_n)_{seG}$. Так же, как и выше, пусть $D_1, D_2, \dots, D_s$ — все подгруппы группы $P_n$, которые S-квазинормально вложены в $G$. Тогда существуют S-квазинормальные подгруппы $U_1, U_2, \dots, U_s$ группы $G$ такие, что $D_i \in \mathrm{Syl}_p(U_i)$ $(1 \leq i \leq s)$. Если $(U_i)_G \neq 1$, то $N \leq (U_i)_G \leq U_i$. Значит, $D_i \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Поскольку $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$, выполнено равенство $D_i \cap N = P \cap N$. Следовательно, $P \cap N \leq D_i \leq P_n \leq P_1$; противоречие. Таким образом, $(U_i)_G = 1$, и $D_i$ S-квазинормальна в $G$ по лемме 2.3. В силу того, что $(P_n)_{seG} = \langle D_1, D_2, \dots, D_s \rangle$, имеем $(P_n)_{seG} \leq O_p(G) = 1$, откуда вытекает равенство $P_n \cap N = 1$. Значит, $|N|_p = |P \cap N| = |P \cap N : P_n \cap N| = |P_n(P \cap N) : P_n| \leq |P : P_n| = p^n$. Из леммы 2.12 следует, что $G$ $p$-нильпотентна; противоречие.

Рассмотрим случай, когда $P_n \cap N \leq (P_n)_{\tau G}$. Пусть $q \neq p$ — произвольный простой делитель числа $|G|$ и $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Ясно, что $Q \leq O^p(G) = N$ и $(p, |Q^G|) \neq 1$. Тогда по лемме 2.7(1) имеем $(P_n)_{\tau G}Q = Q(P_n)_{\tau G}$. Следовательно, $(P_n \cap N)Q = ((P_n)_{\tau G} \cap N)Q = (P_n)_{\tau G}Q \cap N = Q(P_n)_{\tau G} \cap N = Q((P_n)_{\tau G} \cap N) = Q(P_n \cap N)$. Значит, $(P_n \cap N)Q^n = Q^n(P_n \cap N)$ для всех $n \in N$. Если $N = (P_n \cap N)Q$, то $N$ разрешима по $p^aq^b$-теореме Бернсайда, что противоречит (10). Поэтому по лемме 2.13 существует нетривиальная нормальная подгруппа $X$ группы $N$ такая, что $P_n \leq X$ или $Q \leq X$. Группа $N$ характеристически проста в $G$, следовательно, $N \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_i \cong A$ $(1 \leq i \leq t)$ — простая группа. Очевидно, что $A$ неабелева в силу (10). По лемме 2.18 без потери общности можно считать, что $X \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ $(k < t)$. Поскольку $Q \in \mathrm{Syl}_q(N)$, выполнено $|Q| = |N|_q = (|A|_q)^t > (|A|_q)^k = |X|_q$. Отсюда вытекает, что $P_n \cap N \leq X$. Заметим, что $|P \cap N : P_n \cap N| = |P_n(P \cap N) : P_n| \leq |P : P_n| = p^n$. Тогда $|N|_p/|X|_p = (|A|_p)^{t-k} \leq p^n$. Так как $t - k \geq 1$, имеем $|A|_p \leq p^n$. Значит, $A$ $p$-нильпотентна по лемме 2.12. Следовательно, $N$ $p$-разрешима; противоречие.

(ii) Случай 2: $P_n$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ в $G$. Пусть $T_{p'}$ — нормальное $p$-дополнение группы $T$. Тогда $G = P_nT = P_nN_G(T_{p'})$ и $N_G(T_{p'}) < G$. Поскольку $P = P_n(P \cap N_G(T_{p'}))$ и $P \cap N_G(T_{p'}) < P$, существует максимальная подгруппа $P_2$ группы $P$ такая, что $P \cap N_G(T_{p'}) \leq P_2$. В силу того, что $N = O^p(G)$ по (11), любая холлова $p'$-подгруппа группы $G$ содержится в $N$. Используя лемму 2.14 и аргумент Фраттини, получаем, что $G = NN_G(T_{p'}) = PN_G(T_{p'})$. Тогда $|P| = |G|_p \leq |N|_p|N_G(T_{p'})|_p = |P \cap N||P \cap N_G(T_{p'})|$. Значит, $P = (P \cap N)(P \cap N_G(T_{p'})) \leq (P \cap N)P_2$. Отсюда вытекает, что $P = (P \cap N)P_2$ и $P \cap G^{\mathfrak{N}_p} = P \cap N \nleq P_2$. Пусть $P_{n2}$ — $n$-максимальная подгруппа группы $P$, содержащаяся в $P_2$. Тогда по условию $P_{n2}$ имеет $p$-нильпотентное добавление $E$

или удовлетворяет $(\triangle)$ в $G$. Если $P_{n2}$ имеет $p$-нильпотентное добавление $E$ в $G$, то, рассуждая так же, как в доказательстве утверждения (2)(ii), можно прийти к противоречию. Таким образом, $P_{n2}$ удовлетворяет $(\triangle)$ в $G$. Тогда, повторяя рассуждение из (i), снова приходим к противоречию. Теорема доказана.

**Теорема 3.2.** *Пусть $p$ — простой делитель числа $|G|$ такой, что*

$$(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1$$

*для некоторого целого числа $n \geq 1$. Тогда $G$ $p$-нильпотентна в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H$ $p$-нильпотентна и для любой силовской $p$-подгруппы $P$ группы $H$ любая подгруппа $L$ группы $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$ порядка $p^n$ или 4 (когда $p = 2$, $n = 1$, $P$ неабелева и $L$ циклическая), не содержащаяся в $Z_\infty(G)$, если такая существует, имеет $p$-нильпотентное добавление в $G$ или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$.*

Доказательство. Нам нужно установить только достаточность. Предположим, что это не так, и пусть $(G, H)$ — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$.

(1) $|H|_p \geq p^{n+1}$.

Это следует из леммы 2.12.

(2) Если $1 \neq N \trianglelefteq G$ и $(|N|, p) = 1$, то $G/N$ $p$-нильпотентна.

Если $|(HN/N) \cap (G/N)^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|_p = |G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N/N|_p \leq p^n$, то $G/N$ $p$-нильпотентна по лемме 2.12. Поэтому можно считать, что $|G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N/N|_p \geq p^{n+1}$. Пусть $L/N$ — подгруппа группы $PN/N \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N/N$ порядка $p^n$ или 4 (когда $p = 2$, $n = 1$, $PN/N$ неабелева и $L/N$ циклическая), не содержащаяся в $Z_\infty(G/N)$, где $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(HN/N)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Поскольку $L = (P \cap L)N$ и $(|N|, p) = 1$, получаем, что $|L/N| = |(P \cap L)N/N| = |P \cap L|$ равен $p^n$ или 4. В силу того, что $P \cap L \leq G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N$ и $(|P \cap L|, |G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N : G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|) = 1$, выполнено $P \cap L \leq P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$. Из леммы 2.19(1) следует, что $P \cap L \nsubseteq Z_\infty(G)$. Предположим, что $|P \cap L| = 4$. Тогда $P$ неабелева и $P \cap L$ циклическая в силу $G$-изоморфизма $L/N \cong P \cap L$. Рассуждая так же, как на шаге (3) доказательства теоремы 3.1, выводим, что $L/N$ имеет $p$-нильпотентное добавление или удовлетворяет $(\triangle)$. Это означает, что пара $(G/N, HN/N)$ удовлетворяет условию теоремы. Выбор пары $(G, H)$ приводит к тому, что $G/N$ $p$-нильпотентна.

(3) Любая нетривиальная подгруппа $F$ группы $G$ $p$-нильпотентна.

Рассматривая пару $(F, H \cap F)$, можно считать, что $|(H \cap F) \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|_p = |F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|_p \geq p^{n+1}$. Если это не так, то $F$ $p$-нильпотентна по лемме 2.12. Пусть $L$ — подгруппа группы $(P \cap F) \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$ порядка $p^n$ или 4 (когда $p = 2$, $n = 1$, $P \cap F$ неабелева и $L$ циклическая), не содержащаяся в $Z_\infty(F)$, где $P \cap F \in \mathrm{Syl}_p(H \cap F)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. По лемме 2.19(2) имеем $L \nsubseteq Z_\infty(G)$. В силу того, что $P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P \cap (F \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}) \leq P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, по леммам 2.9(1) и 2.10(1) группа $L$ имеет $p$-нильпотентное добавление или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $F$. Следовательно, пара $(F, H \cap F)$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда $F$ $p$-нильпотентна ввиду выбора пары $(G, H)$.

(4) $O_{p'}(G) = 1$.

Если это не так, то $G/O_{p'}(G)$ $p$-нильпотентна по (2) и тогда $G$ тоже $p$-нильпотентна; противоречие.

(5) $G$ — минимальная ненильпотентная группа.

В силу (3) группа $G$ — минимальная не $p$-нильпотентная группа. Тогда $G$ — минимальная ненильпотентная группа по теореме Ито (см. [1, гл. IV, теорема 5.4]). Из [3, теорема 3.4.11] и леммы 2.11 следует, что $G = P \rtimes Q$, где $P$ — нормальная силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $Q$ — циклическая силовская $q$-подгруппа группы $G$ ($p \neq q$). Кроме того,

(i) $P/\Phi(P)$ — $G$-главный фактор;
(ii) $P = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_p}$;
(iii) $\exp(P) = p$ или 4 (когда $p = 2$ и $P$ неабелева);
(iv) $\Phi(G) = Z_\infty(G)$;
(v) $F(G) = F_p(G) = P\Phi(G)$.

(6) $P \leq H$.

Это следует из того, что $P = G^{\mathfrak{N}_p}$ и $G/H$ $p$-нильпотентна.

(7) $F(G) = P$ и $\Phi(G) = \Phi(P)$.

Поскольку $F_p(G)/O_{p'}(G) = O_p(G/O_{p'}(G))$, из (4) и (5) получаем, что $F(G) = F_p(G) = P\Phi(G) = O_p(G) = P$. Значит, $\Phi(P) \leq \Phi(G) \leq P$. Так как $P/\Phi(P)$ — $G$-главный фактор, если $\Phi(G) = P$, то $G = Q$; противоречие. Таким образом, $\Phi(G) = \Phi(P)$.

(8) В $P$ есть собственная подгруппа $L$ порядка $p^n$ или 4 такая, что $L \nleq \Phi(P)$ и $L$ имеет $p$-нильпотентное добавление или удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$.

Выберем $x \in P \backslash \Phi(P)$ и положим $E = \langle x \rangle$. Тогда $|E|$ равен $p$ или 4 (когда $p = 2$ и $P$ неабелева). Ясно, что $E \nsubseteq Z_\infty(G) = \Phi(G) = \Phi(P)$. Из леммы 2.20 следует, что существует подгруппа $L$ группы $P$ порядка $p^n$ или 4 (если $p = 2$ и $n = 1$, то можно взять $L = E$) такая, что $E \leq L$ и $L \nleq \Phi(P)$. По условию $L$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ или удовлетворяет ($\triangle$) в $G$. Более того, если $L = P$, то, поскольку $|P| \geq p^{n+1}$ по (1), выполнено равенство $|P| = 4$. Но тогда $P$ абелева; противоречие.

(9) Завершение доказательства.

(i) Случай 1: $L$ имеет $p$-нильпотентное добавление $T$ в $G$. Из равенств $G = LT = PT$ следует, что $P \cap T \trianglelefteq T$ и $T\Phi(P)/\Phi(P) \leq N_{G/\Phi(P)}((P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P))$. Очевидно, $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)$, так как $P/\Phi(P)$ абелева. Значит, $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Группа $P/\Phi(P)$ является $G$-главным фактором, поэтому $(P \cap T)\Phi(P) = \Phi(P)$ или $P$. В первом случае $P \cap T \leq \Phi(P)$. Следовательно, $P = L(P \cap T) = L$, что противоречит (8). Во втором случае $P \cap T = P$. Тогда $P \leq T$ и, значит, $G = T$ $p$-нильпотентна; противоречие.

(ii) Случай 2: $L$ удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$. По предположению существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $LK$ S-квазинормальна в $G$ и $L \cap K \leq L_{seG}$ или $L \cap K \leq L_{\tau G}$. Поскольку $L \leq P = O_p(G)$, из лемм 2.8 и 2.2 получаем, что $L_{seG} = L_{\tau G} = L_{sG}$, где $L_{sG}$ — наибольшая S-квазинормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $L$.

По лемме 2.1(5) имеем $O^p(G) \leq N_G(L_{sG})$. Значит, $O^p(G)\Phi(P)/\Phi(P) \leq N_G(L_{sG})\Phi(P)/\Phi(P) \leq N_{G/\Phi(P)}(L_{sG}\Phi(P)/\Phi(P))$. Группа $P/\Phi(P)$ абелева, поэтому $P/\Phi(P) \leq N_{G/\Phi(P)}(L_{sG}\Phi(P)/\Phi(P))$. Следовательно, $L_{sG}\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$, откуда $L_{sG}\Phi(P) \trianglelefteq G$. Таким образом, $L_{sG}\Phi(P) = P$ или $\Phi(P)$.

Если $L_{sG}\Phi(P) = P$, то $L_{sG} = P = L$, что противоречит (8). Теперь предположим, что $L_{sG}\Phi(P) = \Phi(P)$. Тогда $L_{sG} \leq \Phi(P)$. Если $K = G$, то $L = L_{sG} \leq \Phi(P)$; противоречие. Следовательно, $K < G$. Группа $K$ нильпотентна, поэтому $K \leq F(G) = P$. Это говорит о том, что $LK$ — S-квазинормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $P$. Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, показывают, что $LK\Phi(P) \trianglelefteq G$ и, значит, $LK\Phi(P)$ совпадает с $P$ или $\Phi(P)$. Если $LK\Phi(P) = \Phi(P)$, то $L \leq LK \leq \Phi(P)$; противоречие.

Таким образом, $LK\Phi(P) = P$, поэтому $LK = P$. Поскольку $K\Phi(P) \trianglelefteq G$, то $K\Phi(P)$ совпадает с $P$ или $\Phi(P)$. В первом случае $K = P$ и тем самым $L = L_{sG} \leq \Phi(P)$; противоречие. Во втором случае $K \leq \Phi(P)$, откуда $L = P$; снова противоречие. Теорема доказана.

**Теорема 3.3.** *Пусть $G$ — $A_4$-свободная группа и $p$ — простой делитель числа $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Тогда $G$ $p$-нильпотентна в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H$ $p$-нильпотентна и для любой силовской $p$-подгруппы $P$ группы $H$ любая 2-максимальная подгруппа группы $P$, не содержащая $P \cap G^{\mathfrak{N}_p}$, или любая подгруппа порядка $p^2$ группы $P \cap G^{\mathfrak{N}_p}$, не содержащаяся в $Z_\infty(G)$, если такая существует, имеет $p$-нильпотентное добавление в $G$ или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.21 теорема доказывается аналогично теоремам 3.1 и 3.2.

**Теорема 3.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $H$ любая максимальная подгруппа группы $P$ имеет сверхразрешимое добавление в $G$ или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$.*

Доказательство. Нужно доказать только достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и пусть $(G, H)$ — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$.

(1) Если $r$ — максимальный простой делитель числа $|H|$, то силовская $r$-подгруппа $R$ группы $H$ нормальна в $G$.

Пусть $p$ — наименьший простой делитель числа $|H|$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $H$. Если $P$ циклическая, то $H$ $p$-нильпотентна по лемме 2.22. Заметим, что сверхразрешимая группа $p$-нильпотентна, если $p$ — наименьший простой делитель ее порядка. Если $P$ нециклическая, то в силу того, что пара $(H, H)$ удовлетворяет условию теоремы, группа $H$ $p$-нильпотентна по теореме 3.1. Следовательно, $H$ имеет нормальное $p$-дополнение $H_{p'}$ такое, что $H_{p'} \operatorname{char} H \trianglelefteq G$. Ясно, что пара $(H_{p'}, H_{p'})$ тоже удовлетворяет условию. Пусть $q$ — наименьший простой делитель числа $|H_{p'}|$. Тогда, как выше, получаем, что $H_{p'}$ $q$-нильпотентна. Дальнейшее рассуждение ведется аналогично. Таким образом, если $r$ — максимальный простой делитель числа $|H|$ и $R$ — силовская $r$-подгруппа в $H$, то $R \trianglelefteq G$.

(2) Существует единственная минимальная нормальная подгруппа $N$ группы $G$, содержащаяся в $R$, такая, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \nleq \Phi(G)$.

В самом деле, несложно понять, что пара $(G/N, H/N)$ удовлетворяет условию теоремы для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$, содержащейся в $R$. Из выбора пары $(G, H)$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $R$, и $N \nleq \Phi(G)$.

(3) $N = R \leq O_r(G)$.

Поскольку $N \nleq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$ такая, что $G = NM = RM$. По лемме 2.16 группа $R \cap M$ нормальна в $G$. Тогда $R \cap M = 1$, так как $N \nleq R \cap M$. Значит, $R = N(R \cap M) = N \leq O_r(G)$.

(4) Завершение доказательства.

Если $R$ циклическая, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.23; противоречие. Значит, $R$ нециклическая. Пусть $R'$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$. Тогда $R' = R(M \cap R')$. Можно выбрать максимальную подгруппу $R_1'$ группы $R'$ так, что $M \cap R' \leq R_1'$. Ясно, что $R_1 = R \cap R_1'$ — максимальная подгруппа группы $R$, причем $R_1 \trianglelefteq R'$. По условию $R_1$ имеет сверхразрешимое добавление $T$ или удовлетворяет $(\triangle)$ в $G$.

Предположим сначала, что $G = R_1T = RT$, где $T$ — сверхразрешимая подгруппа группы $G$. Поскольку $R = N$ абелева, $R \cap T \trianglelefteq G$. Следовательно, $R \cap T$ совпадает с 1 или $R$. В первом случае $R = R_1(R \cap T) = R_1$; противоречие. Во втором случае $R \leq T$ и тем самым $G = T \in \mathfrak{F}$; снова противоречие.

Предположим, что $R_1$ удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$. Тогда существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $R_1K$ S-квазинормальна в $G$ и $R_1 \cap K \leq (R_1)_{seG}$ или $R_1 \cap K \leq (R_1)_{\tau G}$. Поскольку $R_1 \leq O_r(G)$, группы $(R_1)_{seG}$ и $(R_1)_{\tau G}$ S-квазинормальны в $G$ по леммам 2.8 и 2.2. Следовательно, $(R_1)_{seG} = (R_1)_{\tau G} = (R_1)_{sG}$, где $(R_1)_{sG}$ — наибольшая S-квазинормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $R_1$. Очевидно, $R \cap K$ совпадает с 1 или $R$. В первом случае $R_1 = R \cap R_1K$ S-квазинормальна в $G$ по лемме 2.2. Во втором случае $R \leq K$, поэтому $R_1 = R_1 \cap K = (R_1)_{sG}$ также S-квазинормальна в $G$. Однако поскольку $R_1 \trianglelefteq R'$ и $O^r(G) \leq N_G(R_1)$, получаем, что $R_1 \trianglelefteq G$. Таким образом, $R_1 = 1$. Отсюда следует, что $R$ циклическая и, значит, $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.23. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

**Теорема 3.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $H$ любая циклическая подгруппа $L$ группы $P$ простого порядка или порядка 4 (когда $p = 2$ и $P$ неабелева), не содержащаяся в $Z_\infty(G)$, имеет сверхразрешимое добавление в $G$ или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в $G$.*

Доказательство. Нужно доказать только достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и пусть $(G, H)$ — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$.

(1) Силовская $q$-подгруппа $Q$ группы $H$ нормальна в $G$, где $q$ — наибольший простой делитель числа $|H|$.

Ввиду леммы 2.22 и теоремы 3.2 утверждение доказывается так же, как в шаге (1) доказательства теоремы 3.4.

(2) $G^{\mathfrak{F}} = Q = H$.

Из лемм 2.9(3) и 2.10(3) несложно вывести, что пара $(G/Q, H/Q)$ удовлетворяет условию теоремы. Из выбора пары $(G, H)$ следует, что $G/Q \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \leq Q \leq H$. Поскольку $1 \neq G^{\mathfrak{F}}$ — $q$-подгруппа в $H$, пара $(G, G^{\mathfrak{F}})$ также удовлетворяет условию. Отсюда вытекает, что $G^{\mathfrak{F}} = Q = H$.

(3) Если $M$ — максимальная подгруппа группы $G$, не содержащая $G^{\mathfrak{F}} = Q$, то $M \in \mathfrak{F}$.

Действительно, $G = MQ$ и $M/M \cap Q \cong MQ/Q = G/Q \in \mathfrak{F}$. По леммам 2.9(1) и 2.10(1) пара $(M, M \cap Q)$ удовлетворяет условию теоремы. Таким образом, $M \in \mathfrak{F}$ в силу выбора пары $(G, H)$.

(4) $Q/\Phi(Q)$ — $G$-главный фактор и $\exp(Q)$ равна $q$ или 4 (когда $q = 2$, $Q$ неабелева).

Это непосредственно вытекает из (3) и [3, теорема 3.4.2].

(5) В $Q$ есть подгруппа $L$ порядка $q$ или 4 такая, что $L \nleq \Phi(Q)$ и $L$ имеет сверхразрешимое добавление или удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$.

Выберем $x \in Q \backslash \Phi(Q)$ и положим $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L|$ равен $q$ или 4 (когда $q = 2$, $Q$ неабелева). Допустим, что $L \subseteq Z_\infty(G)$. Из (4) следует, что $(Q \cap Z_\infty(G))\Phi(Q)$ совпадает с $\Phi(Q)$ или $Q$. В первом случае $L \leq Q \cap Z_\infty(G) \leq \Phi(Q)$; противоречие. Во втором случае $Q \leq Z_\infty(G) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, где $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ — произведение всех нормальных подгрупп $E$ группы $G$, $G$-главные факторы которых имеют простой порядок. Значит, $|Q/\Phi(Q)| = q$. Отсюда следует, что $Q$ циклическая и $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.23; противоречие. Таким образом, $L \nsubseteq Z_\infty(G)$. Тогда по условию $L$ имеет сверхразрешимое добавление $T$ или удовлетворяет ($\triangle$) в $G$.

(6) $L \neq Q$.

Если это не так, то $Q = G^{\mathfrak{F}}$ — циклическая группа. По лемме 2.23 имеем $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

(7) Завершение доказательства.

Предположим сначала, что $L$ удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$. Рассуждая так же, как на шаге (9) доказательства теоремы 3.2, можно показать, что это невозможно. Теперь предположим, что $G = LT$ и $T$ сверхразрешима. Пусть $r$ — наибольший простой делитель числа $|T|$ и $R$ — силовская $r$-подгруппа в $T$. Мы показали, что $L \neq Q$, поэтому $r \geq q$. Поскольку $R \trianglelefteq T$, имеем $G = LN_G(R)$ и $|G : N_G(R)|$ равен 1, $q$ или 4.

(i) Случай 1: $|G : N_G(R)| = 1$. В этом случае $R \trianglelefteq G$. Если $r > q$, то $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$. Поскольку $(G/R, QR/R)$ удовлетворяет условию теоремы, $G/R \in \mathfrak{F}$ в силу выбора пары $(G, H)$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = Q \leq R$; противоречие. Теперь предположим, что $r = q$. Тогда $(R \cap Q)\Phi(Q)$ совпадает с $\Phi(Q)$ или $Q$, так как $Q/\Phi(Q)$ — $G$-главный фактор. В первом случае $R \cap Q \leq \Phi(Q)$. Поскольку $Q \cap T \leq R$, имеем $Q = L(Q \cap T) \leq LR$. Тогда $Q = LR \cap Q = L(R \cap Q)$ и, значит, $Q = L$, что противоречит (6). Во втором случае $L \leq Q \leq R \leq T$. Тогда $G = T \in \mathfrak{F}$; снова противоречие.

(ii) Случай 2: $|G : N_G(R)| = 2$. В этом случае $N_G(R) \trianglelefteq G$. Это означает, что $Q = G^{\mathfrak{F}} \leq N_G(R)$ и тем самым $G = N_G(R)$; противоречие.

(iii) Случай 3: $|G : N_G(R)| = q$, где $q$ — нечетное простое число. В этом случае $L \cap N_G(R) = 1$, поэтому $N_G(R) = (L \cap N_G(R))T = T$. Если $r > q$, то $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$. Так как $|G : N_G(R)| = q$, число силовских $r$-подгрупп группы $G$ равно $q$. Тогда по теореме Силова $q \equiv 1 \pmod r$, что невозможно. Теперь пусть $r = q$. Тогда $T \leq N_G(Q \cap R)$. Поскольку $T$ — максимальная подгруппа группы $G$, то $N_G(Q \cap R)$ совпадает с $G$ или $T$. В первом случае $Q \cap R \trianglelefteq G$, и рассуждение, аналогичное проведенному в (i), приводит к противоречию. Во втором случае ясно, что $Q \cap R < Q$. Это означает, что $Q \cap R < N_Q(Q \cap R) = Q \cap N_G(Q \cap R) = Q \cap T$. Однако $Q \cap T \leq R$; снова противоречие.

(iv) Случай 4: $|G : N_G(R)| = 4$. В этом случае $q = 2$ и $T = N_G(R)$. Если $r > q = 2$, то $4 \equiv 1 \pmod r$, поскольку $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$. Следовательно, $r = 3$, и, таким образом, $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как $|L| = 4$, группа $Q$ не циклическая в силу (4). Отметим, что $G/Q = QT/Q \cong T/Q \cap T$ сверхразрешима и, значит, 2-нильпотентна. Тогда получается, что пара $(G, Q)$ удовлетворяет условию теоремы 3.2 (при $p = 2$, $n = 1$). Следовательно, $G$ 2-нильпотентна. Это означает, что $G_{2'} = R \trianglelefteq G$ и тем самым $T = N_G(R) = G$; противоречие. Теперь предположим, что $r = q = 2$. Тогда $T \leq N_G(Q \cap R)$.

Значит, $|G : N_G(Q \cap R)|$ равен 1, 2 или 4. Если $|G : N_G(Q \cap R)|$ равен 1 или 4, то $N_G(Q \cap R) = G$ или $T$, и противоречие может быть достигнуто так же, как в (iii). Таким образом, $|G : N_G(Q \cap R)| = 2$. Тогда $N_G(Q \cap R) \trianglelefteq G$ и $Q = G^{\mathfrak{F}} \leq N_G(Q \cap R)$. Значит, $N_G(Q \cap R) = G$, и это противоречие завершает доказательство.

**Теорема 3.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $F^*(H)$ выполнено хотя бы одно из следующих утверждений.*

(i) *Любая максимальная подгруппа группы $P$, не имеющая сверхразрешимого добавления, удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$.*

(ii) *Любая циклическая подгруппа $L$ группы $P$ простого порядка или порядка 4 (когда $p = 2$, $P$ неабелева и $L \nsubseteq Z_\infty(G)$), не имеющая сверхразрешимого добавления, удовлетворяет условию ($\triangle$) в $G$.*

Доказательство. Нужно доказать только достаточность.

(1) Случай 1: $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$.

Очевидно, пара $(F^*(H),\ F^*(H))$ удовлетворяет условию теоремы 3.4 или теоремы 3.5. Следовательно, группа $F^*(H)$ сверхразрешима и, в частности, разрешима. Из [21, гл. X, следствие 13.7(d)] вытекает, что $F^*(H) = F(H) \leq F(G)$. В этом случае слабая $\tau$-вложенность эквивалентна слабой S-вложенности по лемме 2.8. Значит, пара $(G, H)$ удовлетворяет условию леммы 2.24. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$.

(2) Случай 2: $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{U}$.

Очевидно, пара $(H, H)$ удовлетворяет условию из п. (1). Поэтому $H$ сверхразрешима, а значит, и разрешима. Следовательно, $F^*(H) = F(H) \leq F(G)$. Таким образом, снова по лемме 2.24 получаем, что $G \in \mathfrak{F}$.

## 4. Приложения

Как видно в § 1, любая S-квазинормальная, SS-квазинормальная, S-полуперестановочная, $\tau$-квазинормальная или S-вложенная подгруппа группы $G$ слабо $\tau$-вложена в $G$. С другой стороны, ясно, что любая S-квазинормально вложенная подгруппа группы $G$ слабо S-вложена в $G$.

Кроме понятий, упомянутых в § 1, есть еще несколько, которые стоит ввести. Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется c-*нормальной в* $G$ [22], если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$, где $H_G$ — наибольшая нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $H$; подгруппа $H$ группы $G$ называется c$^*$-нормальной [23] в $G$, если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $G = HK$ и $H \cap K$ S-квазинормально вложена в $G$; подгруппа $H$ группы $G$ называется n-*вложенной в* $G$ [20], если существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $HK = H^G$ и $H \cap K \leq H_{sG}$. Несложно понять, что все такие подгруппы группы $G$ также слабо S-вложены или слабо $\tau$-вложены в $G$.

Таким образом, из полученных теорем непосредственно вытекает много следствий. Приведем некоторые из них.

**Следствие 4.1** [24, теорема 3.3]. *Пусть $p$ — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Если любая максимальная подгруппа группы $P$ S-полуперестановочна в $G$, то $G$ $p$-нильпотентна.*

**Следствие 4.2** [23, теорема 3.1]. *Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $G/H$ $p$-нильпотентна, и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $H$, где $p$ — простой делитель числа $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если все максимальные подгруппы группы $P$ $\mathrm{c}^*$-нормальны в $G$, то $G$ $p$-нильпотентна. В частности, $G$ $p$-сверхразрешима.*

**Следствие 4.3** [25, теорема 2.3]. *Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, где $p$ — простой делитель числа $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если любая максимальная подгруппа группы $P$, не имеющая $p$-нильпотентного добавления в $G$, $S$-вложена в $G$, то $G$ $p$-нильпотентна.*

**Следствие 4.4** [6, теорема 1.7]. *Пусть $p$ — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Если любая 2-максимальная подгруппа группы $P$ SS-квазинормальна в $G$ и $G$ $A_4$-свободна, то $G$ $p$-нильпотентна.*

**Следствие 4.5** [24, теорема 3.5]. *Пусть $p$ — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Если любая 2-максимальная подгруппа группы $P$ $S$-полуперестановочна в $G$ и $G$ $A_4$-свободна, то $G$ $p$-нильпотентна.*

**Следствие 4.6** [6, теорема 1.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любого простого числа $p$, делящего $|H|$, и любой $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ любая максимальная подгруппа группы $P$ SS-квазинормальна в $G$.*

**Следствие 4.7** [26, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $H$ S-полуперестановочны в $G$.*

**Следствие 4.8** [23, теорема 4.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Предположим, что $G$ — группа с нормальной подгруппой $H$ такой, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $H$ $\mathrm{c}^*$-нормальны в $G$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

**Следствие 4.9** [27, теорема 3.4]. *Если все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы $G$ SS-квазинормальны в $G$, то $G$ сверхразрешима.*

**Следствие 4.10** [26, теорема 3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы $H$ S-полуперестановочны в $G$.*

**Следствие 4.11** [20, теорема D]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $E$ любая максимальная подгруппа группы $P$ или любая циклическая подгруппа $H$ группы $P$ простого порядка или порядка 4 (когда $P$ — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$) n-вложена в $G$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

**Следствие 4.12** [9, теорема C]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $E$ любая максимальная подгруппа $P$ или любая циклическая подгруппа $H$ группы $P$ простого порядка или порядка 4 $\big($когда $P$ — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)\big)$* S-*вложена в $G$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

**Следствие 4.13** [27, теорема 3.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $F^*(H)$* SS-*квазинормальны в $G$.*

**Следствие 4.14** [27, теорема 3.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы $F^*(H)$* SS-*квазинормальны в $G$.*

**Следствие 4.15** [26, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует разрешимая нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $F(H)$* S-*полуперестановочны в $G$.*

**Следствие 4.16** [26, теорема 4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует разрешимая нормальная подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы $F(H)$* S-*полуперестановочны в $G$.*

**Следствие 4.17** [23, теорема 4.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Предположим, что $G$ — группа с нормальной подгруппой $H$ такой, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $F^*(H)$* c$^*$-*нормальны в $G$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

**Следствие 4.18** [20, теорема E]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $F^*(E)$ любая максимальная подгруппа группы $P$ или любая циклическая подгруппа $H$ группы $P$ простого порядка или порядка 4 (когда $P$ — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$)* n-*вложена в $G$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

**Следствие 4.19** [9, теорема D]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для любой нециклической силовской подгруппы $P$ группы $F^*(E)$ любая максимальная подгруппа группы $P$ или любая циклическая подгруппа $H$ группы $P$ простого порядка или порядка 4 (когда $P$ — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$)* S-*вложена в $G$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
2. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1996.
3. *Guo W.* The theory of classes of groups. Dordrecht: Kluwer, 2000.

**4.** *Kegel O. H.* Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
**5.** *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* Sufficient conditions for supersolubility of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 127. P. 113–118.
**6.** *Li S., Shen Z., Liu J., Liu X.* The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups // J. Algebra. 2008. V. 319. P. 4275–4287.
**7.** *Chen Z.* On a theorem of Srinivasan // J. Southwest Normal Univ. Nat. Sci. 1987. V. 12, N 1. P. 1–4.
**8.** *Lukyanenko V. O., Skiba A. N.* On $\tau$-quasinormal and weakly $\tau$-quasinormal subgroups of finite groups // Math. Sci. Res. J. 2008. V. 12. P. 243–257.
**9.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* On solubility and supersolubility of some classes of finite groups // Sci. China, Ser. A. 2009. V. 52, N 1. P. 1–15.
**10.** *Li J., Chen G., Chen R.* On weakly S-embedded subgroups of finite groups // Sci. China, Ser A. 2011. V. 54, N 9. P. 1899–1908.
**11.** *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Bd 82. S. 125–132.
**12.** *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 82, N 1. P. 285–293.
**13.** *Lukyanenko V. O., Skiba A. N.* On weakly $\tau$-quasinormal subgroups of finite groups // Acta Math. Hungar. 2009. V. 125, N 3. P. 247–248.
**14.** *Li Y., Wang Y., Wei H.* On $p$-nilpotency of finite groups with some subgroups $\pi$-quasinormally embedded // Acta Math. Hungar. 2005. V. 108, N 4. P. 283–298.
**15.** *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
**16.** *Cross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.
**17.** *Wang Y., Wei H., Li Y.* A generalization of a theorem of Kramer and its applications // Bull. Austral. Math. Soc. 2002. V. 65. P. 467–475.
**18.** *Tate J.* Nilpotent quotient groups // Topology. 1964. V. 3. P. 109–111.
**19.** *Guo W.* On $\mathfrak{F}$-supplemented subgroups of finite groups // Manuscr. Math. 2008. V. 127. P. 139–150.
**20.** *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with given $s$-embedded and $n$-embedded subgroups // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 2843–2860.
**21.** *Huppert B., Blackburn N.* Finite Groups. III. Berlin: Springer-Verl., 1982.
**22.** *Wang Y.* c-Normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180, N 3. P. 954–965.
**23.** *Wei H., Wang Y.* On c$^*$-normality and its properties // J. Group Theory. 2007. V. 10. P. 211–224.
**24.** *Wang L., Wang Y.* On S-semipermutable maximal and minimal subgroups of Sylow $p$-subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2006. V. 34. P. 143–149.
**25.** *Го В., Лу И., Ню В.* Об S-вложенных подгруппах конечных групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 4. С. 433–450.
**26.** *Zhang Q., Wang L.* The influence of S-semipermutability of some subgroups on the structure of groups // Acta Math. Sin. 2005. V. 48, N 1. P. 81–88. (in chinese).
**27.** *Li S., Shen Z., Kong X.* On SS-quasinormal subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2008. V. 36. P. 4436–4447.


*Статья поступила 22 сентября 2012 г.*

Xiaoyu Chen (Чен Сяоюй), Wenbin Guo (Го Вэньбинь)
School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China,
Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, Chinese Academy of Science,
Hefei 230026 China
jelly@mail.ustc.edu.cn, wbguo@ustc.edu.cn