Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 512.62+514.172.45

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КЭЛИ — МЕНГЕРА НЕПРИВОДИМ ПРИ $n \geq 3$

К. Д'Андреа, М. Сомбра

Аннотация: Доказано, что определитель Кэли — Менгера n-мерного симплекса является абсолютно неприводимым многочленом при $n \geq 3$, а также изучена неприводимость многочленов, возникающих в подобных геометрических конструкциях.

Ключевые слова: объем симплекса, определитель Кэли — Менгера, неприводимый многочлен.

Пусть $\{d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n\}$ — совокупность $n(n+1)/2$ переменных. Рассмотрим квадратную $(n+2) \times (n+2)$-матрицу

$$\mathrm{CM}_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \cdots & d_{2n}^2 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Многочлен от многих переменных $\Gamma_n := \det(\mathrm{CM}_n) \in \mathbb{Z}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$ называется *определителем Кэли — Менгера*.

Пусть $v_0, \dots, v_n$ — $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через S выпуклую оболочку этих точек в $\mathbb{R}^n$. Упомянутый определитель дает формулу для n-мерного объема симплекса S в терминах евклидовых расстояний $\{\delta_{ij} := \mathrm{dist}(v_i, v_j) : 0 \leq i < j \leq n\}$ между рассматриваемыми точками. А именно (см. [1, п. 9.7; 2, п. IV.40])

$$\mathrm{Vol}_n(S)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \Gamma_n(\delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{(n-1)n}).$$

Эта формула показывает, что Γ_n является однородным многочленом степени $2n$. Многочлен Γ_2 может быть разложен на линейные множители, и это разложение приводит к хорошо известной *формуле Герона*, выражающей площадь A треугольника через длины его сторон a, b и c:

$$16A^2 = -\Gamma_2(a, b, c) = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c). \tag{2}$$

Заметим, что уравнение $\Gamma_n(\delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{(n-1)n}) = 0$ дает необходимое и достаточное условие того, что точки $v_0, \dots, v_n$ лежат в собственном аффинном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$.

Первый автор получал поддержку от Miller Research Fellowship, второй — от Ramón y Cajal Program.

Определитель Кэли — Менгера может быть также использован для выяснения, является ли множество положительных вещественных чисел $\{\delta_{ij} : 0 \leq i < j \leq n\}$ множеством длин ребер некоторого n-мерного симплекса в пространстве $\mathbb{R}^n$: в [1, п. 9.7.3] показано, что для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенство $(-1)^{h+1}\Gamma_h(\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots, \delta_{(h-1)h}) > 0$ выполнялось для всех $h = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица CM_n дает критерий, позволяющий выяснить, лежат ли данные $n+2$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ на некоторой $(n-1)$-мерной сфере, а также возможность решить родственную задачу о вычислении радиуса сферы, описанной вокруг симплекса. С этой целью рассмотрим $(1,1)$-минор:

$$\Delta_n := \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1n}^2 \\ d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \cdots & d_{2n}^2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n].$$

Непосредственно видно, что это выражение является однородным многочленом степени $2n+2$.

Предположим теперь, что точки $v_0, \ldots, v_n$ не лежат ни в каком собственном аффинном подпространстве, так что S является n-мерным симплексом. Тогда радиус сферы, описанной вокруг S, дается формулой

$$\rho(S)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\Delta_n(\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots, \delta_{(n-1)n})}{\Gamma_n(\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots, \delta_{(n-1)n})}. \tag{3}$$

Помимо этого, $n+2$ точек $v_0, \ldots, v_{n+1}$ пространства $\mathbb{R}^n$ лежат на одной сфере или гиперплоскости, если и только если $\Delta_{n+1}(\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots, \delta_{n(n+1)}) = 0$ (см. [1, п. 9.7.3.7]).

Многочлен Δ_3 разлагается на множители следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_3 = -(d_{01}d_{23} + d_{02}d_{13} + d_{03}d_{12})(d_{01}d_{23} + d_{02}d_{13} - d_{03}d_{12}) \\ \times (d_{01}d_{23} - d_{02}d_{13} + d_{03}d_{12})(-d_{01}d_{23} + d_{02}d_{13} + d_{03}d_{12}). \end{aligned} \tag{4}$$

Это разложение соответствует теореме Птолемея, согласно которой выпуклый четырехугольник с длинами сторон a, b, c, d и длинами диагоналей e, f является вписанным в окружность, если и только если $ac + bd = ef$.

Основные сведения об определителях Кэли — Менгера можно найти в классических книгах М. Берже [1] и Л. Блюменталя [2].

Эти многочлены играют важную роль в некоторых вопросах метрической геометрии. В 1928 г. они были использованы Менгером для того, чтобы охарактеризовать евклидовы пространства исключительно в метрических терминах [2, гл. IV]. Они же участвуют в метрической характеризации римановых многообразий постоянной секционной кривизны, полученной М. Берже [3].

Другим важным результатом, основанным на использовании определителей Кэли — Менгера, является доказательство постоянства объема произвольного изгибаемого многогранника в трехмерном евклидовом пространстве (так называемой «гипотезы кузнечных мехов»), см. [4–6]. Имеется также обширная литература по применению определителей Кэли — Менгера к изучению пространственной формы молекул, т. е. к стереохимии, см., например, [7–9].

Естественно возникает вопрос: может ли формула Герона (2) быть обобщена на высшие размерности, т. е. может ли многочлен Γ_n быть представлен как произведение линейных форм (заметим, что это верно не только при $n = 2$, но и при $n = 1$: $\Gamma_1 = 2d_{01}^2$)? Цель данной статьи состоит в том, чтобы дать отрицательный ответ на этот вопрос при $n \geq 3$. Более того, мы докажем, что при $n \geq 3$ любой множитель многочлена Γ_n в $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$ тривиален, т. е. либо является константой, либо отличается от Γ_n на постоянный множитель. Другими словами, мы покажем, что Γ_n *абсолютно неприводим.*

Теорема 1. *При всяком $n \geq 3$ многочлен Γ_n неприводим над $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$.*

Аналогично можно спросить: представляется ли Δ_n в виде произведения более простых выражений, как это имеет место в формуле (4)? Отметим, что интересующие нас разложения имеют место не только при $n = 3$, но и при $n = 1$ и $n = 2$: $\Delta_1 = -d_{01}^4$ и $\Delta_2 = 2d_{01}^2 d_{02}^2 d_{12}^2$. И вновь мы дадим отрицательный ответ для всех $n \geq 4$.

Теорема 2. *При всяком $n \geq 4$ многочлен Δ_n неприводим над $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$.*

Из последней теоремы непосредственно вытекает, что определитель общей симметричной $n \times n$-матрицы с нулями на диагонали является абсолютно неприводимым многочленом при всяком $n \geq 4$ (см. замечание 7).

Непосредственная проверка показывает, что Γ_3 является умноженным на 2 многочленом с целыми коэффициентами и что то же самое верно для Δ_4. Это наблюдение не влияет на их неразложимость над $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$: двойка является тривиальным множителем, поскольку она является единицей в $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$. Тем не менее интересно проследить, как обсуждаемые многочлены ведут себя над $\mathbb{Z}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$. Напомним, что *содержание* многочлена с целыми коэффициентами определяется как наибольший общий делитель его коэффициентов.

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ многочлены Γ_n и Δ_{n+1} имеют содержание* 1 *для четных n и содержание* 2 *для нечетных n.*

Обозначим через $\overline{\mathbb{Z}}$ кольцо алгебраических целых чисел, т. е. кольцо, образованное элементами алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}}$, удовлетворяющими уравнениям с рациональными коэффициентами, старший из которых равен 1. Хорошо известно, что многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\overline{\mathbb{Z}}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$, если и только если он неприводим над $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$ и имеет содержание 1. Положим

$$I_n := \begin{cases} \Gamma_n & \text{для четных } n, \\ \Gamma_n/2 & \text{для нечетных } n, \end{cases} \qquad J_n := \begin{cases} \Delta_n/2 & \text{для четных } n, \\ \Delta_n & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Тогда теоремы 1–3 эквивалентны тому факту, что I_n и J_n неприводимы над $\overline{\mathbb{Z}}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$ (и, в частности, над $\mathbb{Z}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$) при всех $n \geq 3$ и $n \geq 4$ соответственно.

Пусть t_n — новая переменная. Положим

$$\Lambda_{n,n-1} := \Gamma_n\big(d_{in} \mapsto t_n : 0 \leq i \leq n-1\big) \in \mathbb{Z}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n-1][t_n].$$

С точностью до скалярного множителя $\sqrt{\Lambda_{n,n-1}}$ дает формулу для объема равнобедренного симплекса $S(\tau) \subset \mathbb{R}^n$ с основанием $B := \operatorname{Conv}(v_0, \ldots, v_{n-1})$ и вершиной v_n, расположенной на одном и том же расстоянии τ от каждой из других вершин (рис. 1).

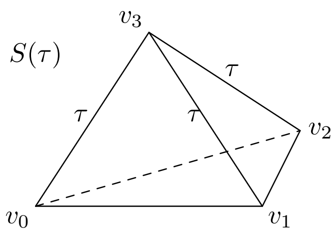

Рис. 1.

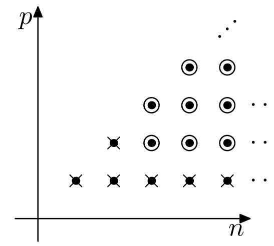

Рис. 2.

В [1, п. 9.7.3.7] приведена формула

$$\Lambda_{n,n-1} = -2\Gamma_{n-1}t_n^2 - \Delta_{n-1}, \tag{5}$$

которая легко может быть выведена из определителя, задающего $\Lambda_{n,n-1}$. Главный член в этом выражении согласуется с геометрической интуицией:

$$\mathrm{Vol}_n(S(\tau)) \sim \frac{\tau}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(B) \qquad \text{для } \tau \to \infty.$$

Предполагая $\dim(B) = n-1$, заметим, что если $\tau = \rho(B)$ является радиусом сферы, описанной вокруг B, то $\Lambda_{n,n-1} = 0$, а значит, мы заново доказали (3).

Более общó, если $1 \leq p \leq n$, то мы полагаем

$$\Lambda_{n,p} := \begin{cases} \Gamma_n(d_{i\ell} \mapsto t_\ell : p+1 \leq \ell \leq n,\ 0 \leq i \leq \ell - 1), & \text{если } p \leq n-1, \\ \Gamma_n, & \text{если } p = n, \end{cases}$$

где $\{t_2, \ldots, t_n\}$ обозначает еще одну группу переменных. Если $p < n$, то $\Lambda_{n,p}$ является однородным выражением, получаемым из Γ_n спецификацией некоторых переменных, и $\Lambda_{n,p}$ является однородным многочленом степени $2n$ относительно всего множества переменных $\{d_{ij} : 0 \leq i < j \leq p\} \cup \{t_{p+1}, \ldots, t_n\}$.

Пусть $B_p := \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_p)$ обозначает p-мерный симплекс с длинами ребер $\{\delta_{ij} : 0 \leq i < j \leq p\}$, и пусть $0 \ll \tau_{p+1} \ll \cdots \ll \tau_n$. Последнее означает, что τ_ℓ достаточно велико по сравнению с $\tau_{p+1}, \ldots, \tau_{\ell-1}$ при $\ell = p+1, \ldots, n$. Через $S(\tau_{p+1}, \ldots, \tau_n) \subset \mathbb{R}^n$ обозначим n-мерный симплекс, полученный из B_p последовательным присоединением вершин v_ℓ, расположенных на равном расстоянии τ_ℓ от всех ранее построенных вершин $v_0, \ldots, v_{\ell-1}$. С точностью до скалярного множителя выражение $\sqrt{\Lambda_{n,p}}$ дает формулу для объема симплекса $S(\tau_{p+1}, \ldots, \tau_n)$. При этом имеем следующее рекуррентное соотношение.

Лемма 4. $\Lambda_{n,p} = -2\Lambda_{n-1,p}t_n^2 - \Lambda_{n-2,p}t_{n-1}^4$ *для всех* $n \geq p+2$.

Доказательство. Из определения Δ_n получаем

$$\Delta_{n-1}(d_{i(n-1)} \mapsto t_{n-1} :\ 0 \leq i \leq n-2) = t_{n-1}^4\Gamma_{n-2}, \tag{6}$$

что с учетом (5) дает

$$\Lambda_{n,n-2} = -2\Lambda_{n-1,n-2}t_n^2 - \Lambda_{n-2,n-2}t_{n-1}^4$$

для всех $n \geq 2$. Общий случай получается, если в обеих частях доказанного равенства положить $d_{i\ell} \mapsto t_\ell$ для $p+1 \leq \ell \leq n-2$ и $0 \leq i \leq \ell - 1$. $\square$

Теорема 1 является частным случаем следующего утверждения.

Утверждение 5. *Многочлен $\Lambda_{n,p}$ неприводим над $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \le i < j \le n]$, если и только если $n \ge 3$ и $2 \le p \le n$.*

Рис. 2 является графическим выражением этого утверждения. Кружками обведены те целочисленные точки (n, p), для которых $\Lambda_{n,p}$ является абсолютно неприводимым, а крестиками отмечены те точки, где это не так. Свойства многочленов Γ_n отражены диагональю.

Доказательство. Сначала докажем по индукции, что многочлен $\Lambda_{n,2}$ является абсолютно неприводимым при всех $n \ge 3$. Пусть $n = 3$. Из тождества (5) и формулы Герона вытекает, что

$$\begin{aligned}\Lambda_{3,2}/2 &= -\Gamma_2 t_3^2 - \Delta_2/2 \\ &= (d_{01} + d_{12} + d_{02})(-d_{01} + d_{12} + d_{02})(d_{01} - d_{12} + d_{02})(d_{01} + d_{12} - d_{02})t_3^2 \\ &\qquad - d_{01}^2 d_{12}^2 d_{02}^2. \qquad (7)\end{aligned}$$

Многочлены

$$f := (d_{01} + d_{12} + d_{02})(-d_{01} + d_{12} + d_{02})(d_{01} - d_{12} + d_{02})(d_{01} + d_{12} - d_{02})$$

и

$$g := -d_{01}^2 d_{12}^2 d_{02}^2$$

не имеют общих непостоянных множителей и поэтому всякое нетривиальное разложение многочлена $\Lambda_{3,2}$ на множители должно иметь вид

$$\Lambda_{3,2} = (\alpha t_3 + \beta)(\gamma t_3 + \delta),$$

где $\alpha\gamma = 2f$, $\beta\delta = 2g$ и $\alpha\delta + \beta\gamma = 0$. Но это невозможно, поскольку попарно многочлены $\alpha, \gamma, \beta \cdot \delta$ не имеют общих (непостоянных) множителей над $\mathbb{C}[d_{01}, d_{02}, d_{12}]$. Следовательно, $\Lambda_{3,2}$ неприводим.

Пусть теперь $n \ge 4$. Предположим, что $\Lambda_{n-1,2}$ неприводим. Согласно лемме 4

$$\Lambda_{n,2} = -2\Lambda_{n-1,2} t_n^2 - \Lambda_{n-2,2} t_{n-1}^4.$$

Многочлены $\Lambda_{n-1,2}$ и $\Lambda_{n-2,2} t_{n-1}^4$ взаимно просты, поскольку $\Lambda_{n-1,2}$ — неприводимый многочлен степени $2n - 2$, а $\deg(\Lambda_{n-2,2}) = 2n - 4$. Как и раньше, это влечет, что любое нетривиальное разложение многочлена $\Lambda_{n,2}$ на множители должно иметь вид

$$\Lambda_{n,2} = (-2\Lambda_{n-1,2} t_n + \beta)(t_n + \delta),$$

где $\beta, \delta \in \mathbb{C}[d_{ij} : 0 \le i < j \le 2][t_3, \ldots, t_{n-1}]$ таковы, что $\beta \cdot \delta = -\Lambda_{n-2,2} t_{n-1}^4$ и $-2\Lambda_{n-1,2}\delta + \beta = 0$. Но это невозможно, поскольку $\Lambda_{n-1,2}$ и $\Lambda_{n-2,2} t_{n-1}^4$ взаимно просты. Следовательно, $\Lambda_{n,2}$ неприводим.

Пусть теперь $n \ge 3$ и $3 \le p \le n$. Допустим, мы можем написать

$$\Lambda_{n,p} = F \cdot G,$$

где $F, G \in \mathbb{C}[d_{ij} : \ 0 \le i < j \le p][t_{p+1}, \ldots, t_n]$ — некоторые однородные многочлены степени ≥ 1.

Отображение вычисления $d_{i\ell} \mapsto t_\ell$ $(p + 1 \le \ell \le n, \ 0 \le i \le \ell - 1)$ однородно, а значит,

$$F' := F(d_{i\ell} \mapsto t_\ell : \ p + 1 \le \ell \le n, \ 0 \le i \le \ell - 1),$$

$$G' := G(d_{i\ell} \mapsto t_\ell : \ p + 1 \le \ell \le n, \ 0 \le i \le \ell - 1)$$

также являются однородными многочленами степени ≥ 1, которые приводили бы к нетривиальному разложению многочлена $\Lambda_{n,2}$ на множители. Это показывает, что $\Lambda_{n,p}$ также неприводим.

Для завершения доказательства остается проверить, что $d_{01}|\Lambda_{n,1}$ для всех n. Для этого достаточно убедиться, что $\Lambda_{n,1}(d_{01} \mapsto 0) = 0$. Последнее соотношение вытекает из того факта, что в матрице, определяющей $\Lambda_{n,1}(d_{01} \mapsto 0)$, вторая и третья строки совпадают между собой. Остающийся случай $n = p = 2$ соответствует формуле Герона. $\square$

Доказательство теоремы 2. Положим

$$\Delta'_n := \Delta_n(d_{in} \mapsto 1: \ 1 \leq i \leq n-1) \in \mathbb{Z}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n-1].$$

Из определения Δ_n получаем

$$\Delta'_n = d_{0n}^4 \Gamma_{n-1}\left(\frac{d_{01}}{d_{0n}}, \ldots, \frac{d_{0(n-1)}}{d_{0n}}, d_{12}, d_{13}, \ldots, d_{(n-2)(n-1)}\right). \tag{8}$$

Заметим, что степень многочлена Γ_{n-1} по группе переменных

$$\{d_{0i} : \ 1 \leq i \leq n-1\} \tag{9}$$

равна 4. Следовательно, Δ'_n является гомогенизацией многочлена Γ_{n-1} по отношению к этим переменным, при которой d_{0n} взято в качестве переменной гомогенизации. Это вытекает опять же из представления Δ_n в виде определителя.

Пусть теперь $F, G \in \mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$ таковы, что $\Delta'_n = F \cdot G$. Поскольку многочлен Δ'_n однороден по отношению к переменным (9), заключаем, что F и G также однородны по отношению к этим переменным. Теперь дегомогенизуем это тождество, полагая $d_{0n} \mapsto 1$. Получим

$$\Gamma_{n-1} = F(d_{0n} \mapsto 1) \cdot G(d_{0n} \mapsto 1).$$

По теореме 1 многочлен Γ_{n-1} неприводим при любом $n \geq 4$. Следовательно, либо $F(d_{0n} \mapsto 1) \in \mathbb{C}$, либо $G(d_{0n} \mapsto 1) \in \mathbb{C}$. Последнее может иметь место, только если F или G является мономом относительно d_{0n}. Это, однако, невозможно, поскольку d_{0n} является переменной гомогенизации. Следовательно, многочлен Δ'_n неприводим.

Теперь предположим, что многочлен Δ_n *может* быть факторизован, а именно что $P, Q \in \mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$ — однородные многочлены степени ≥ 1 такие, что $\Delta_n = P \cdot Q$. Тогда $\Delta'_n = P' \cdot Q'$, где

$$P' := P(d_{in} \mapsto 1: \ 1 \leq i \leq n-1) \ , \quad Q' := Q(d_{in} \mapsto 1: \ 1 \leq i \leq n-1).$$

Заметим, что

$$\deg(\Delta'_n) = \deg(\Gamma_{n-1}) + 4 = 2n + 2,$$

тем самым

$$\deg(\Delta'_n) = \deg(\Delta_n).$$

Это означает, что

$$\deg(P') = \deg(P) \geq 1$$

и

$$\deg(Q') = \deg(Q) \geq 1.$$

Последнее, однако, противоречит неприводимости многочлена Δ'_n. Следовательно, многочлен Δ_n неприводим. $\square$

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется один вспомогательный результат. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{x_{ij} : 1 \le \ i < j \le n\}$ — некоторое множество из $(n-1)n/2$ переменных. Введем обозначение

$$X_n := \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{12} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{13} & x_{23} & 0 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

для общей симметричной матрицы порядка n с нулевыми элементами на диагонали.

Лемма 6. *Для любого нечетного* n *содержание многочлена* $\det(X_n)$ *нацело делится на* 2.

Доказательство. Для произвольной *антисимметричной* матрицы порядка n введем обозначение

$$A_n := \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det(A_n) = \det\bigl(A_n^t\bigr) = (-1)^n \det(A_n) \in \mathbb{Z}[x_{ij} : 0 \le i < j \le n],$$

откуда в силу нечетности n вытекает $\det(A_n) = 0$. Здесь A_n^t обозначает матрицу, транспонированную к матрице A_n. С другой стороны, $X_n \equiv A_n \pmod 2$, а значит,

$$\det(X_n) \equiv \det(A_n) = 0 \pmod 2. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $c(n) \in \mathbb{N}$ — содержание многочлена Γ_n. Поскольку матрица Кэли — Менгера CM_n является симметричной матрицей порядка $n+2$ с нулевыми элементами на диагонали, то при всяком нечетном n из леммы 6 вытекает, что $2|c(n)$. Согласно лемме 4

$$\Lambda_{n,n-2}(t_n \mapsto 0) = -\Gamma_{n-2}t_{n-1}^4.$$

По определению $\Lambda_{n,n-2}(t_n \mapsto 0)$ является целочисленным вычислением (an integral evaluation) многочлена Γ_n, а значит, $c(n)$ делит его содержание, т. е. $c(n)|c(n-2)$. Непосредственно убедившись в справедливости утверждения при $n = 1$ и $n = 2$, заключаем по индукции, что оно верно для всех n.

Пусть теперь $c'(n) \in \mathbb{N}$ — содержание многочлена Δ_n. Поскольку матрица в определении Δ_n является симметричной и все ее диагональные элементы равны нулю, то для всякого четного n лемма 6 дает $2|c'(n)$. Тождество (8) влечет $c'(n)|c(n-1)$, т. е. $c'(n) = 1$ для нечетных n и $c'(n)|2$ для четных n. Следовательно, в последнем случае $c'(n) = 2$. $\square$

Замечание 7. Пусть

$$K_n := \begin{cases} \det(X_n) & \text{для четного } n, \\ \det(X_n)/2 & \text{для нечетного } n. \end{cases}$$

В качестве побочного продукта получаем из теорем 2 и 3, что K_n является неприводимым многочленом над $\overline{\mathbb{Z}}[x_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]$ при любом $n \geq 5$. Прямая проверка показывает, что это верно также для $n = 4$.

Благодарности. Мы признательны В. А. Александрову из Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН за постановку этой проблемы, постоянную поддержку при ее решении и за указания на литературу по определителям Кэли — Менгера.

Мы признательны также Матиасу Гранья, предложившему более простое доказательство леммы 6.

Эта статья была частично написана во время визита Мартина Сомбра в университет Калифорнии в Беркли, состоявшегося при поддержке Миллеровского института фундаментальных исследований в естествознании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.

2. *Blumenthal L. M.* Theory and applications of distance geometry. Oxford: Clarendon Press, 1953.

3. *Berger M.* Une caractérisation purement métrique des variétés riemanniennes à courbure constante // E. B. Christoffel: the influence of his work on mathematics and the physical sciences. Basel etc.: Birkhäuser, 1981. P. 480–492.

4. *Connelly R., Sabitov I., Walz A.* The bellows conjecture // Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, N 1. P. 1–10.

5. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция длин его ребер // Фундам. и прикладн. математика. 1996. Т. 2, № 4. С. 1235–1246.

6. *Sabitov I. Kh.* The volume as a metric invariant of polyhedra // Discrete Comput. Geom. 1998. V. 20, N 4. P. 405–425.

7. *Deo N., Micikevicius P.* Generating edge-disjoint sets of quadruples in parallel for the molecular conformation problem // Congr. Numer. 2000. V. 143. P. 81–96.

8. *Klapper M. H., DeBrota D.* Use of Cayley-Menger determinants in the calculation of molecular structures // J. Comput. Phys. 1980. V. 37. P. 56–69.

9. *Emiris I. Z., Mourrain B.* Computer algebra methods for studying and computing molecular conformations // Algorithmica. 1999. V. 25, N 2–3. P. 372–402.

Статья поступила 18 июня 2004 г.

Карлос Д'Андреа (Carlos D'Andrea)
Department of Mathematics
University of California at Berkeley
Berkeley CA 94720, USA
`cdandrea@math.berkeley.edu; http://math.berkeley.edu/~cdandrea/`

Мартин Сомбра (Martín Sombra)
Departament d'Algebra i Geometria
Facultat de Matematiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes 585
08007 Barcelona, Spain
`sombra@maply.univ-lyon1.fr, http://maply.univ-lyon1.fr/~sombra/`