Séminaire Lotharingien de Combinatoire B36z (10pp.)

EIN VERGLEICH ZWEIER OBERER SCHRANKEN FÜR DIE PERMANENTE VON $(0,1)$-MATRIZEN

von

Suk-Geun HWANG und Arnold Richard KRÄUTER

Zusammenfassung. In dieser Note werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, welche der Permanentenabschätzungen von Minc-Brègman (1973) und Donald *et al.* (1984) für eine gegebene Matrix schärfer ist.

Abstract. In this note we present sufficient conditions such that one can predict immediately which one of the permanental bounds by Minc-Brègman (1973) and Donald *et al.* (1984) gives the better estimation for a given matrix.

1. Einleitung. Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbf{C}$. Die *Permanente* von A ist definiert durch

$$\mathrm{per}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

wobei S_n die symmetrische Gruppe der Ordnung n bezeichnet.

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt $(0,1)$-*Matrix* falls $a_{ij} \in \{0,1\}$ ist für alle i und j.

Eine $n \times n$-Matrix A heißt *vollständig unzerlegbar,* falls es keine $n \times n$-Permutationsmatrizen P und Q gibt mit

$$PAQ = \begin{bmatrix} X & O \\ Z & Y \end{bmatrix},$$

wobei die Diagonalblöcke X und Y quadratisch sind. Anderenfalls heißt A *teilweise zerlegbar.*

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen sind die folgenden zwei Ungleichungen für Permanenten:

SATZ A (vermutet von H. Minc [6], bewiesen von L. M. Brègman [1], neu bewiesen von A. Schrijver [8]). *Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$. Dann gilt*

$$\operatorname{per}(A) \leq \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}. \tag{1}$$

Gleichheit tritt in (1) *genau dann auf, wenn A permutationsäquivalent zu einer direkten Summe quadratischer Blöcke ist, deren Elemente sämtlich* 1 *sind.*

SATZ B (J. Donald, J. Elwin, R. Hager & P. Salamon [2], neu bewiesen von S.-G. Hwang & A. R. Kräuter [4]). *Es sei A eine vollständig unzerlegbare $n \times n$-Matrix mit nichtnegativen ganzzahligen Elementen und den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$. Dann gilt*

$$\operatorname{per}(A) \leq 1 + \prod_{i=1}^{n} (r_i - 1). \tag{2}$$

Auf die Wiedergabe der in [3] angegebenen Gleichheitsbedingung wird hier wegen der zahlreichen technischen Details verzichtet.

BEMERKUNGEN.

(a) Die Schranke in (1) gilt für *alle* $(0,1)$-Matrizen, ob sie nun vollständig unzerlegbar oder teilweise zerlegbar sind. Die Schranke in (2) hingegen gilt für *alle* vollständig unzerlegbaren nichtnegativen ganzzahligen Matrizen, ob sie nun bloß Nullen und Einsen oder auch andere ganze Zahlen enthalten.

(b) Selbst dann, wenn wir uns auf vollständig unzerlegbare $(0,1)$-Matrizen beschränken, sind die Schranken in (1) und (2) nicht vergleichbar, da (1) schärfer ist als (2), falls viele Zeilensummen größer als 2 sind, und da (2) schärfer ist als (1), falls viele Zeilensummen gleich 2 sind und die anderen Zeilensummen nicht besonders groß (H. Minc [7]).

PROBLEM. Im folgenden bezeichne A stets eine *vollständig unzerlegbare* $n \times n$-(0,1)-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$. Aus Bemerkung (b) folgt, daß die Anzahl der Zeilen von A mit genau zwei Einsen von maßgeblicher Bedeutung dafür ist, welche der beiden zur Diskussion stehenden

Ungleichungen die schärfere Schranke liefert. Wir führen deshalb diese Anzahl als zusätzlichen Parameter ein und leiten ein Kriterium dafür her, welche der Schranken (1) und (2) für eine gegebene Matrix A die bessere ist.

2. Eigenschaften einer mit der Gamma-Funktion zusammenhängenden Funktion. Um die Herleitung des angekündigten Kriteriums zu ermöglichen, benötigen wir einige vorbereitende Betrachtungen über eine mit der Gamma-Funktion zusammenhängende Funktion. Dazu sei

$$\Phi(x) := \Gamma(x+1)^{1/x}, \quad x > 0, \tag{3}$$

wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichnet. Es ist bemerkenswert, daß für alle positiven ganzen Zahlen n gilt:

$$\Phi(n) = n!^{1/n}.$$

Ferner definieren wir

$$g_{a,b}(x) := \ln \frac{ax+b}{\Phi(x)}, \quad x > -\frac{b}{a} > 1, \tag{4}$$

wobei a und b reelle Konstanten bezeichnen.

Satz 1 (S.-G. Hwang & A. R. Kräuter [5]). *$g_{a,b}(x)$ ist streng monoton wachsend und konkav. Ferner gilt*

$$\lim_{x\to\infty} g_{a,b}(x) = 1 + \ln a. \tag{5}$$

(Der Beweis beruht im Wesentlichen auf der Stirlingschen Formel für die Gamma-Funktion,

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}, \quad x > 0, \tag{6}$$

und verwendet einige Eigenschaften von $\mu(x)$.)

Wir definieren

$$\lambda(x) := g_{1,-1}(x) = \ln \frac{x-1}{\Phi(x)}, \quad x > 1. \tag{7}$$

Korollar 1.

(a) $\lambda(x)$ *ist streng monoton wachsend und konkav. Überdies gilt die Beziehung*

$$\lim_{x\to\infty}\lambda(x) = 1. \tag{8}$$

(b) *Es gelten die folgenden Ungleichungen:*

$$\Phi(x) > x-1 \quad \textit{für} \quad 0 < x < x_0, \tag{9}$$

$$\Phi(x) < x-1 \quad \textit{für} \quad x_0 < x < \infty, \tag{10}$$

wobei $x_0 = 2,695142\ldots$ *die eindeutig bestimmte Nullstelle von* $\lambda(x)$ *für* $x > 1$ *ist.*

(c) *Die Funktion* $\frac{x-1}{\Phi(x)}$ *ist streng monoton wachsend für* $x > 1$.

3. Ein Vergleich der Abschätzungen (1) und (2) für vollständig unzerlegbare $(0,1)$-Matrizen. Gemäß Korollar 1, (b) ist die Schranke (1) besser (bzw. schlechter) als die Schranke (2), falls $r_i \geq 3$ (bzw. $r_i = 2$) für alle i gilt. Für weiterreichende Aussagen benötigen wir einige zusätzliche Bezeichnungen. Es seien $r_1, \ldots, r_n$ ganze Zahlen ≥ 2, ferner sei $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$. Wir definieren

$$\mu(\mathbf{r}) := \prod_{i=1}^{n}\Phi(r_i), \tag{11}$$

$$\delta(\mathbf{r}) := 1 + \prod_{i=1}^{n}(r_i - 1). \tag{12}$$

Für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ sei

$$\mathcal{S}(n,k) := \{\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n) : k \text{ der } r_i \text{ sind gleich } 2, \quad 3 \leq r_i \leq n \text{ sonst}\}.$$

Im folgenden bestimmen wir die Mengen

$$K_n := \{k : 0 \leq k \leq n, \mu(\mathbf{r}) < \delta(\mathbf{r}) \text{ für alle } \mathbf{r} \in \mathcal{S}(n,k)\},$$

$$L_n := \{k : 0 \leq k \leq n, \mu(\mathbf{r}) > \delta(\mathbf{r}) \text{ für alle } \mathbf{r} \in \mathcal{S}(n,k)\}$$

und zeigen, daß

$$K_n = \{0, 1, 2, \ldots, k_1(n)\},$$

$$L_n = \{k_2(n), k_2(n)+1, \ldots, n-1, n\}$$

gilt, wobei $k_1(n)$ und $k_2(n)$ extremal in dem Sinne sind, daß $k_1(n)+1 \notin K_n$ und $k_2(n)-1 \notin L_n$. Nun sind wir in der Lage, das folgende wichtige Hilfsresultat zu formulieren.

Lemma 1. *Es sei* $\mathbf{x}_k = (2, \ldots, 2, 3, \ldots, 3) \in \mathcal{S}(n,k)$ *und* $\mathbf{y}_k = (2, \ldots, 2, n, \ldots, n) \in \mathcal{S}(n,k)$. *Dann gilt für alle* $\mathbf{r} \in \mathcal{S}(n,k)$

$$\delta(\mathbf{x}_k) - \mu(\mathbf{x}_k) \leq \delta(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}) \leq \delta(\mathbf{y}_k) - \mu(\mathbf{y}_k). \tag{13}$$

Zur Bestimmung von K_n definieren wir

$$c := \frac{\ln(2\sqrt{2}/\sqrt[3]{6})}{\ln(2/\sqrt[3]{6})} = 4,614131\ldots, \tag{14}$$

und, für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$,

$$\epsilon(n,k) := \frac{1}{\ln(2\sqrt{2}/\sqrt[3]{6})} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n-k}}\right). \tag{15}$$

ϵ besitzt folgende Eigenschaften:

(a) $\epsilon(n,k) > 0$;

(b) $\epsilon(n,k) \to 0$ für $(n-k) \to \infty$;

(c) $\epsilon(n,k) < 1$ für $k \leq n-1$.

Eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung von $k_1(n)$ spielt die folgende Ungleichung:

$$\lfloor n/c \rfloor + 1 - \frac{n}{c} < \epsilon(n, \lfloor n/c \rfloor + 1), \tag{16}$$

worin $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Anteil von x bezeichnet.

Satz 2 (S.-G. Hwang & A. R. Kräuter [5]). *Es sei* $n \geq 3$ *eine ganze Zahl und es sei* K_n *die oben definierte Menge. Dann gilt* $K_n = \{0, 1, 2, \ldots, k_1(n)\}$, *wobei*

$$k_1(n) = \begin{cases} \lfloor n/c \rfloor + 1, & \textit{falls} \quad (16) \quad \textit{gilt,} \\ \lfloor n/c \rfloor & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweisskizze. Wir zeigen

$$K_n = \{k : 0 \leq k \leq \lfloor n/c \rfloor + a_n\},$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad (16) \quad \text{gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\mathbf{x}_k = (2, \ldots, 2, 3, \ldots, 3) \in \mathcal{S}(n, k)$ folgt aus Lemma 1 sofort

$$K_n = \{k : 0 \leq k \leq n,\ \mu(\mathbf{x}_k) < \delta(\mathbf{x}_k)\}.$$

Nun ist

$$\mu(\mathbf{x}_k) = 2^{k/2}\Phi(3)^{n-k},$$

$$\delta(\mathbf{x}_k) = 2^{n-k}\left(1 + \frac{1}{2^{n-k}}\right).$$

Somit gilt $\mu(\mathbf{x}_k) < \delta(\mathbf{x}_k)$ genau dann, wenn

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\Phi(3)}\right)^k < \left(\frac{2}{\Phi(3)}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2^{n-k}}\right)$$

gilt oder

$$k < \frac{n}{c} + \epsilon(n, k). \tag{17}$$

Ist nun $k \leq \lfloor n/c \rfloor$, so ist (17) sicher erfüllt und damit $\{0, 1, 2, \ldots, \lfloor n/c \rfloor\} \subseteq K_n$. $k = \lfloor n/c \rfloor + 1$ genügt (17) genau dann, wenn (16) erfüllt ist.
Wir haben noch zu zeigen: K_n enthält kein k mit $\lfloor n/c \rfloor + 2 \leq k \leq n$. Wegen $n \geq 3$ ist sicher $n \notin K_n$. Es sei also $\lfloor n/c \rfloor + 2 \leq k \leq n - 1$. Dann ist aber $\epsilon(n, k) < 1$ und somit

$$k \geq (\lfloor n/c \rfloor + 1) + 1 > \frac{n}{c} + \epsilon(n,k).$$

□

Zur Bestimmung von L_n definieren wir

$$\beta_n := 1 + \frac{\ln\sqrt{2}}{\lambda(n)} \tag{18}$$

und

$$\zeta(n,k) := \frac{1}{\ln\sqrt{2} + \lambda(n)} \ln\left(1 + \frac{1}{(n-1)^{n-k}}\right). \tag{19}$$

β_n und ζ besitzen folgende Eigenschaften:

(a) $\beta_n \searrow 1 + \ln\sqrt{2}$ für $n \to \infty$;

(b) $\zeta(n,k) \to 0$ für $n \to \infty$;

(c) $\zeta(n,k) < 1$, falls $k < n$.

Die „Testungleichung“ bei der Bestimmung von $k_2(n)$ lautet

$$\lfloor n/\beta_n \rfloor + 1 - \frac{n}{\beta_n} > \zeta(n, \lfloor n/\beta_n \rfloor + 1). \tag{20}$$

Satz 3 (S.-G. Hwang & A. R. Kräuter [5]). *Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl und L_n wie oben definiert. Dann gilt $L_n = \{k_2(n), k_2(n)+1, \ldots, n-1, n\}$, wobei*

$$k_2(n) = \begin{cases} \lfloor n/\beta_n \rfloor + 1, & \textit{falls} \quad (20) \quad \textit{gilt,} \\ \lfloor n/\beta_n \rfloor + 2, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für $n \leq 10$ sind die Werte von $k_1(n)$ und $k_2(n)$ in Tabelle 1 angeführt.

n	$k_1(n)$	$k_2(n)$
3	1	2
4	1	3
5	1	3
6	1	4
7	1	5
8	2	6
9	2	6
10	2	7

TABELLE 1.

BEMERKUNG. Aufgrund von Satz 2 könnte man erwarten, daß β_n aus Satz 3, welches ja von n abhängt, durch eine Konstante β ersetzt werden kann. Mit kleinen Einschränkungen ist dies tatsächlich möglich, wie der folgende Satz zeigt.

SATZ 4 (S.-G. Hwang & A. R. Kräuter [5]). *Es seien $n \geq 4$ und $k \leq n$ ganze Zahlen. Falls $k > n/(1 + \ln \sqrt{2})$ gilt, dann ist $k \in L_n$.*

BEMERKUNGEN.

(a) Es sei $\beta = 1 + \ln \sqrt{2}$. Satz 4 hat den Vorteil, daß nun die unhandliche Beziehung (20) nicht mehr erforderlich ist. Ein Nachteil von Satz 4 besteht darin, daß nunmehr im allgemeinen wegen $k \geq \lfloor n/\beta \rfloor + 1 \qquad k > k_2(n)$ ist.

(b) Aufgrund der Größe der „Skalierungsfaktoren“ c und β_n tritt eine Lücke zwischen $k_1(n)$ und $k_2(n)$ auf, das heißt für $k_1(n) < k < k_2(n)$ ist keine einheitliche Vorhersage möglich, ob $\mu(\mathbf{r}) < \delta(\mathbf{r})$ oder $\mu(\mathbf{r}) > \delta(\mathbf{r})$ gilt für $\mathbf{r} \in \mathcal{S}(n, k)$.

BEISPIEL. Es sei $n = 4$ und $k = 2$. Dann ist nach Satz 2 und Satz 3 $k_1(4) < 2 < k_2(4)$. Hier gibt es folgende drei Möglichkeiten:
(a) $\mathbf{r} = (2, 2, 3, 3)$. Dann gilt

$$6{,}603\ldots = \mu(\mathbf{r}) > \delta(\mathbf{r}) = 5$$

für die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $\mathbf{r} = (2, 2, 3, 4)$. Dann gilt

$$8{,}043\ldots = \mu(\mathbf{r}) > \delta(\mathbf{r}) = 7$$

für die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $\mathbf{r} = (2, 2, 4, 4)$. Dann gilt

$$9{,}797\ldots = \mu(\mathbf{r}) < \delta(\mathbf{r}) = 10$$

für die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZITIERTE LITERATUR

1. L. M. Brègman, Some properties of nonnegative matrices and their permanents [Russian], *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **211** (1973), 27 - 30. English translation in *Sov. Math. Dokl.* **14** (1973), 945 - 949.
2. J. Donald, J. Elwin, R. Hager, and P. Salamon, A graph theoretic upper bound on the permanent of a nonnegative integer matrix. I, *Linear Algebra Appl.* **61** (1984), 187 - 198.

3. J. Donald, J. Elwin, R. Hager, and P. Salamon, A graph theoretic upper bound on the permanent of a nonnegative integer matrix II. The extremal case. *Linear Algebra Appl.* **61** (1984), 199 - 218.

4. S. G. Hwang and A. R. Kräuter, A matrix theoretical proof of an upper bound for the permanent of a nonnegative integral matrix. *Preprint, Montanuniversität Leoben,* 1996.

5. S. G. Hwang and A. R. Kräuter, Comparison of permanental bounds of (0,1)-matrices. *Preprint, Montanuniversität Leoben,* 1996.

6. H. Minc, Upper bounds for permanents of (0,1)-matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 789 - 791.

7. H. Minc, Theory of permanents 1982 - 1985. *Linear Multilinear Algebra* **21** (1987), 109 - 148.

8. A. Schrijver, A short proof of Minc's conjecture. *J. Comb. Theory Ser. A* **25** (1978), 80 - 83.

Suk-Geun Hwang
Department of Mathematics Education
Teachers College
Kyungpook National University
Taegu 702-701, Republik Korea
E-mail: sghwang@bh.kyungpook.ac.kr

und

Arnold Richard Kräuter
Institut für Mathematik
und Angewandte Geometrie
Montanuniversität Leoben
Franz-Josef-Straße 18
A-8700 Leoben, Österreich
E-mail: kraeuter@unileoben.ac.at