Séminaire Lotharingien de Combinatoire **47** (2002), Article B47e

Ensembles inévitables

Guo-Niu Han[1] et Dominique Perrin[2]

[1]IRMA, CNRS et Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg
[2]Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 5, boulevard Descartes,
Champs sur Marne, F-77454 Marne la Vallee

Résumé. Un ensemble de mots X sur un alphabet A est dit *inévitable* si tout mot infini sur A a un facteur dans X. Nous discutons ici sans la résoudre une conjecture[1] suivant laquelle, pour chaque entier n, il existe un système de représentants des classes circulaires de mots de longueur n qui est aussi un ensemble inévitable. Dans cette Note, nous étudions des problèmes directement liés à cette conjecture : les classes permutativement circulaires, la conjecture dans les cas des petits n et l'extension aux systèmes de type fini.

1 Introduction

Un ensemble de mots X sur un alphabet A est dit *inévitable* si tout mot infini sur A a un facteur dans X. Par exemple, $\{aa, b\}$ est un ensemble inévitable sur deux lettres, mais $\{aa, bb\}$ ne l'est pas. On pourra se reporter à [5] (Chapitre 1, Section 6) pour des références sur cette notion et sur les sources antérieures.

Les ensembles inévitables formés de mots de même longueur ont été étudiés par M.-P. Schützengberger dans [6], qui a étudié en particulier le cardinal minimal des ensembles inévitables de mots de longueur n à k lettres.

[1]Cette conjecture vient d'être résolue par Georges Hansel et Jean-Marc Champarnaud.

On note $s_n(k)$ (resp. $q_n(k)$) le nombre de classes de conjugués de mots (resp. de mots primitifs) de longueur n sur un alphabet à k lettres. On a $s_n(k) = \sum_{d|n} q_d(k)$. De plus, comme cela est bien connu [5]

$$q_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) k^d$$

où μ désigne la fonction de Möbius, et aussi

$$s_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(n/d) k^d$$

où φ désigne la fonction d'Euler. Ceci permet un calcul direct des s_n. Pour $k = 2$, les valeurs de $q_n(2)$ et $s_n(2)$ pour $n \leq 13$ sont données ci-dessous.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$q_n(2)$	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630
$s_n(2)$	2	3	4	6	8	14	20	36	60	108	188	352	632

Pour $k = 3$, on obtient

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$q_n(3)$	3	3	8	18	48	116	312	810	2184	5880	16104
$s_n(3)$	3	6	11	24	51	130	315	834	2195	5934	16107

A partir d'un mot de longueur n, on peut fabriquer un mot infini dont tous les facteurs de longueur n sont dans une même classe circulaire. On a ainsi :

Proposition 1 *Un ensemble inévitable de mots de longueur n sur un alphabet à k lettres rencontre chaque classe de conjugués de mots de longueur n. Par conséquent, on a $\alpha(k, n) \geq s_n(k)$.*

Le résultat suivant a été démontré par Schützenberger [6].

Proposition 2
$$\lim_{n \to \infty} \alpha(k, n)/s_n(k) = 1.$$

Nous allons montrer, dans la section 3, qu'il existe un ensemble inévitable de mots binaires de longueur n avec exactement $s_n(2)$ éléments pour $n \leq 9$. Ceci plaide en faveur de la conjecture suivante.

Conjecture 1 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un ensemble inévitable de $s_n(k)$ mots de longueur n sur k lettres, i.e., $\alpha(k,n) = s_n(k)$.*

Cette Note est organisée comme suit : Dans la section 2, nous introduissons la notion de classes permutativement circulaires, qui généralise la notion de classe circulaire classique. Nous indiquons le lien avec les ensembles inévitables. Des formules pour calculer les nombres de classes permutativement circulaires sont également fournies. Dans la section 3, nous présentons les différents cas particulier pour vérifier la conjecture 1. Enfin, nous étudions le problème des ensembles inévitables pour les systèmes de type fini.

2 Classes permutativement circulaires

Soient A un alphabet fini et σ une permutation sur A, qui envoie la lettre a en $a' = \sigma(a)$. Pour tout mot $w = x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_n$ de longueur n, on pose $w' = x_2x_3x_4 \cdots x_nx_1'$. On dit que w' est le *permutativement circulaire* de w. Cet opérateur permutativement circulaire définit bien une relation d'équivalence, associée à σ, sur l'ensemble des mots de A de longueur n. On peut donc former les classes d'équivalence permutativement circulaires.

En particulier, dans le cas des mots binaires, il existe deux permutations d'ordre 2, ainsi deux classes permutativement circulaires. Celle associée à la permutation identique $(a)(b)$ est simplement la classe circulaire classique. La seconde, qui est associée à la permutation (ab), est appelée aussi la classe *anti-circulaire*.

Par exemple, pour $n = 5$, il y a 8 classes circulaires classiques

0	$aaaaa$
1	$aaaab, aaaba, aabaa, abaaa, baaaa$
2	$aaabb, aabba, abbaa, baaab, bbaaa$
3	$aabab, abaab, ababa, baaba, babaa$
4	$aabbb, abbba, baabb, bbaab, bbbaa$
5	$ababb, abbab, babab, babba, bbaba$
6	$abbbb, babbb, bbabb, bbbab, bbbba$
7	$bbbbb$

et 4 classes anti-circulaire :

$anti0$	*aaaaa*, *aaaab*, *aaabb*, *aabbb*, *abbbb*, *bbbbb*, *baaaa*, *bbaaa*, *bbbaa*, *bbbba*
$anti1$	*aaaba*, *abaaa*, *baaab*, *aabab*, *babaa*, *abbba*, *ababb*, *bbaba*, *babbb*, *bbbab*
$anti2$	*aabaa*, *aabba*, *abbaa*, *abaab*, *baaba*, *baabb*, *bbaab*, *abbab*, *babba*, *bbabb*
$anti3$	*ababa*, *babab*

Soit $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ un mot de longueur n. On note $\sigma(w) = x'_1 x'_2 \cdots x'_n$. Alors tous les facteurs du mot infini $\cdots \sigma^{-2}(w) \cdot \sigma^{-1}(w) \cdot w \cdot \sigma(w) \cdot \sigma^2(w) \cdots$ sont permutativement circulaires associé à σ. On obtient ainsi le résultat suivant :

Proposition 3 *Pour toute permutation σ sur A, tout ensemble inévitable de mots de longueur n sur A rencontre chaque classe permutativement circulaire associée à σ de mots de longueur n.*

Par exemple, pour les mots binaires de longueur $n = 5$, l'ensemble inévitable suivant (représenté en gras) rencontre à la fois chaque classe circulaire et anti-circulaire.

	$anti0$	$anti1$	$anti2$	$anti3$
0	**aaaaa**			
1	**aaaab**, *baaaa*	*aaaba*, *abaaa*	*aabaa*	
2	*aaabb*, *bbaaa*	**baaab**	*aabba*, *abbaa*	
3		*aabab*, *babaa*	**abaab**, *baaba*	*ababa*
4	*aabbb*, *bbbaa*	*abbba*	*baabb*, **bbaab**	
5		*ababb*, *bbaba*	*abbab*, *babba*	**babab**
6	*abbbb*, *bbbba*	*babbb*, *bbbab*	**bbabb**	
7	**bbbbb**			

Pour toute permutation σ sur A, on note $s_n(\sigma)$ le nombre des classes permutativement circulaires de mots de longueur n, associées à σ. En utilisant la théorie de Pólya, en particulier, le lemme de Cauchy-Frobenius-Burnside (voir par exemple [2]), nous obtenons la formule suivante pour calculer $s_n(\sigma)$.

Proposition 4 *Soit σ une permutation d'ordre k ayant c_1 cycles de longueur 1, c_2 cycles de longueur 2, ..., c_k cycles de longueur k. Alors le nombre $s_n(\sigma)$ des classes permutativement conjuguées associées à la permutation σ est donné par la formule suivante :*

$$s_n(\sigma) = \frac{1}{mn} \sum_{d|n} \sum_{\substack{j=0 \\ \gcd(j,d)=1}}^{md-1} \Big(\sum_{r|j} r c_r \Big)^{n/d},$$

où m est le plus petit entier tel que $\sigma^m = id$.

Nous ne reproduisons pas la démonstration de cette Proposition. Dans le cas classique, σ est la permutation identique; on retrouve immédiatement la formule $s_n(k)$. Nous allons étudier un autre cas spécial, lorsque σ est une permutation circulaire $(123\cdots k)$.

Corollaire 1 *Soit σ la permutation circulaire $(123\cdots k)$ d'ordre k. Alors le nombre $s_n(\sigma)$ des classes permutativement conjuguées associées à la permutation σ est donné par la formule suivante :*

$$s_n(\sigma) = \frac{1}{kn} \sum_{\substack{d|n \\ \gcd(n/d,k)=1}} \varphi(n/d) k^d.$$

3 Les cas des petits entiers n

Nous présentons dans cette section les différents cas pour les petites valeurs de n ($n \leq 9$) et de k ($2 \leq k \leq 4$). On verra que dans tous les cas pour $k = 2$ on trouve un ensemble inévitable de cardinal minimal $s_n(k)$. Pour $k = 3$, on n'est parvenu à atteindre que les valeurs $n \leq 4$.

3.1 Les cas $n \leq 4$

Pour $n = 1$, il y a un seul ensemble inévitable qui est l'alphabet lui-même. Pour $n = 2$, sur $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, on a un ensemble inévitable de $s_2(k) = k(k+1)/2$ éléments

$$X = \{a_i a_j \mid i \leq j\}.$$

Pour $n = 3, 4$, on a $s_3(k) = (k^3 + 2k)/3$ et $s_4(k) = (k^4 + k^2 + 2k)/4$.

Sur deux lettres, on a les ensembles suivants. Chaque mot est donné en regard de la puissance de mot de Lyndon correspondante.

	Lyndon	Inévitable
0	*aaa*	*aaa*
1	*aab*	*aba*
2	*abb*	*abb*
3	*bbb*	*bbb*

	Lyndon	Inévitable
0	*aaaa*	*aaaa*
1	*aaab*	*aaab*
2	*aabb*	*baab*
3	*abab*	*baba*
4	*abbb*	*bbab*
5	*bbbb*	*bbbb*

Le nombre d'ensembles inévitables des mots binaires est donné par le tableau ci-dessous.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	4	30	28	68288	≥ 6643	≥ 8223	≥ 1

Pour $n = 3$ et $k = 3, 4$, on a les ensembles inévitables suivants.

	Lyndon	Inévitable
0	*aaa*	*aaa*
1	*aab*	*aab*
2	*aac*	*caa*
3	*abb*	*bab*
4	*abc*	*cab*
5	*acb*	*acb*
6	*acc*	*cac*
7	*bbb*	*bbb*
8	*bbc*	*bcb*
9	*bcc*	*ccb*
10	*ccc*	*ccc*

	Lyndon	Inévit.		Lyndon	Inévit.
0	*aaa*	*aaa*	12	*add*	*dad*
1	*aab*	*aba*	13	*bbb*	*bbb*
2	*aac*	*caa*	14	*bbc*	*cbb*
3	*aad*	*daa*	15	*bbd*	*dbb*
4	*abb*	*abb*	16	*bcc*	*cbc*
5	*abc*	*cab*	17	*bcd*	*dbc*
6	*abd*	*dab*	18	*bdc*	*cbd*
7	*acb*	*cba*	19	*bdc*	*dbd*
8	*acc*	*cac*	20	*ccc*	*ccc*
9	*acd*	*cda*	21	*ccd*	*cdc*
10	*adb*	*dba*	22	*cdd*	*cdd*
11	*adc*	*cad*	23	*ddd*	*ddd*

Pour $n = 4$, on trouve

	Lyndon	Inévitable		Lyndon	Inévitable
0	*aaaa*	*aaaa*	12	*abcc*	*ccab*
1	*aaab*	*aaab*	13	*acac*	*caca*
2	*aaac*	*acaa*	14	*acbb*	*cbba*
3	*aabb*	*baab*	15	*acbc*	*acbc*
4	*aabc*	*caab*	16	*accb*	*ccba*
5	*aacb*	*acba*	17	*accc*	*cacc*
6	*aacc*	*aacc*	18	*bbbb*	*bbbb*
7	*abab*	*baba*	19	*bbbc*	*cbbb*
8	*abac*	*acab*	20	*bbcc*	*cbbc*
9	*abbb*	*babb*	21	*bcbc*	*cbcb*
10	*abbc*	*bcab*	22	*bccc*	*cbcc*
11	*abcb*	*bcba*	23	*cccc*	*cccc*

3.2 Le cas $n = 5$

Pour $n = 5$, on a l'ensemble suivant, dû à Christopher Saker (communication personnelle, juin 2000).

	Lyndon	Inévitable
0	$aaaaa$	$aaaaa$
1	$aaaab$	$aaaab$
2	$aaabb$	$baaab$
3	$aabab$	$abaab$
4	$aabbb$	$bbaab$
5	$ababb$	$babab$
6	$abbbb$	$bbabb$
7	$bbbbb$	$bbbbb$

Il contredit l'affirmation donnée dans Lothaire ([4], Exercise 6.2 page 99) suivant laquelle 9 mots sont nécéssaires. Il n'est jamais trop tard pour s'amender. Il y a en fait 28 ensembles inévitables pour $n = 5$.

3.3 Le cas $n = 6$

Pour $n = 6$, Christopher Saker (communication personnelle, septembre 2000, [1]) a trouvé l'ensemble figurant dans la seconde colonne ci-dessous.

Une énumération systématique de tous les choix possibles de $6^9 \times 3^2 \times 2 \approx 10^8$ pour conjuguer les puissances de mots de Lyndon permet d'obtenir la troisième colonne après $\approx 3 \times 10^6$ itérations (quelques minutes).

Un tirage au hasard des 14 entiers donne la troisième colonne en moins de 10^3 essais (instantané).

	Lyndon	Saker	Enum	Random
0	*aaaaaa*	*aaaaaa*	*aaaaaa*	*aaaaaa*
1	*aaaaab*	*aaaaba*	*aaaaab*	*abaaaa*
2	*aaaabb*	*aaaabb*	*baaaab*	*abbaaa*
3	*aaabab*	*baaaba*	*abaaab*	*abaaab*
4	*aaabbb*	*baaabb*	*bbaaab*	*aabbba*
5	*aabaab*	*abaaba*	*abaaba*	*abaaba*
6	*aababb*	*bbaaba*	*aababb*	*abbaab*
7	*aabbab*	*abaabb*	*abaabb*	*bbabaa*
8	*aabbbb*	*bbaabb*	*bbaabb*	*abbbba*
9	*ababab*	*bababa*	*ababab*	*bababa*
10	*ababbb*	*bababb*	*abbbab*	*babbba*
11	*abbabb*	*bbabba*	*babbab*	*babbab*
12	*abbbbb*	*bbabbb*	*babbbb*	*abbbbb*
13	*bbbbbb*	*bbbbbb*	*bbbbbb*	*bbbbbb*

Le nombre total de systèmes de représentants des classes circulaires est $6^9 \times 3^2 \times 2 \approx 10^8$. Le nombre d'ensembles inévitables minimaux est 68288. La densité des ensembles inévitables par rapport au nombre total de systèmes de représentants des classes circulaires pour $n \leq 6$ est donnée ci-dessous.

n	1	2	3	4	5	6
	1	1	0,4	0,2	10^{-2}	6×10^{-3}

3.4 Le cas $n = 7$

Le nombre total de systèmes de représentants des classes circulaires est $7^{18} \approx 10^{15}$. Nous avons obtenu l'ensemble ci-dessous par une méthode mixte énumération/tirage au hasard. Le nombre de tirages porte sur $\approx 10^6$ ensembles (exécution en moins d'une heure). L'énumération consiste à choisir les mots de petite période. Par exemple, le mot de période 2 doit être un conjugué du mot de Lyndon d'indice 10 ou 15 (avec une seule possibilité pour chacun). L'énumération pure peut tourner pendant plusieurs heures sans résultat.

	Lyndon	Inévitable		Lyndon	Inévitable
0	*aaaaaaa*	*aaaaaaa*	10	*aababab*	*abababa*
1	*aaaaaab*	*aaabaaa*	11	*aababbb*	*abbbaab*
2	*aaaaabb*	*aaabbaa*	12	*aabbabb*	*abbabba*
3	*aaaabab*	*aababaa*	13	*aabbbab*	*abbbaba*
4	*aaaabbb*	*abbbaaa*	14	*aabbbbb*	*bbbbaab*
5	*aaabaab*	*aabaaba*	15	*abababb*	*babbaba*
6	*aaababb*	*ababbaa*	16	*ababbbb*	*bbbbaba*
7	*aaabbab*	*aabbaba*	17	*abbabbb*	*bbbabba*
8	*aaabbbb*	*bbbbaaa*	18	*abbbbbb*	*bbbabbb*
9	*aabaabb*	*baabbaa*	19	*bbbbbbb*	*bbbbbbb*

3.5 Les cas $n = 8, 9$

Pour $n = 8, 9$ sur deux lettres, des ensembles inévitables minimaux contiennent 36 et 60 mots respectivement. Dans le cas $n = 8$, le nombre total de systèmes de représentants de classes circulaires est

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 4^3 \cdot 8^{30} \approx 1,58 \times 10^{29}.$$

Dans le cas $n = 9$, le nombre total de systèmes de représentants des classes circulaires est

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 9^{56} \approx 2,46 \times 10^{54}.$$

Comme la densité des ensembles inévitables est de plus en plus faible (Y a-t-il une démonstration mathématique?), pour trouver les quelques ensembles inévitables parmi une quantité astronomique d'ensembles possibles, nous utilisons le fait suivant :

Fait: Soit A un ensemble inévitable de longueur n. On construit un ensemble B par enlèvement de la dernière lettre des mots dans A. Alors B est un ensemble inévitable de longueur $n - 1$.

En effet, on doit utiliser l'inverse du fait précédent, qui n'est plus un fait, mais plutôt une prévoyance :

Prévoyance: Soit B un ensemble inévitable de longueur $n - 1$. On construit une famille d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$ par ajout d'une dernière lettre (soit a, soit b) dans les mots de B. Alors il y a beaucoup de chances de trouver un ensemble inévitable de longueur n parmi les ensembles A_i.

Pour utiliser cette méthode, nous avons d'abord énuméré tous les ensembles inévitables de longueur 6. Il y en a 68288. A partir de cette famille d'ensemble, nous avons trouvé 6643 ensembles inévitables de longueur 7, 8223 ensembles inévitables de longueur 8, 1 ensemble inévitable de longueur 9. La liste des ensembles peut être consulté sur le web :

`http://www-irma.u-strasbg.fr/~guoniu/papers/set`

4 Systèmes de type fini

Soit S un système de type fini, c'est à dire un ensemble de mots infinis dans lequel on interdit l'apparition d'un nombre fini de mots. (voir [3] pour la définition précise de ce terme). On note $s_n = s_n(S)$ le nombre d'orbites de points de période n dans S (aussi appelées *colliers* de longueur n). On note $p_n = p_n(S)$ le nombre de points de période n et $q_n = q_n(S)$ le nombre d'orbites de période exatement n. On pose

$$\zeta(S) = \exp \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{n} z^n = \frac{1}{1 - \sum_{n \geq 1} u_n z^n}.$$

On a alors pour tout $n \geq 1$

$$p_n = n u_n + \sum_{1 \leq i \leq n-1} p_i u_{n-i}$$

et

$$p_n = \sum_{d|n} d q_d.$$

Comme $s_n = \sum_{d|n} q_d$ ces formules permettent de calculer s_n en fonction des p_n et donc des u_n. De plus, on a

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(n/d) p_d$$

où φ désigne la fonction d'Euler. Ceci permet un calcul direct des s_n.

Si S est une partie de A^Z et X une partie de A^*, on dit que X est inévitable dans S si tout élément de S a un facteur dans X.

Proposition 5 *Soit S un système de type fini sur l'alphabet A et $n \geq 0$ un entier. Si X est un ensemble inévitable de mots de longueur n, il contient au moins un représentant de chaque collier de période d pour $d|n$. On a donc $Card(X) \geq s_n(S)$.*

Démonstration. Soit $s = w^\zeta$ un mot de période n de S. Comme X est inévitable, il existe un facteur de s qui est dans X. Ainsi, X contient un conjugué de w.

Problème 1 *Soit S un systeme de type fini. Pour quels entiers n existe-t-il un ensemble inévitable de $s_n(S)$ mots de longueur n?*

La réponse n'est pas toujours positive. En effet, si $S = (ab)^\zeta$, un tel ensemble n'existe que pour n pair (on a $s_n = 0$ pour n impair).

4.1 Pas de bb

Si S est le système S_{bb} des mots qui évitent bb sur deux lettres, on a

$$\zeta(S) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

On en déduit les valeurs suivantes.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521
q_n	1	1	1	1	2	2	4	5	8	11	18	25	40
s_n	1	2	2	3	3	5	5	8	10	15	19	31	41

Pour S_{bb}, on a les ensembles inévitables minimaux suivants pour $n \leq 9$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	a	aa	aaa	$aaaa$	$aaaaa$	$aaaaaa$	$aaaaaaa$	$aaaaaaaa$	$aaaaaaaaa$
1		ab	aba	$aaba$	$aabaa$	$aaaaba$	$aaabaaa$	$aaaabaaa$	$aaaabaaaa$
2				$baba$	$ababa$	$abaaab$	$aababaa$	$ababaaaa$	$aababaaaa$
3						$abaaba$	$aabaaba$	$aabaabaa$	$aaaabaaba$
4						$bababa$	$abababa$	$abaaabaa$	$aabaaabaa$
5								$ababaaab$	$aabababaa$
6								$ababaaba$	$aababaaab$
7								$abababab$	$aababaaba$
8									$baabaabaa$
9									$ababababa$

Sur 3 lettres, on a pour le système S_{aa} des mots qui évitent aa sur 3 lettres a, b, c tout d'abord $\zeta(S) = \frac{1}{1-2z-2z^2}$. On en déduit les valeurs suivantes.

n	1	2	3	4	5
p_n	2	8	20	56	152
q_n	2	3	6	12	30
s_n	2	5	8	17	32

Pour $n \leq 4$, on obtient les ensembles inévitables suivants.

n	1	2	3	4
	b	ab	bab	$abab$
	c	ac	bca	$abac$
		bb	bac	$bbab$
		bc	cac	$bcab$
		cc	bbb	$abcb$
			bcb	$abcc$
			bcc	$acac$
			ccc	$bbac$
				$bcac$
				$cbac$
				$ccac$
				$bbbb$
				$bbcb$
				$bbcc$
				$cbcb$
				$ccbc$
				$cccc$

4.2 Pas de bbb

Pour S_{bbb}, on a

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 - z^3}.$$

On en déduit les valeurs suivantes.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p_n	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443	2757		
q_n	1	1	2	2	4	5	10	15	26	42	74	121	212
s_n	1	2	3	4	5	9	11	19	29	48	75	132	213

On a pour $n \leq 7$ les ensembles inévitables minimaux suivants.

	1	2	3	4	5	6	7
0	a	aa	aaa	$aaaa$	$aaaaa$	$aaaaaa$	$aaaaaaa$
1		ab	aab	$aaba$	$aabaa$	$aaaaba$	$aaabaaa$
2			bab	$abba$	$aabba$	$abaaab$	$aababaa$
3				$abab$	$ababa$	$abaaba$	$aabaaba$
4					$babba$	$bababa$	$abababa$
5						$bbabba$	$abbabba$
6						$ababba$	$aababba$
7						$baabba$	$aabbaba$
8						$aaabba$	$aabbaaa$
9							$bababba$
10							$aabbaab$

4.3 Autres systèmes

Le problème peut se présenter differemment pour des systèmes de type finis isomorphes. Ainsi, pour $S = (a+bc)^\varsigma$ qui est isomorphe a $(a+ba)^\varsigma$, on a tout d'abord pas d'ensemble inévitable de s_n mots de longueur n pour n impair. En effet, le mot $(bc)^\varsigma$ n'a pas de facteur répétable de longueur impaire. Les ensembles suivants sont inévitables pour $n = 2, 4, 6$.

n	2	4	6
	aa	$aaaa$	$aaaaaa$
	bc	$abca$	$bcbcbc$
		$bcbc$	$aabcaa$
			$abcbca$
			$bcabca$

Pour $n = 8$, il n'existe pas d'ensemble inévitable de 8 mots de longueur 8. En effet, le seul facteur répétable de longueur 8 de $(abc)^\varsigma$ est $w = bcabcabc$. Mais les seuls facteurs répétables de longueur 8 du mot $(abcbc)^\varsigma$ sont $abcbcabc$ et $bcabcbca$ qui sont conjugués de w.

5 Emboitements

On peut imaginer construire des ensembles inévitables pour le système plein en complétant progressivement des ensembles inévitables pour des systèmes de type fini plus petits.

Plus précisément, on peut construire un ensemble inévitable minimal $X = \{aaaa, baba, aaba, abba, bbba, bbbb\}$ pour $n = 4$ de la façon suivante. On considère la suite

$$\emptyset \subset S_b \subset S_{bb} \subset S_{bbb}.$$

et aussi

$$X_3 \subset X_2 \subset X_1 \subset X,$$

où $X_3 = \{bbbb, bbba\}$, $X_2 = \{bbbb, bbba, abba\}$, $X_1 = \{bbbb, bbba, abba, aaba, baba\}$. On a

$$\begin{aligned} S_{bbb} &= S_{X_3} \\ S_{bb} &= S_{X_2} \\ S_b &= S_{X_1} \\ \emptyset &= S_X \end{aligned}$$

On peut compléter un ensemble inévitable du système S_{bb} en un ensemble inévitable du système S_{bbb} en construisant un ensemble inévitable pour les mots qui ont le facteur bb mais pas le facteur bbb.

Les résultats pour $n \leq 8$ sont représentés ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6	7	8
0		bb	abb	$abba$	$abbaa$	$abbaaa$	$aaabbaa$	$abbaaaaa$
1					$abbab$	$abbaab$	$aababba$	$abbaaaab$
2						$abbaba$	$baabbaa$	$abbaaaba$
3						$abbabb$	$abbabba$	$abbaaabb$
4							$aabbaba$	$abbaabaa$
5							$bababba$	$abbaabab$
6								$abbaabba$
7								$aaabbaba$
8								$ababbaba$
9								$abaabbab$
10								$abbabbab$

Pour le système plein sur deux lettres $S = \{a, b\}^Z$, on parvient à construire pour chaque $n \leq 7$ un ensemble inévitable par emboitement des systèmes S_{b^i}

pour $i \leq n$.

	1	2	3	4	5	6	7
0	a	aa	aaa	$aaaa$	$aaaaa$	$aaaaaa$	$aaaaaaa$
1	b	ab	aba	$aaba$	$aabaa$	$aaaaba$	$aaabaaa$
2		bb	abb	$baba$	$ababa$	$abaaab$	$aababaa$
3			bbb	$abba$	$abbaa$	$abaaba$	$aabaaba$
4				$bbba$	$abbab$	$bababa$	$abababa$
5				$bbbb$	$abbba$	$abbaaa$	$aaabbaa$
6					$bbbba$	$abbaab$	$aababba$
7					$bbbbb$	$abbaba$	$baabbaa$
8						$abbabb$	$abbabba$
9						$abbbaa$	$aabbaba$
10						$abbbab$	$bababba$
11						$abbbba$	$abbbaaa$
12						$abbbbb$	$abbbaab$
13						$bbbbbb$	$abbbaba$
14							$abbbabb$
15							$abbbbaa$
16							$abbbbab$
17							$abbbbba$
18							$bbbbbba$
19							$bbbbbbb$

On obtient donc ainsi une méthode de construction d'ensembles inévitables minimaux. Nous ne savons pas si cette construction est toujours possible.

References

[1] Peter M. Higgins and Christopher J. Saker. Unvoidable sets of words of uniform length. Technical report, University of Essex, 2001.

[2] Adalbert Kerber. *Algebraic combinatorics via finite group actions.* Wissenschaftsverlag, 1991.

[3] Douglas Lind and Brian H. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding.* Cambridge, 1995.

[4] M. Lothaire. *Combinatorics on words.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[5] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 2001. à paraître, disponible sur `http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Lothaire/index.html`.

[6] Marcel-Paul Schützenberger. On the synchronizing properties of certain prefix codes. *Inform. and Control*, 7:23–36, 1964.