Compositions des Cartes et Hypercartes

Mohamed El Marraki et Alexander Zvonkin
LaBRI, Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex FRANCE
(elmarrak@labri.u-bordeaux.fr, zvonkin@labri.u-bordeaux.fr)*

26 mai 1995

Résumé

Une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann est une fonction rationnelle avec au plus trois valeurs critiques. Une hypercarte planaire est une carte planaire "généralisée", dont les arêtes peuvent être incidentes à un nombre de sommets quelconque. Dans cet article on étudie l'équivalence entre ces deux notions, et on établit une sorte de dictionnaire qui traduit les opérations sur une classe d'objets en opérations sur l'autre.

La classe des fonctions de Belyi, avec une simple condition technique supplémentaire, est fermée pour la composition. Cela nous permet d'introduire une nouvelle opération de *composition d'hypercartes*. (Une composition de deux *cartes* n'est pas forcément une carte mais peut aussi bien donner une hypercarte.)

1 Introduction

Dans l'article [2] devenu classique, Belyi a démontré qu'une surface de Riemann compacte X est définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques si et seulement si il existe une fonction méromorphe $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ avec au plus trois valeurs critiques (que l'on peut prendre égales à $0, 1$ et ∞). Les fonctions f qui vérifient cette condition s'appellent les *fonctions de Belyi*. Grothendieck [7] a remarqué que pour une fonction de Belyi *pure* (dont les degrés de ramification au-dessus de la valeur 1 sont toujours égaux à 2) l'image réciproque du segment $[1, \infty]$ est une carte; il a appelé ces cartes les *dessins d'enfant*. Ainsi la théorie des dessins d'enfant relie la combinatoire des cartes (ou graphes plongés) et la théorie des nombres algébriques et des surfaces de Riemann. La bibliographie des travaux consacrés aux études de ces relations est déjà assez grande; mentionnons ici l'article important [11] et une collection d'articles [8].

L'objet qui correspond à une fonction de Belyi *quelconque*, pas forcément pure, est également bien connu dans la combinatoire : c'est une *hypercarte* (voir [3], [4]). Dans la première partie de cet article nous allons examiner cette correspondance. Nous établissons une sorte de dictionnaire entre les opérations élémentaires sur les hypercartes et sur les fonctions de Belyi. Nous nous limitons ici au cas planaire.

*Les auteurs sont partiellement soutenus par P.R.C. Math-Info et par EC grant CHRX-CT93-0400.

Une propriété remarquable des fonctions de Belyi est que l'on peut les composer, et, avec une simple condition supplémentaire, le résultat est de nouveau une fonction de Belyi. La démonstration de cette proposition est tout-à-fait triviale. Du point de vue des surfaces de Riemann on obtient aussi un objet bien connu : un revêtement de revêtement. Mais pour les cartes et hypercartes cela donne une nouvelle opération de composition, ou de substitution d'une (hyper)carte dans une autre. Il existe plusieurs raisons de croire que cette opération deviendra importante pour la théorie combinatoire des cartes, ainsi que pour la théorie des dessins d'enfant proprement dit. Remarquons ici que l'on ne peut se limiter au cas des cartes, car une composition de deux cartes peut bien donner une hypercarte.

L'idée d'utiliser des compositions remonte à l'article original de Belyi [2]. L'importance de cette opération et de ses implications ont été indiquées par Shabat. Le cas des compositions d'arbres plans et de polynômes de Shabat a été considéré dans [1], [10].

2 Cartes et hypercartes

2.1 Définitions

Le même graphe peut être dessiné de manières différentes, comme le montre le dessin suivant (on considère ces graphes dessinés sur la sphère et non pas sur le plan) :

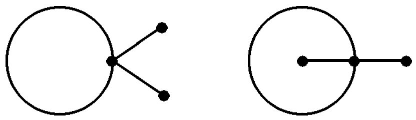

Figure 1: Un seul graphe mais deux cartes différentes

La structure combinatoire qui tient compte non seulement des propriétés d'un graphe mais aussi de son plongement, s'appelle une *carte*.

Définition 2.1 Une *carte* est un graphe connexe (les boucles et les arêtes multiples sont autorisées) qui est "dessiné sur" (ou plongé dans) une surface orientée compacte de dimension 2 de telle manière que :

1. Les arêtes ne se coupent pas.

2. Si l'on coupe la surface le long des arêtes, on obtient l'union disjointe d'ensembles homéomorphes au disque ouvert (ces ensembles s'appellent les *faces* de la carte).

Dans l'exemple de Figure 1 la carte de gauche a deux faces, de degrés 5 (la face extérieure) et 1, tandis que la carte de droite a deux faces de degré 3.

Pour représenter une carte, il faut connaître, outr la structure du graphe, l'ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet. Soit B l'ensemble des "brins" d'arêtes (toute arête se compose de deux brins); soit α la permutation sur B qui échange les brins de chaque arête; soit σ la permutation sur B qui fait tourner autour de chaque sommet les brins qui les sont adjacents (dans le sens trigonométrique). Ici on utilise le fait que la surface sur laquelle la carte est dessinée est orientée. Toute la géométrie de la carte peut être reconstituée à partir de ces données : les cycles de σ constituent les sommets (le degré d'un sommet est égal à la longueur du cycle correspondant) ; les cycles de α constituent les arêtes ; les faces peuvent être trouvées comme les cycles de la permutation

$$\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$$

(on multiplie les permutations de gauche à droite). Pour chaque arête délimitant une face, un seul des deux brins qui la forment est présent dans le cycle de φ correspondant à cette face. La permutation φ les fait tourner également dans le sens trigonométrique. Le degré d'une face est la longueur du cycle correspondant.

Ainsi on obtient la "définition combinatoire" des cartes, qui est équivalente à la "définition géométrique" 2.1 :

Définition 2.2 Une *carte* est un couple de permutations (σ, α) qui agissent sur un ensemble B et qui vérifient les propriétés suivantes :

1. α est une involution sans points fixes (ce qui revient à dire que chaque arête se compose de 2 brins).
2. Le groupe de permutations $< \sigma, \alpha >$ engendré par σ et α agit transitivement sur B (ce qui est équivalent à la connexité de la carte).

Remarque 2.3 La règle suivante est pratique pour se rappeler la notation. Les lettres greques σ, α et φ sont choisies selon les premières lettres des termes : "sigma" comme "sommet", "alpha" comme "arête", "phi" comme "face".

Si on enlève la première condition de la Définition 2.2, on obtient la définition d'une hypercarte :

Définition 2.4 Une *hypercarte* est un couple de permutations (σ, α) agissant sur un ensemble B de "brins d'arêtes", tel que le groupe de permutations $< \sigma, \alpha >$ engendré par σ et α soit transitif.

Dans ce cas, l'ensemble B n'a pas obligatoirement un nombre pair d'éléments. Les cycles de α constituent les arêtes (que l'on appelle parfois *hyperarêtes*) ; les longueurs des cycles sont appelées les degrés des arêtes. Les faces sont *définies* comme les cycles de la permutation $\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$ (pour les cartes on peut écrire α au lieu de α^{-1}, mais pour les hypercartes l'exposant doit être -1).

Un exemple important pour ce qui suit est l'hypercarte "primaire", dont l'ensemble B se compose d'un seul élément. Cette hypercarte a un sommet de degré 1, une arête de degré 1 et une face de degré 1.

Pour calculer le genre g de la surface qui correspond à une hypercarte, il faut utiliser la formule d'Euler généralisée :

$$z(\sigma) + z(\alpha) + z(\varphi) - |B| = 2 - 2g,$$

où $z(\cdot)$ est le nombre de cycles d'une permutation, et $|B|$ est la cardinalité de l'ensemble B.

Pour plus de détails sur les hypercartes, voir [3].

2.2 Représentation géométrique; triangulation canonique

Notre représentation géométrique est différente de celle utilisée dans [3]. Nous allons tracer les arêtes d'une hypercarte comme des lignes qui peuvent se ramifier au milieu. On peut aller dans deux sens à partir du milieu d'une arête habituelle (c'est-à-dire de degré 2). Au milieu d'une arête de degré supérieur à 2 se trouve un "carrefour" à plusieurs sens. Le milieu d'une arête de degré 1 n'est plus son milieu géométrique mais un point "sans issue".

Pour distinguer les sommets des milieux d'arêtes on marque les sommets par $\bullet$ et les milieux par $\times$. Voici l'hypercarte primaire :

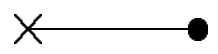

Figure 2: L'hypercarte primaire

Un autre exemple est donné sur la figure suivante.

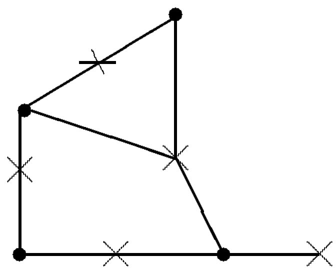

Figure 3: Exemple d'hypercarte

Cette hypercarte a 4 sommets, de degrés 3, 3, 2, 2, et 5 arêtes, de degrés 3, 2, 2, 2, 1. Il est moins évident de déterminer les degrés des faces. En fait, dans cette hypercarte il y a 3 faces dont les degrés sont 5 (la face "extérieure"), 3, 2. Cela devient plus clair après l'introduction de la triangulation canonique.

A toute hypercarte on associe sa *triangulation canonique* de la manière suivante. On met à l'intérieur de chaque face un point marqué par $\circ$; on le relie à tous les sommets incidents à cette face par une ligne pointillée de type $\cdots\cdots$; on le relie également à tous les milieux incidents par une ligne pointillée de type $- - -\,-$. Alors toute la surface devient "subdivisée" en triangles, et les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Les sommets de chaque triangle sont de trois types différents : $\bullet$, $\times$ et $\circ$.

2. Les côtés de chaque triangle sont de trois types différents : ———, $- - -\,-$ et $\cdots\cdots$.

3. Le nombre des triangles est égal à $2|B|$. Le nombre des triangles adjacent à un sommet (resp. une arête, une face) est deux fois plus grand que le degré de ce sommet (resp. de cette arête, de cette face).

Voici ce que l'on obtient pour l'hypercarte primaire :

$$\cdots\cdots\circ - - - - - \times \!\!\longrightarrow\!\!\!\!\bullet \cdots\cdots$$

Figure 4: La triangulation primaire

On rappelle que ce dessin est tracé sur la sphère. Il contient donc deux triangles, l'un représenté par le demi-plan supérieur, l'autre par le demi-plan inférieur.

Voici ce que l'on obtient pour l'hypercarte de la Figure 3 (les paires d'extrémités des lignes marquées par une même lettre doivent être collées ensemble) :

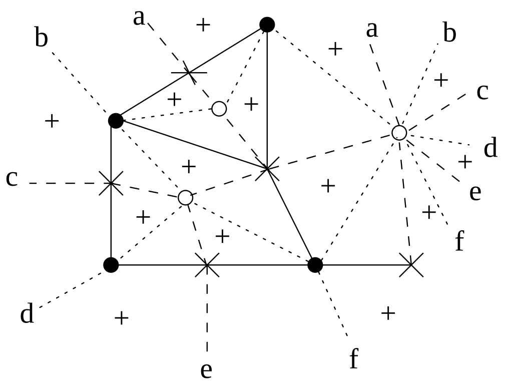

Figure 5: Exemple d'une triangulation canonique

En se plaçant à l'intérieur d'un triangle et en regardant ses sommets dans le sens trigonométrique, on peut les voir soit dans l'ordre $\circ$, $\times$, $\bullet$, soit dans l'ordre $\circ$, $\bullet$, $\times$. Dans le premier cas on dit que le triangle est *positif*, dans le deuxième cas qu'il est *négatif*. Pour la triangulation primaire le demi-plan supérieur constitue un triangle positif, et le demi-plan inférieur un triangle négatif. Dans la Figure 5 les triangles positifs sont marqués par le signe "+". On note T l'ensemble des triangles positifs, $\overline{T}$ celui des triangles négatifs, et $\mathbf{T} = T \cup \overline{T}$ l'union des deux.

Remarque 2.5 Tout triangle positif $t \in T$ contient un et un seul brin $b \in B$: c'est son côté de type $\times\!\!\longrightarrow\!\!\bullet$. L'ensemble B peut donc être identifié à l'ensemble T des triangles positifs. Les permutations σ, α et φ agissent sur les triangles positifs, en les faisant tourner dans le sens trigonométrique autour des points $\bullet$, $\times$ et $\circ$. On introduit aussi les permutations $\bar{\sigma}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\varphi}$ qui agissent sur les triangles de $\overline{T}$ en les faisant tourner dans le sens négatif autour des points $\bullet$, $\times$ et $\circ$.

2.3 Triplets d'involutions

Il y a trois involutions sans points fixes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ qui agissent sur l'ensemble $\mathbf{T} = T \cup \overline{T}$: pour tout $t \in \mathbf{T}$

(1) $\mathbf{i}(t)$ est le symétrique du triangle t par rapport à son côté $\cdots\cdots\cdots$;

(2) $\mathbf{j}(t)$ est le symétrique du triangle t par rapport à son côté $- - - -$;

(3) $\mathbf{k}(t)$ est le symétrique du triangle t par rapport à son côté ———.

On remarque que l'image de chaque triangle positif est un triangle négatif, et vice versa.

La proposition suivante montre comment retrouver les permutations σ, α et φ à partir des involutions $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Proposition 2.6 *Les identités suivantes sont vérifiées :*

$$\mathbf{ij} = \Phi = \varphi \cup \bar{\varphi}, \quad \mathbf{jk} = \mathrm{A} = \alpha \cup \bar{\alpha}, \quad \mathbf{ki} = \Sigma = \sigma \cup \bar{\sigma},$$

où la notation $\Phi = \varphi \cup \bar{\varphi}$ signifie que l'action de Φ sur $\mathbf{T} = T \cup \overline{T}$ coïncide avec celle de φ sur T et celle de $\bar{\varphi}$ sur $\overline{T}$ (et de même pour A et Σ).

Inversement, pour reconstruire les données $\{\mathbf{T}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ à partir des données $\{B, \sigma, \alpha, \varphi\}$ il faut faire les opérations suivantes :

1) Prendre deux copies de l'ensemble B et les identifier avec T et $\overline{T}$.

2) Soit $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, $\overline{T} = \{\bar{t_1}, \bar{t_2}, \ldots, \bar{t_n}\}$. Comme les triangles t_i et $\bar{t_i}$ sont adjacents au brin i, on pose $\mathbf{k}(t_i) = \bar{t_i}$, $\mathbf{k}(\bar{t_i}) = t_i$.

3) Une fois l'involution $\mathbf{k}$ déterminée, on peut trouver l'involution $\mathbf{i}$ à partir de l'identité $\mathbf{ki} = \sigma \cup \bar{\sigma}$ comme la composition

$$\mathbf{i} : T \xrightarrow{\sigma^{-1}} T \xrightarrow{\mathbf{k}} \overline{T}, \qquad \mathbf{i} : \overline{T} \xrightarrow{\mathbf{k}} T \xrightarrow{\sigma} T.$$

On procède de même pour $\mathbf{j}$ à partir de l'identité $\mathbf{jk} = \alpha \cup \bar{\alpha}$.

Proposition 2.7 *Les identités suivantes sont vérifiées (pour les $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ "de gauche" il faut prendre leurs restrictions sur l'ensemble $\overline{T}$; pour les $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ "de droite", leurs restrictions sur T) :*

$$\bar{\varphi} = \mathbf{i}\varphi^{-1}\mathbf{i}, \quad \bar{\varphi} = \mathbf{j}\varphi^{-1}\mathbf{j}, \quad \bar{\alpha} = \mathbf{j}\alpha^{-1}\mathbf{j}, \quad \bar{\alpha} = \mathbf{k}\alpha^{-1}\mathbf{k}, \quad \bar{\sigma} = \mathbf{k}\sigma^{-1}\mathbf{k}, \quad \bar{\sigma} = \mathbf{i}\sigma^{-1}\mathbf{i}.$$

3 Fonctions de Belyi

On note $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle, i.e., $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[z]$. On note $d_f = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ le degré de f.

Pour tout $w \in \overline{\mathbb{C}}$ l'équation $f(z) = w$ a d_f solutions, si on les compte avec leurs multiplicités.

Définition 3.1 Une racine multiple z de l'équation $f(z) = w$ s'appelle un *point critique*; sa multiplicité s'appelle *l'ordre* du point critique z; la valeur w correspondante s'appelle une *valeur critique*.

Si les points z et w sont tous les deux finis, dire que z est un point critique d'ordre k, $k \geq 2$ équivaut à dire que $f'(z) = 0$, $f''(z) = 0$, ..., $f^{(k-1)}(z) = 0$ et $f^{(k)}(z) \neq 0$. Si au moins un des points z, w est infini, il faut faire les changements de variables usuels :

- $z \neq \infty$ et $f(z) = \infty$: on prend la fonction $F(z) = \frac{1}{f(z)}$. La dérivée $F'(s)$ est calculée comme $F'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2}$.
- $z = \infty$ et $f(z) \neq \infty$: on prend la fonction $F(s) = f(1/s)$ et on s'intéresse à $s = 0$. La dérivée $F'(s)$ est calculée comme $F'(s) = f'(1/s) \times (-1/s^2)$, .
- $z = \infty$ et $f(z) = \infty$: on prend la fonction $F(s) = \frac{1}{f(1/s)}$, et on s'intéresse à $s = 0$; $F'(s) = -\frac{f'(1/s)}{(f(1/s))^2} \times (-1/s^2)$.

Définition 3.2 Une fonction rationnelle $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est une *fonction de Belyi* si ses seules valeurs critiques sont 0, 1 ou ∞.

Remarque 3.3 Soit f une fonction de Belyi. Parmi les solutions des trois équations $f(z) = 0$, $f(z) = 1$ et $f(z) = \infty$ on trouve des racines multiples ainsi que des racines simples. Par abus de langage on va appeler ces dernieres *points critiques d'ordre* 1.

Exemple 3.4 (A) Soit

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z^2 - 2)}.$$

Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont $z = \pm 1$ (d'ordre 2 toutes les deux); celle de l'équation $f(z) = 1$ est $z = \infty$ (d'ordre 4); celles de l'équation $f(z) = \infty$ sont $z = 0$ (d'ordre 2) et $z = \pm\sqrt{2}$ (d'ordre 1 toutes les deux). Il n'y a pas d'autres points critiques; la fonction f est donc une fonction de Belyi.

(B) Soit

$$f(z) = \frac{8z + 1}{64z^3(1 - z)}.$$

L'équation $f(z) = 0$ a deux solutions : $z = -\frac{1}{8}$ (d'ordre 1) et $z = \infty$ (d'ordre 3); l'équation $f(z) = 1$ a deux solutions $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$ (d'ordre 2); l'équation $f(z) = \infty$ a deux solutions : $z = 0$ (d'ordre 3) et $z = 1$ (d'ordre 1). Il n'y a pas d'autres points critiques; la fonction f est donc une fonction de Belyi.

Définition 3.5 Une fonction de Belyi f est dite *pure* si tous les points de $f^{-1}(1)$ sont critiques d'ordre 2.

La fonction de l'Exemple 3.4 (B) est pure; celle de l'Exemple 3.4 (A) ne l'est pas.

Comme on le verra plus loin, il y a une correspondance entre les fonctions de Belyi et les hypercartes, et entre les fonctions de Belyi pures et les cartes.

4 Passage d'une fonction de Belyi à une hypercarte

Soit $w = f(z)$ une fonction de Belyi. Traçons le segment $[1, \infty]$ sur la sphère de Riemann de la variable w. On peut considérer ce segment comme l'hypercarte primaire $\times\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$; l'extrémité marquée "$\times$" se trouve à $w = 1$, l'extrémité marquée "$\bullet$", à $w = \infty$.

On s'intéresse à l'ensemble $f^{-1}([1, \infty])$, l'image inverse par f du segment $[1, \infty]$.

Proposition 4.1 *L'ensemble $f^{-1}([1,\infty])$ est une hypercarte tracée sur la sphère de la variable z.*

La démonstration s'effectue en quatre parties :

(1) Aucun point w de l'intervalle $(1,\infty)$ n'est critique. Par conséquent, l'application f est localement un homéomorphisme au voisinage de $w \in (1,\infty)$. Donc l'ensemble $f^{-1}((1,\infty))$ se compose de $d_f = \deg(f)$ intervalles (pas forcément rectilignes) qui ne se coupent pas. L'ensemble de ces intervalles sera considéré comme l'ensemble des brins de notre hypercarte.

(2) Les points $z \in f^{-1}(1) \cup f^{-1}(\infty)$ peuvent être critiques. Localement, l'image inverse du point $w=\infty$ s'obtient, selon l'ordre de criticité du point z correspondant, de la façon suivante (la situation est identique pour $w=1$) :

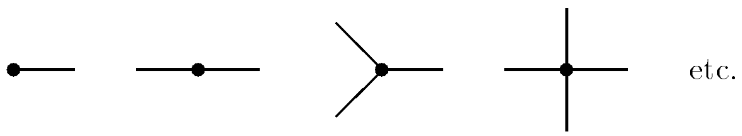

Figure 6: Voisinage d'un point $f^{-1}(\infty)$

Les points $z \in f^{-1}(\infty)$ seront considérés comme les sommets du graphe à construire, et les points $z \in f^{-1}(1)$ seront considérés comme les milieux des arêtes du graphe.

(3) L'ordre cyclique des brins autour de chaque sommet est donné par l'orientation de la sphère de la variable z: la permutation σ est la rotation des brins autour des sommets dans le sens trigonométrique. On définit de la même façon la permutation α comme la rotation des brins autour de chaque milieu d'arête dans le sens trigonométrique.

(4) Il reste à montrer que le graphe ainsi construit est connexe. Pour cela remarquons d'abord que l'on peut considérer aussi bien les cartes non connexes, quand le groupe $<\sigma,\alpha>$ n'est pas transitif sur B. Dans ce cas-là, la caractéristique d'Euler de l'union des cartes disjointes est la somme des caractéristiques d'Euler des composantes. Il suffit donc de démontrer que la caractéristique d'Euler de l'hypercarte en question est bien égale à 2. Sachant la formule d'Euler généralisée, cela revient à démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.2 *Si f est une fonction de Belyi de degré d_f, le nombre de racines distinctes des trois équations suivantes*

$$\left[\begin{array}{ll} f(z) & =0, \\ f(z) & =1, \\ f(z) & =\infty \end{array}\right.$$

est d_f+2.

Pour démontrer cette proposition, on peut remarquer que le nombre de racines distinctes est égal au nombre de racines comptées avec leurs multiplicités moins le nombre de racines de la dérivée $f'(z)$, comptées, elles aussi, avec leurs multiplicités. Il ne reste qu'à calculer le nombre de racines de la dérivée $f'(z)$.

Remarque 4.3 Si f est une fonction de Belyi pure, i.e., si tous les points $z \in f^{-1}(1)$ sont critiques d'ordre 2, alors chaque milieu d'arête se présente comme suit : —×—. Par conséquent, l'hypercarte correspondante est une carte.

Exemple 4.4 Soit f la fonction de l'Exemple 3.4; alors $f^{-1}([1,\infty])$ est la carte suivante :

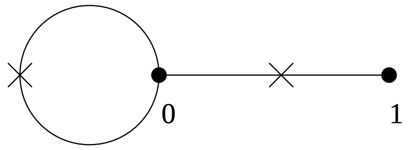

Figure 7: La carte qui correspond à la fonction f

Elle admet :

- deux sommets : $z = 0$ (de degré 3), $z = 1$ (de degré 1);
- deux milieux d'arêtes : $z = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{3})$ (de degré 2).

Le rôle de la valeur critique $w = 0$ est que les points $z \in f^{-1}(0)$ sont les “centres” des faces, l'ordre de criticité de chaque point étant égal au degré de la face correspondante. Pour le voir plus clairement, il faut tracer sur la sphère w la triangulation primaire (voir Figure 4), en plaçant les sommets de types $\circ$, $\times$ et $\bullet$ à $w = 0$, $w = 1$ et $w = \infty$ respectivement. L'image réciproque de ce dessin est la triangulation canonique de l'hypercarte correspondante sur la sphère z.

La carte de l'exemple précédent admet deux centres de faces : $z = -1/8$ (de degré 1) et $z = \infty$ (de degré 3).

5 Passage d'une hypercarte à une fonction de Belyi

Théorème 5.1 *A toute hypercarte planaire H correspond une fonction de Belyi f. Cette fonction est unique à une homographie près.*

La démonstration est simplement une répétition de certains résultats de base de la théorie des surfaces de Riemann. Un exposé complet sur ce sujet nécessite plusieurs pages. Par conséquent on va seulement donner les grandes lignes de la démonstration.

(1) On introduit une “structure complexe” sur la triangulation canonique, i.e., on introduit une coordonnée complexe sur chaque triangle, en *identifiant* ce triangle avec le demi-plan supérieur pour les triangles positifs et avec le demi-plan inférieur pour les triangles négatifs (donc, la coordonnée complexe à l'intérieur de ce triangle est w, et non pas z). On obtient de cette manière plusieurs exemplaires des demi-plans, et on considère l'hypercarte elle-même comme schéma de collage de ces demi-plans (voir Figure 8).

L'objet que l'on obtient après ce collage (et après compactification) est une surface de Riemann *par définition*. Topologiquement, cette surface est la sphère, car l'hypercarte elle-même est planaire. On note z la variable complexe naturelle de cette sphère de Riemann.

(2) La "projection naturelle", c'est-à-dire la fonction f qui associe à chaque point z de la sphère de Riemann la valeur w correspondante, est une fonction méromorphe de la sphère de Riemann sur la sphère de Riemann ($\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$). Par conséquent, la fonction f est rationnelle.

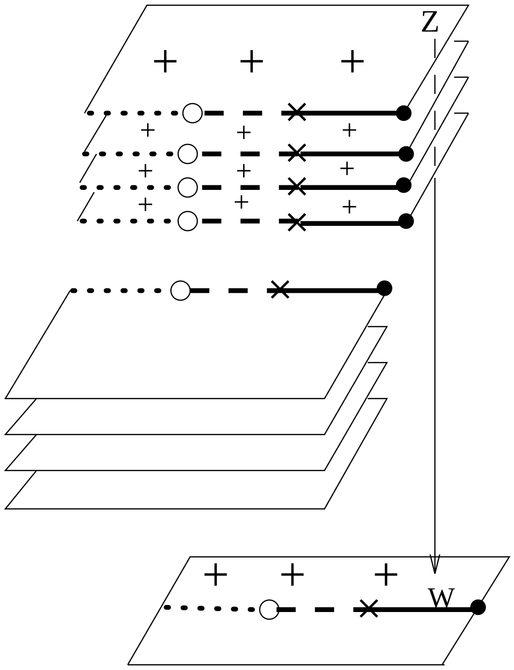

Figure 8: Coller les demi-plans pour obtenir une surface de Riemann

(3) La fonction construite précédemment nous fournit un revêtement de la sphère de Riemann de la variable w qui est ramifié au-dessus des points 0, 1, ∞.

Un tel revêtement est défini à un automorphisme de la surface de Riemann près. Les automorphismes de la sphère de Riemann sont des homographies. La fonction f est donc définie à une homographie (de la variable z) près.

Le théorème est démontré. Pour plus de détails sur la théorie des surfaces de Riemann, on peut consulter par exemple [6].

En pratique, pour trouver une fonction de Belyi qui correspond à une hypercarte donnée, il faut résoudre un système d'équations algébriques.

Exemple 5.2 On va expliquer comment on a calculé la fonction de Belyi pour la carte de l'Exemple 4.4. Le fait que la fonction de Belyi soit définie à une homographie près nous laisse le choix de placer trois points arbitraires de notre carte aux endroits convenables.

On place, par exemple, le sommet de degré 3 à $z = 0$, et le sommet de degré 1 à $z = 1$. Alors, le dénominateur de f sera proportionnel à $z^3(z-1)$.

On place le centre de la face "extérieure" de degré 3 à $z = \infty$. Cela veut dire que la fonction f doit avoir une racine de multiplicité 3 à l'infini. Cela signifie que son numérateur est un polynôme de degré 1. Alors,

$$f(z) = \frac{az+b}{z^3(z-1)},$$

et il reste à trouver les valeurs des paramètres a et b. Pour le faire, on utilise la condition que les deux milieux d'arêtes sont des points critiques d'ordre 2, avec la même valeur critique 1. Alors,

$$f(z) - 1 = \frac{\mu(z^2 - cz + d)^2}{z^3(z-1)},$$

et par identification on obtient le système suivant :

$$\mu = -1, \quad 2c = 1, \quad c^2 + 2d = 0, \quad 2cd = a, \quad -d^2 = b.$$

Après résolution de ce système on obtient :

$$c = \frac{1}{2}; \quad d = -\frac{1}{8}; \quad a = -\frac{1}{8}; \quad b = -\frac{1}{64}.$$

La fonction de Belyi trouvée est alors

$$f(z) = \frac{8z+1}{64z^3(1-z)}.$$

6 Opérations sur les fonctions de Belyi et sur les hypercartes

Dans [4] on peut trouver certaines opérations sur les hypercartes. Dans cette section on va les "traduire" dans le langage des fonctions de Belyi.

Toute hypercarte H est caractérisée par le triplet de permutations $(\sigma, \alpha, \varphi)$ qui vérifient la condition $\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$. Soit f la fonction de Belyi qui correspond à l'hypercarte H.

(1) L'hypercarte *duale* de H est caractérisée par le triplet $(\varphi^{-1}, \alpha^{-1}, \sigma^{-1})$. Géométriquement cela veut dire que l'on échange les sommets et les centres des faces de H. La fonction de Belyi qui correspond à l'hypercarte duale est $\frac{1}{f}$.

(2) L'hypercarte *réciproque* de H est caractérisée par $(\alpha^{-1}, \sigma^{-1}, \varphi^{-1})$; géométriquement, on échange les sommets et les milieux d'arêtes. La fonction de Belyi qui correspond à l'hypercarte réciproque est $\frac{f}{f-1}$.

(3) La notion de "trinité" (qui remonte à Tutte) affirme que la suite d'opérations "duale $\circ$ réciproque $\circ$ duale" donne la même hypercarte que la suite d'opérations "réciproque $\circ$ duale $\circ$ réciproque" (voir le diagramme des six hypercartes dans [4]). La Figure 9 est une "traduction" de ce diagramme pour les fonctions de Belyi.

(4) La carte *bipartite* de l'hypercarte H s'obtient comme suit : on met un nouveau sommet au milieu de chaque arête de H ; on considère les anciens brins d'arêtes comme des nouvelles arêtes. La fonction de Belyi correspondante est $\frac{1}{4}\frac{f^2}{f-1}$.

(5) La carte *réduite* de l'hypercarte H s'obtient en remplaçant les milieux d'arêtes de H par les centres des nouvelles faces. La fonction de Belyi qui correspond à cette carte est $4f(1-f)$.

La proposition suivante est démontrée dans [4] :

Proposition 6.1 *La carte bipartite de H et la carte réduite de l'hypercarte duale de H sont des cartes duales.*

Dans le langage de fonction de Belyi il s'agit de vértifier l'identité

$$\frac{1}{4}\frac{f^2}{f-1} = \frac{1}{4\frac{1}{f}(1-\frac{1}{f})}.$$

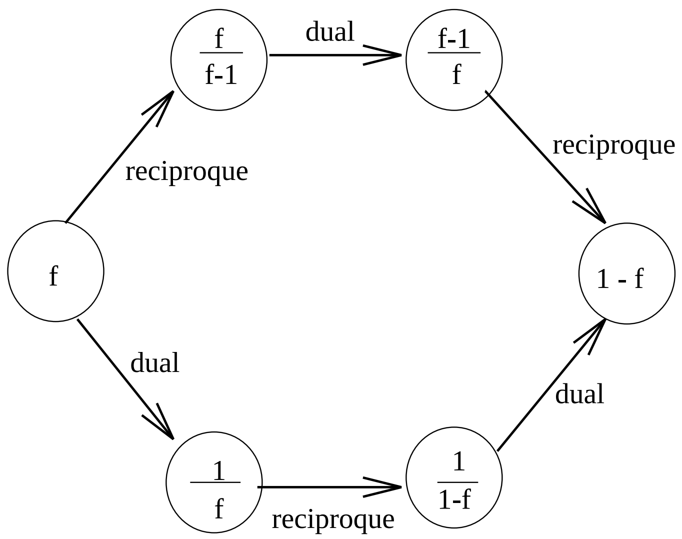

Figure 9: Diagramme des six hypercartes

7 Composition d'hypercartes

7.1 Composition de fonctions de Belyi

Les opérations de la section précédente peuvent être considérées comme les compositions d'une fonction f avec les fonctions suivantes :

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{z}{1-z}, \quad \frac{1}{4}\frac{z^2}{z-1}, \quad 4z(1-z).$$

On peut remarquer que toutes ces fonctions sont elles-mêmes des fonctions de Belyi. Un résultat beaucoup plus général est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 7.1 *Soit f et g deux fonctions de Belyi. Supposons que la fonction f vérifie la condition*

$$f(0), f(1), f(\infty) \in \{0, 1, \infty\}.$$

Alors la fonction F obtenue par composition de f et g :

$$F(z) = f \circ g(z) = f(g(z))$$

est aussi une fonction de Belyi.

Démonstration Soit z une racine multiple du système

$$w = f(u), \quad u = g(z), \quad z, u, w \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Il faut démontrer qu'alors $w \in \{0, 1, \infty\}$. Il existe deux possibilités :

(1) soit u elle-même est une racine multiple de $w = f(u)$; alors $w \in \{0, 1, \infty\}$, car f est une fonction de Belyi;

(2) soit z est une racine multiple de $u = g(z)$; alors $u \in \{0, 1, \infty\}$, car g est une fonction de Belyi, et par hypothèse $w = f(u) \in \{0, 1, \infty\}$.

Le théorème est démontré.

Ce théorème implique l'existence d'une opération de composition d'hypercartes. Notre objectif est de comprendre cette opération.

7.2 Description géométrique de la composition

En premier lieu, il faut comprendre le sens géométrique de la condition

$$f(0), f(1), f(\infty) \in \{0, 1, \infty\}.$$

Les points u tels que $f(u) \in \{0, 1, \infty\}$ sont les positions des "éléments" de l'hypercarte H_f associée à f (on utilise le terme *élément* pour désigner un sommet, ou le milieu d'une arête, ou le centre d'une face). La condition affirme donc que dans l'hypercarte H_f il y a trois éléments distingués qui occupent les endroits $u = 0$, $u = 1$ et $u = \infty$.

On va marquer l'élément qui se trouve en $u = 0$ par $\bigcirc$; celui qui se trouve en $u = 1$ par $\square$; et celui qui se trouve en $u = \infty$ par $\triangle$.

Remarque 7.2 Rappelons que pour une hypercarte H_f donnée la fonction f est définie à une homographie de la variable u près. Cette liberté nous permet de choisir les trois éléments distingués *d'une manière arbitraire*, et de les ramener à l'aide d'une homographie à 0, 1 et ∞ respectivement.

Traçons dans la sphère de la variable u l'axe réel, avec les points 0, 1, ∞ marqués par $\bigcirc$, $\square$, $\triangle$. C'est la triangulation primaire. Son image inverse par g sur la sphère de la variable z est la triangulation canonique de l'hypercarte H_g.

Maintenant traçons dans la sphère u l'hypercarte H_f toute entière. La seule chose qui reste à faire, c'est "répéter" la partie de H_f tracée dans le demi-plan supérieur dans chaque triangle positif de la triangulation de H_g, et la partie de H_f tracée dans le demi-plan inférieur dans chaque triangle négatif de la triangulation de H_g (voir l'image de la Figure 8, où il faut remplacer la lettre w par u et imaginer une hypercarte dessinée dans le plan u).

7.3 Description combinatoire de la composition

Pour des raisons topologiques il est clair que le résultat de la composition sera le même si on remplace l'axe réel dans la sphère u par n'importe quel triangle dont les sommets se trouvent sur les points $\bigcirc$, $\square$, $\triangle$. Cela nous permet de trouver une version purement combinatoire de la description géométrique précédente.

(1) Il faut d'abord compléter le dessin dans la sphère u, en traçant la triangulation canonique de l'hypercarte H_f. Dans cette triangulation il y a trois sommets distingués, de types quelconques.

(2) Dans ce dessin il faut trouver trois chemins qui ne se coupent pas : le chemin de $\bigcirc$ à $\square$, celui de $\square$ à $\triangle$, et celui de $\triangle$ à $\bigcirc$. Ces chemins découpent la sphère u en deux "grands triangles". Un de ces triangles est orienté positivement : si on se place à l'intérieur, on voit ses sommets dans ordre $\bigcirc \longrightarrow \square \longrightarrow \triangle \longrightarrow \bigcirc$. Ce triangle peut être considéré comme un "modèle" du demi-plan supérieur, et son complément, le grand triangle négatif, comme un modèle du demi-plan inférieur.

(3) On va représenter le résultat de la composition comme un triplet d'involutions $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ agissant sur l'ensemble $\mathbf{T}$. Soit $\mathbf{T}_f$ l'ensemble des triangles de la triangulation canonique de H_f, et $\mathbf{T}_g$ celui de H_g. Prenons $\mathbf{T} = \mathbf{T}_f \times \mathbf{T}_g$. La permutatin $\mathbf{I}$ agit sur un couple (t_f, t_g) de la manière suivante :

- l'action sur la première composante est $\mathbf{i}_f(t_f)$;
- si pendant l'opération $\mathbf{i}_f$ sur la première composante on a traversé le côté $\triangle \longrightarrow \bigcirc$ du grand triangle, alors l'action sur la deuxième composante est $\mathbf{i}_g(t_g)$;
- si on a traversé le côté $\bigcirc \longrightarrow \square$, l'action sur la deuxième composante est $\mathbf{j}_g(t_g)$;
- si on a traversé le côté $\square \longrightarrow \triangle$, l'action sur la deuxième composante est $\mathbf{k}_g(t_g)$;
- si enfin on n'a traversé aucun côté du grand triangle, l'action sur la deuxième composante est l'identité.

Les involutions J et K sont définies de la manière analogue, en remplaçant l'action sur la première composante par $\mathbf{j}_f$ et $\mathbf{k}_f$ respectivement.

(4) Le groupe $< \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K} >$ n'est pas transitif sur $\mathbf{T}$: par exemple, on ne peut pas atteindre à partir de (t_f, t_g) le couple obtenu en changeant le signe de t_g. Quand on prend une orbite de l'action de ce groupe (qui donne une moitié de l'ensemble $\mathbf{T}$), on obtient l'hypercarte composée.

8 Exemples

Exemple 8.1 Pour la carte la plus simple possible, qui se compose d'une seule arête, on peut prendre la fonction de Belyi suivante :

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2},$$

ce qui correspond au marquage de ses éléments montré sur la Figure 10. On a

$$F(z) = f \circ f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z^2 - 2)}$$

(voir l'Exemple 3.4 (A)), ce qui donne l'hypercarte de la Figure 11.

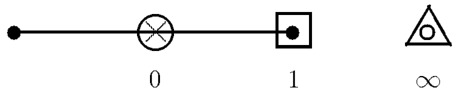

Figure 10: Marquage du segment

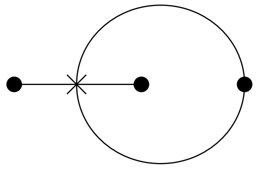

Figure 11: La composition du segment avec lui-même

Exemple 8.2 Nous allons composer avec elle-même la fonction

$$f(z) = \frac{8z+1}{64z^3(1-z)}.$$

de l'Exemple 3.4 (B). Les positions des éléments marqués sont montrées dans la Figure 12.

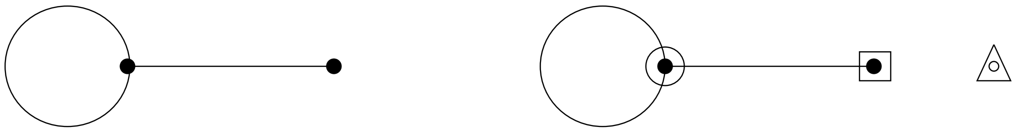

Figure 12: Deux cartes à composer

On obtient comme composition $f \circ f$ la fonction suivante :

$$F(z) = f \circ f(z) = -\frac{2^{15}z^9(z-1)^3(8z^4-8z^3-8z-1)}{(8z+1)^3(8z^2-4z-1)^2},$$

ce qui correspond à la carte de la Figure 13.

Remarque 8.3 Cet exemple, bien qu'il soit très simple, appelle quelques commentaires.

(1) Le calcul de fonctions de Belyi peut présenter d'énormes difficultés. Pour une carte à 6 arêtes il peut prendre des heures (voire des jours) sur un ordinateur puissant. Seuls ceux qui ont eu l'expérience de ces calculs peuvent estimer à sa juste valeur le fait qu'on soit arrivé à trouver une fonction de Belyi pour une carte à 8 arêtes avec une telle facilité.

(2) Le seul "algorithme" connu pour passer d'une fonction de Belyi à l'hypercarte correspondante consiste à tracer le dessin à l'aide de l'ordinateur et de "regarder" le résultat. Pour tracer le dessin il faut résoudre plusieurs fois l'équation $F(z) = w$ (qui est dans notre cas de degré 16). La

description combinatoire d'une composition est donc très avantageuse, parce qu'elle nous permet de se passer de deux étapes difficiles : la première est le calcul de fonctions de Belyi, et la deuxième est le passage d'une fonction de Belyi à l'hypercarte correspondante.

(3) Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, le résultat de la composition dépend du choix des éléments marqués. La carte que l'on considère possède 6 éléments : 2 sommets, 2 arêtes et 2 faces. Il y a donc $6 \times 5 \times 4 = 120$ possibilités de marquages différents, ce qui conduit en principe à 120 hypercartes composées. Dans le cas général, l'hypercarte qui correspond à une fonction de Belyi f possède $d_f + 2$ éléments différents, ce qui donne normalement $d_f(d_f+1)(d_f+2)$ compositions différentes (certains résultats peuvent néanmoins coïncider pour des raisons spécifiques, comme symétrie, auto-dualité etc.).

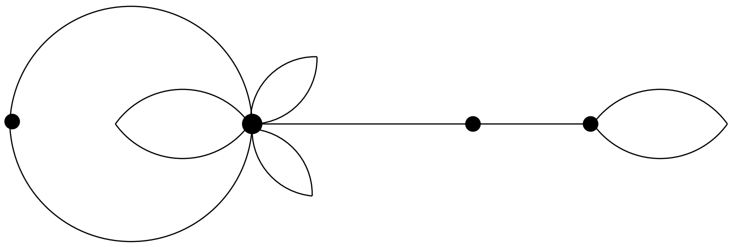

Figure 13: Composition des cartes précédentes

Exemple 8.4 Pour les deux cartes de Figure 14, avec le marquage montré dans le dessin, les fonctions de Belyi à composer sont

$$g(z) = \frac{8z+1}{64z^3(1-z)}, \qquad f(z) = 16\frac{z(z-1)^2}{(z+1)^4},$$

ce qui donne la composition

$$F(z) = f \circ g(z) = -\frac{2^{10}(8z^2-4z-1)^4 z^3 (z-1)(8z+1)}{(8z^2+1)^4(8z^2-8z-1)^4}.$$

Figure 14: Encore deux cartes à composer

Le résultat de cette composition est la carte de Figure 15.

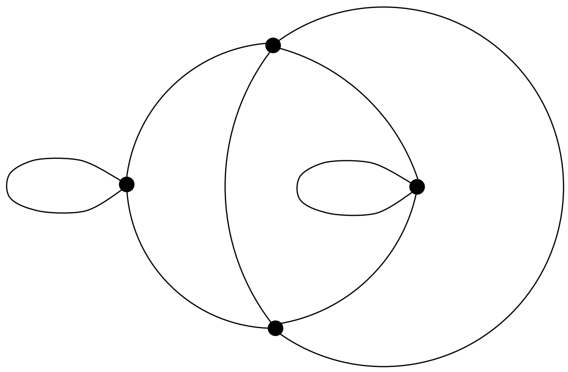

Figure 15: Composition des cartes précédentes

Exemple 8.5 Pour la carte de droite de la Figure 1, plaçons le sommet de degré 4 en 0, un des sommets de degré 1 en 1, et le milieu de l'arête-boucle, à l'infini. Le résultat de la composition de cette carte avec celle de gauche de la Figure 1 est donné dans la Figure 16. C'est une hypercarte : elle possède une arête de degré 8. Les autres arêtes sont toutes de degré 2 (ses milieux ne sont pas marqués sur le dessin).

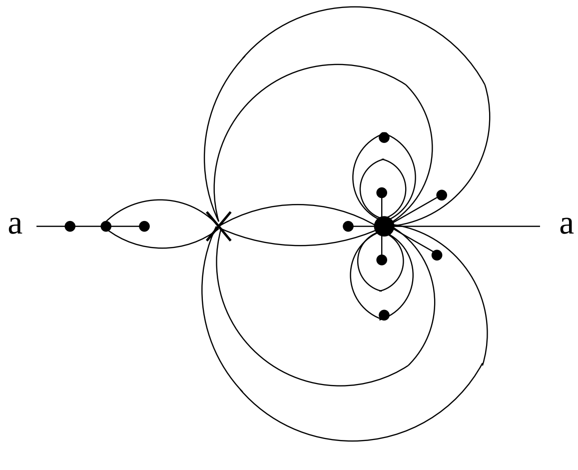

Figure 16: Composition des cartes de Figure 1

9 Conclusion

Plusieurs choses restent à faire.

(1) Il faut implémenter la composition combinatoire (tous les exemples que l'on a vus tout à l'heure ont été calculés "à la main"). La partie algorithmique de ce travail n'est pas négligeable,

parce qu'elle comporte la recherche dans la triangulation canonique de trois chemins qui relient les éléments distingués et qui ne se coupent pas. Les algorithmes de routage sont un thème classique de l'algorithmique des graphes; voir, par exemple, une publication récente [12].

(2) Il faut trouver un algorithme qui, pour une hypercarte donnée puisse dire si elle est une composition d'hypercartes plus simples. (Dans le cas des arbres plans un tel algorithme a déjà été implémenté par N. Hanusse.)

(3) La possibilité d'itérer une fonction de Belyi suggère que l'on peut étudier ses ensembles de Fatou et de Julia par des méthodes combinatoires. Certains résultats intéressant dans cette direction ont déjà été trouvés. Il seront exposés dans [5].

(4) Il reste aussi à étudier les propriétés combinatoires de la composition (la complexité etc.).

Bibliographie

[1] N. Adrianov, A. Zvonkin (1994) Composition of plane trees. – Soumis à *Acta Applicandae Mathematicae*.

[2] G. V. Belyi (1979) On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. – *Math. USSR Izvestija*, 1980, vol. **14**:2, p. 247–256.

[3] R. Cori, A. Machì (1992) Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey, I, II, III. – *Exposition. Math.*, 1992, vol. **10**, p. 403–427, 429–447, 449–467.

[4] R. Cori, J.-G. Penaud (1980) The compexity of a planar hypermap and that of its dual. – *Annals of Discrete Mathematics*, 1980, vol. **9**, p. 53–62.

[5] M. El Marraki, A. Zvonkin (1995) Fonctions de Belyi et ensembles de Julia. – En préparation.

[6] O. Forster (1977) Riemannsche Flächen. – Springer–Verlag, 1977.

[7] A. Grothendieck (1984) Esquisse d'un programme. – Manuscrit non publié.

[8] L. Schneps, ed. (1994) The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants. – Cambridge University Press ("London mathematical society lecture notes series", vol. **200**), 1994.

[9] G. B. Shabat (1991) The arithmetic of 1-, 2-, and 3-edged Grothendieck dessins. – Prépublication de IHES, 1991.

[10] G. B. Shabat, A. Zvonkin (1994) Plane trees and algebraic numbers. – Dans "Jerusalem Combinatorics '93" (H. Barcelo, G. Kalai eds.), AMS ("Contemporary Mathematics" series, vol. **178**), 1994, p. 233–275.

[11] G. B. Shabat, V. Voevodsky (1990) Drawing curves over number fields. – Dans "The Grothendieck Festschrift", Birkhäuser ("Progress in Mathematics" series, vol. **88**), 1990, vol. **3**, p. 199–227.

[12] D. Wagner, K. Weihe (1995) A linear-time algorithm for edge-disjoint paths in planar graphs. – *Combinatorica*, 1995, vol. **15**, p. 135–150.