DISTRIBUTION DE L'INDICE MAJEUR RÉDUIT SUR LES DÉRANGEMENTS

JACQUES DÉSARMÉNIEN*

Introduction

Le nombre de dérangements de n objets, noté d_n satisfait la relation de récurrence très simple :

$$(*) \qquad d_n = nd_{n-1} + (-1)^n.$$

Assez curieusement, il n'existe pas de démonstration bijective à proprement parler immédiate de cette formule.

Nous avons montré dans [D1] comment un modèle distinct de celui des dérangements et en bijection avec celui-ci permet d'interpréter simplement cette récurrence. Ce travail a été amplifié dans [D–W1, D–W2] et placé dans le contexte des fonctions symétriques. Il est possible également d'en déduire des formules explicites pour les q-dérangements, formules obtenues aussi directement par Michelle Wachs [W].

Dans un article récent [D2], nous nous sommes intéressé à la réduction modulo n des statistiques mahoniennes. Nous allons montrer ici comment la notion d'indice majeur réduit permet d'interpréter directement la formule $(*)$.

1. Les q-dérangements

Étant donnée une permutation σ de $[1,n]$, considérée comme un mot de longueur n, l'ensemble des *descentes* de σ est l'ensemble des indices i, $1 \le i \le n-1$ tels que $\sigma_i \ge \sigma_{i+1}$. L'*indice majeur* de σ, noté $\operatorname{maj}\sigma$ est la somme des éléments de cet ensemble.

Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des *dérangements* (ou permutations sans point fixe) de $[1,n]$. On peut évaluer la fonction génératrice $d_n(q) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} q^{\operatorname{maj}\sigma}$ de l'indice majeur sur $\mathcal{D}_n$. Ce polynôme est appelé *q-dérangement*. Si l'on note $[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ et $[n]! = [1][2]\ldots[n]$, on a la formule suivante, énoncée par Ira Gessel et démontrée combinatoirement par

* Avec le soutien du P.R.C. Math.–Info.

Michelle Wachs. C'est le q-analogue de la formule classique donnant le nombre de dérangements.

PROPOSITION 1.1. — *La fonction génératrice de l'indice majeur sur l'ensemble des dérangements de* $[1,n]$ *vaut :*

$$d_n(q) = [n]! \sum_{0\le k\le n} \frac{(-1)^k}{[k]!} q^{k(k-1)/2}.$$

Cette proposition peut aussi se déduire des formules données dans [D–W1] pour les fonctions symétriques associées aux dérangements en spécialisant les indéterminées en les puissances successives de q.

À partir de la proposition précédente, on vérifie sans peine que les q-dérangements satisfont la récurrence suivante.

PROPOSITION 1.2. — *Les* q*-dérangements sont donnés par la récurrence :*

$$(i)\ :\ d_0(q) = 1\ ;$$
$$(ii)\ :\ d_n(q) = [n]d_{n-1}(q) + (-1)^n q^{n(n-1)/2}.$$

La récurrence $(*)$ s'obtient bien en faisant $q=1$ dans la proposition précédente.

2. L'indice majeur réduit

Dans [D2], nous avons introduit la notion suivante : lorsque σ est une permutation de $[1,n]$, on appelle *indice majeur réduit* de σ, qu'on note $\mathrm{maj}{*}\,\sigma$ le reste de l'indice majeur de σ modulo n. De la sorte, la fonction génératrice de maj∗ sur un ensemble de permutations est le reste modulo $1-q^n$ de la fonction génératrice de maj sur le même ensemble.

En particulier, dans le cas des dérangements, si l'on note d_n^k le nombre de dérangements de $[1,n]$ dont l'indice majeur réduit vaut k, $(0\le k\le n-1)$, le polynôme $d_n^*(q) = \sum_{0\le k\le n-1} d_n^k q^k$ est le reste de $d_n(q)$ modulo $1-q^n$.

On vérifie immédiatement le lemme suivant.

LEMME 2.1. — *Si* $P(q)$ *est un polynôme, on a la congruence :*

$$P(q)[n] \equiv P(1)[n] \pmod{1-q^n}.$$

On peut alors réduire modulo $1-q^n$ la récurrence de la proposition 1.2 :

$$d_n^*(q) = [n]d_{n-1}(1) + \begin{cases} q^{n/2}, & \text{si } n \text{ est pair,}\\ -1, & \text{si } n \text{ est impair,}\end{cases}$$

compte-tenu du reste de $q^{n(n-1)/2}$ modulo $1-q^n$.

Les coefficients de $d_n^*(q)$ sont donc tous égaux, sauf celui de $q^{n/2}$ si n est pair et le terme constant si n est impair. Puisque $d_{n-1}(1) = d_{n-1}$, nombre de dérangements, il s'ensuit qu'on a partitionné l'ensemble $\mathcal{D}_n$ en n parts, chacune de cardinal d_{n-1} sauf une qui vaut alternativement $d_{n-1}+1$ et $d_{n-1}-1$.

L'interprétation de la récurrence $(*)$ est ainsi accomplie par le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2. — *Le nombre d_n^k de dérangements de $[1,n]$ dont l'indice majeur est congru à k modulo n vaut d_{n-1} sauf*

(i) : lorsque n est pair et $k = n/2$ auquel cas $d_n^{n/2} = d_{n-1}+1$,

(ii) : lorsque n est impair et $k = 0$ auquel cas $d_n^0 = d_{n-1}-1$.

Il serait évidemment intéressant de démontrer *directement et bijectivement* la proposition précédente. On obtiendrait ainsi une démonstration et non plus seulement une interprétation de la récurrence $(*)$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[D1] DÉSARMÉNIEN (J.). — Une autre interprétation du nombre de dérangements, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B08a, 1983.

[D2] DÉSARMÉNIEN (J.). — Étude modulo n des statistiques mahoniennes, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B22a, 1989.

[D–W1] DÉSARMÉNIEN (J.) et WACHS (M.). — Descentes sur les dérangements et mots circulaires, *Séminaire Lotharingien de combinatoire*, B19a, 1988.

[D–W2] DÉSARMÉNIEN (J.) et WACHS (M.). — Derangements and necklaces, prépublication, 1989.

[W] WACHS (M.). — On q-derangement numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **106**, 1989, p. 273–279.

Institut Gaspard-Monge,
Université Marne-la-Vallée,
93160-Noisy-le-Grand.