Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B33j (1994)

# LONGUEUR DES INVOLUTIONS ET CLASSIFICATION DES GROUPES DE COXETER FINIS

PAR

Paul MOSZKOWSKI

Résumé. — On donne une démonstration combinatoire simple d'un résultat concernant les involutions des groupes de Coxeter. La méthode fournit un renseignement nouveau qui permet d'obtenir la classification des groupes de Coxeter finis de manière purement algébrique.

Abstract. — The paper contains a simple proof of a result on involutions in Coxeter groups. Our method yields a new piece of information which allows us to derive the classification of finite Coxeter groups in a purely algebraic way.

On rappelle qu'un système de Coxeter est un couple $(W, S)$, où $W$ est un groupe et $S$ un ensemble générateur de $W$, assujetti seulement à des relations du type $(ss')^{m(s,s')} = 1$, avec $m(s,s) = 1$ et $m(s,s') = m(s',s) \geq 2$ pour $s \neq s'$ dans $S$. Lorsqu'aucune relation n'intervient pour un couple $(s,s')$, on pose $m(s,s') = \infty$. On supposera connus les résultats préliminaires suivants, exposés par exemple dans les premières pages de ([2], chap. 5).

L'ordre de $ss'$ dans $W$ est égal à $m(s,s')$ et $S$ est un système générateur minimal de $W$.

Pour $I \subset S$ le couple $(\langle I\rangle, I)$ est un système de Coxeter, $\langle I\rangle$ désignant le groupe dit *parabolique*) engendré par $I$. Si $l_I(w)$ désigne la longueur relative à $I$ d'un élément $w$ par $I$ (c'est-à-dire le plus petit entier $n$ tel que $w = s_1 \ldots s_n$, avec $s_i \in I$ $(1 \leq i \leq n)$), on a $l_I(w) = L_S(w) = l(w)$.

Pour $J \subset S$ on pose $X_J = \{w \in W, l(ws) > l(w), \forall\, s \in J\}$. Les mots $(ss')^{m(s,s')}$ comportant un nombre pair de lettres, on a soit $l(ws) = l(w) + 1$, soit $l(ws) = l(w) - 1$. De plus, on a la *condition d'échange* : $(w \in X_s,\ s'w \notin X_s) \Rightarrow s'w = ws$.

Pour $w$ dans $W$ et $J \subset S$, il existe une décomposition unique $w = xy$ avec $x \in X_J$ et $y \in \langle J\rangle$ ; de plus, $l(w) = l(x) + l(y)$.

On note $T$ l'ensemble des conjugués des éléments de $S$ (éléments également appelés *générateurs* de $W$). Pour $w \in W$ on pose

$$I(w) = \{t \in T,\ l(wt) < l(w)\}.$$

Par un argument de parité, on n'a jamais $l(wt) = l(w)$ ; on a la *condition d'échange forte* : pour $w = s_1 \dots s_n$ ($s_i \in S$), si $t \in I(w)$, alors il existe $i$ tel que $t = s_n \dots s_i \dots s_n$.

Le groupe $W$ est fini si et seulement s'il existe un élément $w$, dit maximal, tel que $l(\omega s) < l(\omega)$ pour tout $s$ de $S$. Dans ce cas $\omega$ est unique (et on pose $\omega = \omega_S$) et $\omega_S^2 = 1$. De plus, pour tout $w$ dans $W$, on a $l(\omega_S) = l(\omega_S w) + l(w)$.

Dans tout ce qui suit $(W, S)$ est un système de Coxeter, d'ensemble de réflexions $T$. Les résultats a) et b) de la proposition suivante font l'objet de [1].

Proposition.

a) *Si $(W, S)$ est un système de Coxeter et si $w \in W$ est une involution ($w^2 = 1$), alors il existe $I \subset S$ d'élément maximal $\omega_I$ conjugué à $w$ et commutant avec chaque élément de $I$.*

b) *Pour $I, J \subset S$, si les éléments maximaux $\omega_I$ et $\omega_J$ commutent respectivement avec chaque élément de $I$ et de $J$, alors ceux-ci sont conjugués si et seulement s'il existe $x$ tel que $x^{-1}Ix = J$.*

c) *Si $w$ est une involution, soit il existe $I \subset S$ avec $w = \omega_I$, soit il existe $s \in S$ avec $l(w) = l(sws)+2$ et par conséquent il existe $J \subset S$ tel que $\omega_J$ commute avec chaque élément de $J$ et il existe $x$ tels que $w = w^{-1}\omega_J x$ et $l(w) = l(\omega_J) + 2l(x)$.*

*Démonstration*

a) c) Soit $s_1 \dots s_n$ une *écriture réduite* de $w$ ($s_i \in S$), $1 \leq i \leq n$, $l(w) = n$). On a $s_1 \dots s_n = s_n \dots s_1$ ; si $s_{n-1} \dots s_1 \notin X_{s_n}$, alors $w$ possède une écriture réduite $s_n \sigma_1 \dots \sigma_{n-2} s_n$ et on raisonne par récurrence sur $n$ ; sinon, d'après la condition d'échange $s_{n-1} \dots s_1 = s_1 \dots s_{n-1}$. Par itération, si $w$ ne possède pas d'écriture réduite $s\sigma_1 \dots \sigma_{n-2} s$, alors $w = s_{n-1} \dots s_1 s_n = s_n s_1 \dots s_{n-1} = \cdots = s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, donc $l(ws_i) < l(w)$. Posant $I = \{s_1, \dots, s_n\}$, on a $w \in \langle I \rangle$, donc $w = \omega_I$. S'il existe $s \in I$ avec $s\omega_I \neq \omega_I s$, alors $l(s\omega_I s) < l(\omega_I)$, et on conclut par récurrence.

b) Soient $I, J \subseteq S$ conjugués tels que $\omega_I$ et $\omega_J$ commutent respectivement avec tout élément de $I$ et de $J$. Soit $x$ de longueur minimale tel que $\omega_J = x\omega_I x^{-1}$ ; $x \in X_I$ car sinon $x$ possède une écriture réduite de la forme $s_1, \dots, s_n$ avec $s_n \in I$ et $n$ n'est pas minimal. De même $x^{-1} \in X_J$, et $x\omega_I = \omega_J x$ avec $l(x\omega_I) = l(x) + l(\omega_I) = l(x) + l(\omega_J)$. Pour $s \in I$, $l(\omega_J xs) = l(\omega_J x) - 1$. Puisque $x \in X_I$, d'après la condition d'échange forte il existe une réflexion $t$ de $\langle I \rangle$ telle que $\omega_J xs = \omega_J tx$ et $l(\omega_J t) = l(\omega_J) - 1$. Or $l(t) = l(\omega_J) - l(\omega_J t) = 1$, donc $t \in J$. De même pour $s \in J$, $x^{-1}sx \in I$.

On montre maintenant comment a) et c) ci-dessus peuvent conduire à la classification des groupes de Coxeter finis [3].

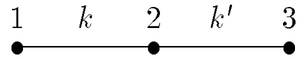
Lemme 1 [4]. — *Le mot $s_1, \dots s_n$ est réduit si et seulement si par remplacements successifs de facteurs de type $ss's\dots$ de longueur $m(s,s')$ par les mots égaux $s'ss'\dots$ de même longueur on ne peut obtenir un mot contenant un facteur de type $ss$.*

On dira qu'un mot est *rigide* si cette condition est vérifiée et si de plus tous les remplacements successifs possibles sont des commutations de générateurs ($m(s,s') = 2$).

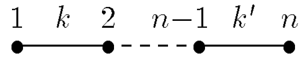
Lemme 2 [5]. — *Si $T' \subseteq T$, alors le groupe de réflexions $\langle T' \rangle$ engendré par $T'$ est un groupe de Coxeter dont un système de générateurs est l'ensemble $S' = \{t \in T, I(t) \cap \langle T' \rangle = \{t\}\}$. De plus l'ensemble de réflexions de ce système est $T \cap \langle T' \rangle$, et $l'$ désignant la fonction longueur de ce système, on a $\{l(wt) > l(w) \Leftrightarrow l'(wt) > l'(w)\}$ pour tout $w$ de $\langle T' \rangle$ et tout $t$ de $T \cap \langle T' \rangle$.*

Rappelons que le graphe $G$ du système $(W,S)$ a pour sommets les éléments de $S$, pour arêtes simples les paires $(s,s')$ telles que $m(s,s') = 3$, et pour arêtes d'ordre $m(s,s')$ les paires $(s,s')$ telles que $m(s,s') > 3$. La classification se ramène évidemment au cas où $G$ est connexe. Lorsque $G$ contient l'un des sous-graphes suivants, on voit facilement que le mot $w^p$ est rigide ($p > 0$), et que le groupe correspondant est infini, possédant des éléments de longueur arbitraire :

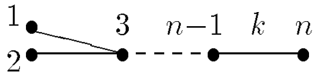
1) le cycle $1, 2, \dots, n$, $w = 12\dots n$.

2) 

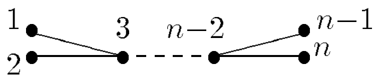
$(k \geq 6)$, $w = 12123$.

3) 

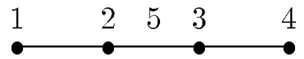
$(k, k' \geq 4)$, $w = 1\dots n \dots 2$.

4) 

$(k \geq 4)$, $w = 1 \dots n \dots 3$.

5) 

$w = 1\dots n(n-2)\dots 3$.

6) 

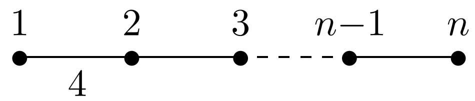
$w = 123234$.

Cet argument a été utilisé dans [4] pour les cas 1), 3), 4), 5). Par commodité on pose $|s_n \dots s_1 = s_1 \dots s_n \dots s_1$, et pour $t, t'$ dans $T$ on note $(t,t')$ l'ordre de $tt'$.

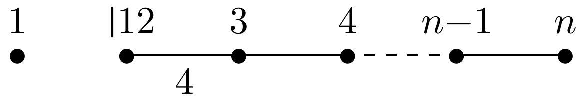
*Remarque* 1. — Si $t \neq |s_n \dots s_1$ commutent avec $w \in W$ et si $t \in I(|s_n \dots s_1)$, alors il existe $i \in [1, n-1]$ tel que $|s_i \dots s_1$ commute avec $w$. En effet, d'après la condition d'échange forte on a soit $t = |s_i \dots s_1$, soit $t = s_1 \dots s_n \dots s_i \dots s_n \dots s_1$ $(1 \leq i \leq n-1)$, auquel cas $(|s_n \dots s_1)t = (|s_i \dots s_1)(|s_n \dots s_1)$.

*Remarque* 2. — Si $W$ est fini d'élément maximal $\omega$, on sait que l'application $s \to \omega s \omega$ est un isomorphisme de graphe car $l(\omega s \omega) = l(\omega) - (l(s\omega)) = l(s)$, et pour $s, s'$ dans $S$, $(\omega s \omega, \omega s' \omega) = (s, s')$.

Soit $B_n$ le groupe

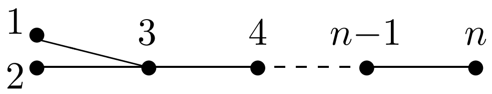



1 commute avec le groupe $< \{1, |12, 3. \dots, n\} >$. D'après le lemme 2 et la remarque 1 on a là les générateurs de ce groupe, dont le graphe est

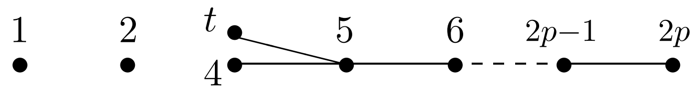



car par conjugaison $(|12, 3) = (1, |32) = (1, |23) = (|13, 2) = (1, 2) = 4$. Par récurrence le groupe $< \{|12, 3, \dots, n\} >$ est fini. D'après la remarque 2 son élément maxiaml $\omega$ commute avec $3, \dots, n$ car son graphe ne possède pas d'isomorphisme non trivial. On a $l(\omega 1) > l(\omega)$ ; si $l(\omega 2) > l(\omega)$, alors $\omega = \omega_{\{3,4,\dots,n\}}$ d'après c) de la proposition ci-dessus, ce qui est absurde. On a donc $l(1\omega i) < l(1\omega)$ pour tout $i$, donc $B_n$ est fini, d'élément maximal $1\omega$.

Soit $D_n$ le groupe



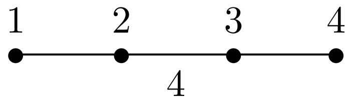

On montre par récurrence que $D_{2p}$ est fini et que son élément maximal commute avec tous les éléments : 1 commute avec $1, 2, 4, \dots, n$. En utilisant des *pseudo-commutations* de type $ss'\underline{s} \to \underline{s'}ss'$ on peut construire une réflexion $t = |s_n \dots s_1 3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ commutant avec 1 de la manière suivante : $t1 = (|s_n \dots s_1 3)\underline{1}$ ; on pose $s_1 = 1$ ; $s_n \dots s_2 13\underline{1} = s_n \dots s_2 \underline{3}13$ ; on pose alors $s_3 = 3$, $s_2 = 2$ (ou $s_3 = 3$, $s_2 = 4$) ; $s_n \dots s_4 32\underline{3}13 = s_n \dots s_4 \underline{2}3213$ ; il existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ commutant avec $\underline{2}$ mais ne commutant pas avec la lettre suivante $\underline{2}$, à savoir 4 ; on arrête alors la construction, posant $t = |43213$. On a $t = |43213 = |23413 = |23143$, donc par symétrie $|43213$ commute avec 2 et 4. On raisonne alors comme plus haut : $t$ est générateur du groupe $< \{1, 2, 4, \dots, n, t\})$ car 3, $|13$, $|213 = |23$, $|3213 = |2313 = |2131 = |231$ ne commutent pas avec 1. Le graphe de ce groupe est



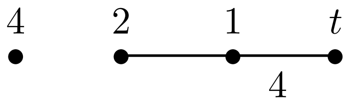
Soit $\omega$ l'élément maximal du groupe $< \{t, 4, \ldots, 2p\} >$. Par récurrence $\omega$ commute avec $4, 5, \ldots, 2p$. D'autre part $l(\omega 1) > l(\omega)$ et $l(\omega 2) > l(\omega)$. Si $l(\omega 3) > l(\omega)$, alors $\omega = \omega_{\{<4,\ldots,2p>\}}$, ce qui est absurde, donc $\omega 12$ est l'élément maximal de $D_{2p}$, avec $\omega 121 \omega 12 = 1$. Enfin, $D_4$ est fini, car le mot $|43213$ est réduit, et $l(t124i) < l(t124)$ pour $1 \leq i \leq 4$.

Dans tout ce qui suit, les réflexions $t$ proviennent du même algorithme, compte tenu des valeurs $m(s, s')$ particulières.

Soit $F_4$ le groupe

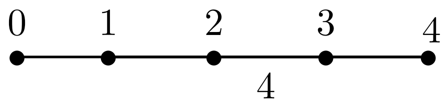



4 commute avec $4, 1, 2$, $t = |3243$, tous générateurs du groupe $< \{4, 1, 2, t\} >$ car ni 3, ni $|43$, ni $|243 = |23$ ne commute avec 4. Le graphe correspondant est

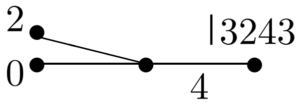



car $(|3243, 2) = (|3423, 2) = (|4323, 2) = (4, |2323) = (4, 2) = 2$ et $(|3243, 1) = (|32, 1) = (3, |12) = (3, |21) = (3, 2) = 4$. Si $\omega$ est l'élément maximal de ce groupe, on a $l(\omega 3) < l(\omega)$ et $\omega 4$ est l'élément maximal de $F_4$.

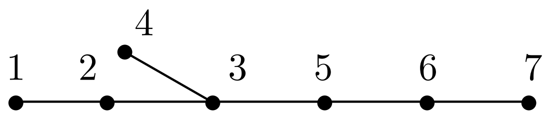
Le groupe



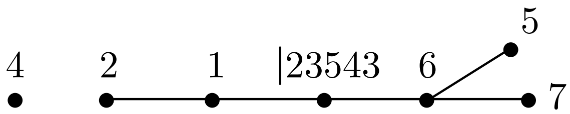

est infini car 4 commute avec le groupe infini




Soit $E_7$ le groupe

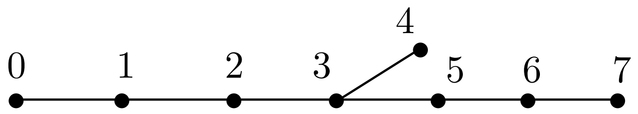



On sait que 4 commute avec le groupe

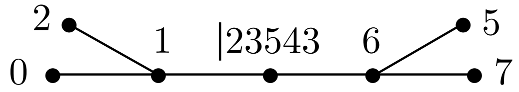


Soit $\omega$ l'élément maximal du groupe $< \{2, 1, |23543, 5, 6, 7\} >$. $\omega$ commute avec $2, 1, 5, 6, 7$ ; on en déduit $l(\omega 3) < l(\omega)$ et $E_7$ est fini, d'élément maxiaml $\omega 4$.

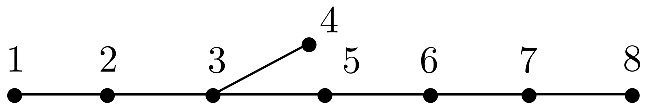
Le groupe



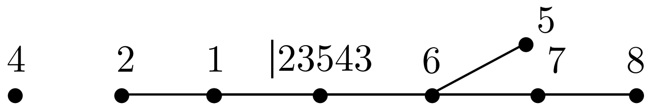

est infini car 4 commute avec le groupe infini




Soit $E_8$ le groupe

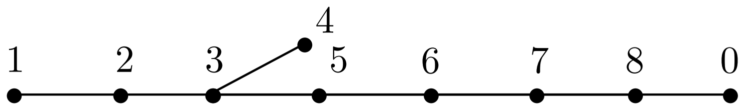



4 commute avec le groupe

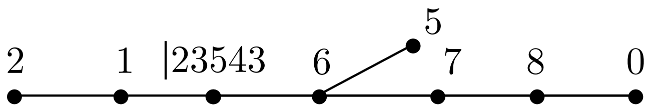



et de la même manière que plus haut $E_8$ est fini.

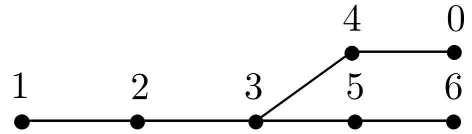
Le groupe



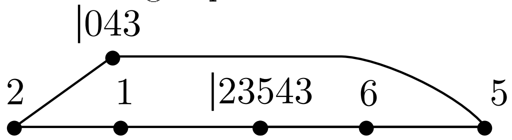

est infini car 4 commute avec le groupe infini



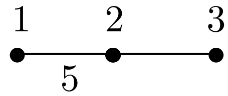

Le groupe



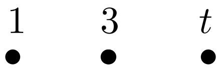
est infini car 4 commute avec le groupe infini




Soit $H_3$ le groupe

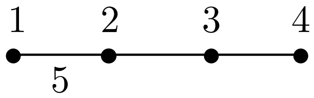



1 commute avec $1, 3, t = |1231212$, tous générateurs du groupe $< \{1, 3, t\} >$ car 2, $|12$, $|212$, $|1212 = |21$, $|31212 = |3212$, $|231212 = |321212 = |312121 = |32121$ ne commutent pas avec 1, $|32121$ étant réduit. Le graphe correspondant est

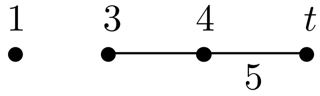



car $|1231212 = |1213212 = |2123212 = |2132312 = |3212132$ et $3212132\underline{3} = 32121\underline{2}32 = 3\underline{1}212132$; $|1231212$ étant réduit, $H_3$ est fini, d'élément maximal $t13$.

Soit $H_4$ le groupe

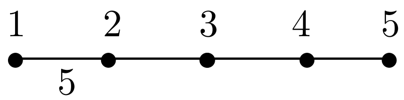



1 commute avec $1, 3, 4$, $|1231212 = t$, donc avec le groupe

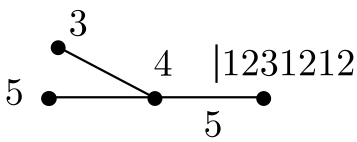



$(|1231212, 4) = (|123, 4) = (|12, |43) = (|12, |34) = (|12, 3) = (1, |32) = (1, |23) = (1, 2) = 5$. $H_4$ est fini, d'élément maximal $1\omega$, où $\omega$ est l'élément maximal du groupe $< \{3, 4, t\} >$.

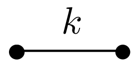
Enfin, le groupe



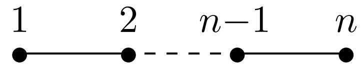

est infini, car 1 commute avec le groupe infini



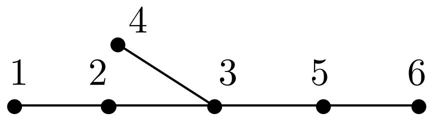
De tout cela résulte que les groupes de Coxeter finis de graphe connexe sont bien $I_2(k)$, de graphe




puis $A_n$, de graphe




enfin $B_n, D_n, E_6$, de graphe




et $E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$.

*Remarque.* — Il n'existe pas dans la littérature de preuve algébrique de chacun des résultats utilisés dans cette note (en particulier l'égalité $(s, s') = m(s, s')$ et le lemme 2). De telles preuves paraîtront prochainement dans [6].

On trouvera une méthode de classification plus constructive dans [7]. Le normalisateur d'une réflexion d'un groupe de Coxeter fini étant un groupe de réflexions [8], on voit *a posteriori* que l'on s'est ramené aux cas où l'élement maximal commute avec chaque élément, montrant que l'élement maximal du normalisateur d'un générateur (ou d'une réflexion quelconque) ne peut être que l'élément maximal du groupe tout entier. Dans chaque cas considéré, le choix du générateur a été fait en vue de la brièveté des calculs.

## Références

[1] R. W. Richardson. — Conjugacy classes of involutions in Coxeter groups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. **26**, 1982, p. 1-15.

[2] J. E. Humphreys. — *Reflection groups and Coxeter groups.* — Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] H. M. S. Coxeter. — The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. **10**, 1935, p. 21-25.

[4] J. Tits. — Le problème des mots dans les groupes de Coxeter, in Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68), Academic Press, Londres, 1969, 1, p.175-185.

[5] M. Dyer. — Reflection subgroups of Coxeter systems, *J. Algebra*, vol. **135**, 1990, p. 57-53.

[6] P. Moszkowski. — An algebraic introduction to Coxeter groups, à paraître.

[7] P. Moszkowski. — On the involutions of Coxeter groups, à paraître.

[8] E. Witt. — Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfachen Liescher Ringe, *Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. **14**, 1941, p. 289-337.

Paul Moszkowski,
C.N.R.S., Équipe de Combinatoire,
Université de Paris VI,
4, Place Jussieu,
F-75005 Paris.