TABLEAUX DE DOMINOS, FONCTIONS H ET PLETHYSMES

CHRISTOPHE CARRÉ* ET BERNARD LECLERC†

Abstract

We present a new family of symmetric functions, denoted by $H_I(q)$, defined in terms of domino tableaux. These functions which depend on a parameter q, specialize to Schur S-functions for $q = 0$, to a product of two S-functions for $q = 1$, and for $q = -1$ (when I is a double partition) to a plethysm. This allows to split the square of a Schur function into its symmetric and antisymmetric parts, *i.e.* to give a combinatorial expression of the expansion on the basis of Schur functions of the plethysms $S_2(S_I)$ and $\Lambda_2(S_I)$.

Résumé

Nous présentons une nouvelle famille de fonctions symétriques, notées $H_I(q)$, définies en termes de tableaux de dominos. Ces fonctions qui dépendent d'un paramètre q, se spécialisent pour $q = 0$ en les fonctions S de Schur, pour $q = 1$ en un produit de deux fonctions S, et pour $q = -1$ (lorsque I est une partition double) en un pléthysme. Ceci permet de séparer la partie symétrique et la partie antisymétrique du carré d'une fonction de Schur, *i.e.* de donner une expression combinatoire du développement sur la base des fonctions S des pléthysmes $S_2(S_I)$ et $\Lambda_2(S_I)$.

1 Introduction

Les vecteurs de poids de la représentation irréductible V_I de $GL(n, C)$ peuvent être codés par les tableaux de Young de forme I sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots n\}$. Le poids d'un tel tableau t est alors le monôme $a^t = a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_n^{j_n}$, où $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ est l'évaluation de t. En sommant ces monômes on obtient le caractère de V_I, c'est-à-dire la fonction de Schur S_I (voir Section 2).

Le but de cet exposé est d'introduire de nouvelles fonctions, notées H_I, obtenues en remplaçant dans la construction précédente les tableaux de Young par des tableaux de dominos. Une bijection due à Stanton et White [**SW**] montre que les tableaux de

*LIR, Université de Rouen, Place E. Blondel, Boite Postale 118, 76134 Mont-Saint-Aignan Cedex. *E-mail:* carre@litp.ibp.fr

†L.I.T.P., Université Paris 7, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05. *E-mail:* bl@litp.ibp.fr

dominos correspondent à des couples de tableaux de Young ordinaires. On peut donc les voir comme les vecteurs de poids du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $GL(n, C)$.

Le premier problème qui se pose est d'identifier les tableaux de dominos correspondant aux vecteurs de plus haut poids. Ces tableaux, que nous appellerons tableaux de Yamanouchi, sont décrits dans la Section 2. Nous pouvons ainsi décomposer ce produit tensoriel en ses composantes irréductibles, et exprimer les multiplicités (coefficients de Littlewood-Richardson) comme des nombres de tableaux de dominos de Yamanouchi.

En deuxième lieu, nous associons à tout tableau de dominos un demi-entier, appelé spin, égal à la moitié du nombre de ses dominos verticaux. Il se trouve que tous les tableaux de dominos figurant dans une même composante irréductible possèdent le même spin, de sorte qu'un spin est en fait attaché à chacune de ces composantes. On définit alors la fonction H_I comme la somme des monômes $q^{spin(T)}\, a^T$, où T parcourt l'ensemble des tableaux de dominos de forme $2I$. Elle représente donc le caractère du produit tensoriel $V_{I_0} \otimes V_{I_1}$ gradué par le spin, les partitions I_0 et I_1 étant définies en fonction de $I = (i_1, \ldots, i_n)$ par $I_0 = (i_2, i_4, i_6, \ldots)$, $I_1 = (i_1, i_3, i_5, \ldots)$ (Théorèmes 2.5 et 2.7).

Il est naturel de se demander quelle peut être la signification du spin en théorie des représentations. Nous donnons une première réponse dans le cas particulier du carré tensoriel d'une représentation irréductible V_I. Le Théorème 2.8 et son Corollaire 2.9 montrent en effet que si l'on sépare les composantes irréductibles de $V_I \otimes V_I$ suivant la parité de leur spin, on obtient la décomposition de ce carré en ses parties symétrique et anti-symétrique

$$V_I \otimes V_I = S^2(V_I) \oplus \Lambda^2(V_I) \ .$$

Nous résolvons ainsi un problème posé par Littlewood [**L1**] dans le contexte de la théorie classique des invariants. Il est à noter que la règle de Littlewood-Richardson, qui fait jouer un rôle différent aux deux facteurs V_I, n'est pas adaptée à cette décomposition. La règle que nous proposons traite les deux facteurs sur un pied d'égalité, ce qui permet de mettre à jour cette symétrie cachée. Il serait intéressant de décrire une correspondance explicite entre les deux règles.

Les théorèmes que nous venons de mentionner sont énoncés plus précisément et en termes de fonctions symétriques dans la Section 2. Le lecteur intéressé par les constructions combinatoires permettant de les prouver est renvoyé à [**CL**], où il trouvera également des formulations plus générales et des résultats complémentaires.

La Section 3 indique plusieurs prolongements de cet exposé.

Remerciements

Ce travail doit beaucoup au soutien chaleureux du Phalanstère de Combinatoire Algébrique de Marne-la-Vallée, dont nous voudrions remercier tous les membres, permanents et invités, J. Désarménien, G. Duchamp, S. Kim, A. N. Kirillov, D. Krob, A. Lascoux, P. A. Picon, C. Precetti, T. Scharf, M. P. Schützenberger, J. Y. Thibon.

Les algorithmes relatifs à cet exposé ont été implémentés à l'aide du système de calcul formel *SYMMETRICA* développé à Bayreuth par A. Kerber et A. Kohnert, en collaboration avec le L.I.T.P. [**KKL**].

2 Fonctions H et pléthysmes

Rappelons pour commencer la définition des fonctions S de Schur (voir [**Mcd**]). Fixons un ensemble de variables $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. A chaque tableau de Young t on associe un monôme a^t défini par

$$a^t = \prod_i a_i^{k_i} \ , \tag{1}$$

où k_i désigne le nombre de boîtes de t numérotées i. Par exemple, si

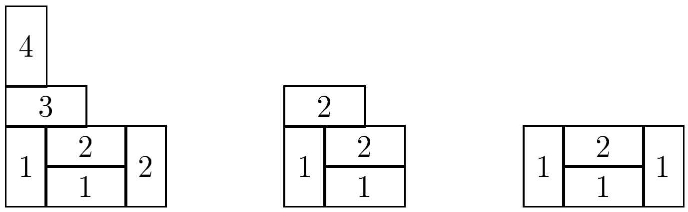
$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} 3 & 4 \\ \cline{1-4} 2 & 3 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

le monôme a^t est égal à $a^t = a_1^3\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^2\, a_5^1\, a_6^1\, a_7^1\, a_8^1$. La *forme* du tableau t, c'est-à-dire la suite des longueurs de ses lignes est une *partition*, *i.e.* une suite croissante au sens large d'entiers positifs $I = (i_1, \dots, i_m)$. Dans l'exemple précédent, $I = (2, 2, 4, 5)$. La fonction de Schur $S_I(A)$ est alors définie par

$$S_I(A) = \sum_t a^t \ , \tag{2}$$

la somme portant sur l'ensemble de tous les tableaux de Young de forme I.

Les fonctions H_I sont obtenues en remplaçant dans (2) les tableaux de Young par des tableaux de dominos. Plus précisément, nous appellerons *tableau de dominos de forme* I un pavage de I par des rectangles 2×1 ou 1×2 appelés *dominos*. Chaque domino est étiqueté par un entier positif, et l'on demande que les étiquettes soient croissantes au sens large dans les lignes, et croissantes au sens strict dans les colonnes (comme pour un tableau de Young). Ainsi la Figure 1a représente un tableau de dominos de forme $(1, 1, 2, 4, 4)$, tandis que les Figures 1b et 1c ne sont pas des tableaux de dominos.



(a) (b) (c)

Figure 1:

On associe de même à chaque tableau de dominos T un monôme $a^T = \prod a_i^{k_i}$, où k_i désigne le nombre de dominos de T étiquetés i. Soit n le plus grand entier tel que $k_n \neq 0$. Le vecteur $(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$ s'appelle l'*évaluation* de T. Enfin, on définit le *spin* de T, comme la moitié du nombre de ses dominos verticaux. Ainsi, l'évaluation du tableau T de la Figure 1a est $(1, 1, 2, 2)$, et nous avons

$$a^T = a_1^2\, a_2^2\, a_3^1\, a_4^1 \ , \quad spin(T) = 3/2 \ .$$

Nous pouvons maintenant donner la

Définition 2.1 *Soit $I = (i_1, \ldots, i_m)$ une partition. La fonction H_I est définie par*

$$H_I(A,q) = \sum_T q^{spin(T)}\, a^T \ , \tag{3}$$

où la somme porte sur tous les tableaux de dominos de forme $2I := (2i_1, \ldots, 2i_m)$.

Il existe une bijection évidente entre les tableaux de dominos de forme $2I$ et de spin 0, et les tableaux de Young de forme I. On en déduit, compte tenu de (2), la

Proposition 2.2 *Pour toute partition I, on a*

$$H_I(A,0) = S_I(A) \ .$$

Les théorèmes qui suivent sont moins évidents. Ils résultent de diverses constructions combinatoires pour lesquelles nous renvoyons le lecteur à [**CL**].

Théorème 2.3 *Les fonctions $H_I(A,q)$ sont des fonctions symétriques de l'ensemble de variables A.*

Pour décrire le développement de ces fonctions sur la base des fonctions de Schur nous aurons besoin de quelques définitions supplémentaires.

La *lecture colonne* d'un tableau de dominos T est le mot obtenu en lisant les colonnes successives de T de haut en bas et de gauche à droite. Les dominos horizontaux, qui appartiennent à deux colonnes consécutives i et $i+1$, sont lus une fois seulement, lors de la lecture de la colonne i. Par exemple, la lecture colonne du tableau T de la Figure 1a est $w = 4\,3\,1\,2\,1\,2$.

Un *tableau de dominos de Yamanouchi* est un tableau de dominos dont la lecture colonne est un mot de Yamanouchi, *i.e.* un mot w tel que tout facteur droit w' de w contient plus de lettres 1 que de lettres 2 (au sens large), plus de lettres 2 que de lettres 3, *etc.*.

Exemple 2.4 La Figure 2 représente les huit tableaux de dominos de Yamanouchi de forme (2, 2, 2, 4, 4).

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 2.5 *Le développement de la fonction $H_I(A,q)$ sur la base des fonctions de Schur est donné par*

$$H_I(A,q) = \sum_T q^{spin(T)}\, S(T) \ , \tag{4}$$

où la somme porte sur les tableaux de dominos de Yamanouchi T de forme $2I$, et où l'on désigne par $S(T)$ la fonction de Schur indexée par l'évaluation de T.

Exemple 2.6 En lisant l'évaluation et le spin des huit tableaux de la Figure 2 on obtient

$$H_{11122}(q) = q^3\, S_{124} + q^2\, S_{1114} + q^2\, S_{223} + (q+q^2)\, S_{1123} + q\, S_{11113} + q\, S_{1222} + S_{11122} \ .$$

Le lien entre les tableaux de dominos et la règle de Littlewood-Richardson [**L2**] [**Mcd**] apparaît dans le théorème suivant, qui résulte d'une bijection de Stanton et White entre tableaux de dominos et couples de tableaux ordinaires [**SW**] [**FS**] [**CL**].

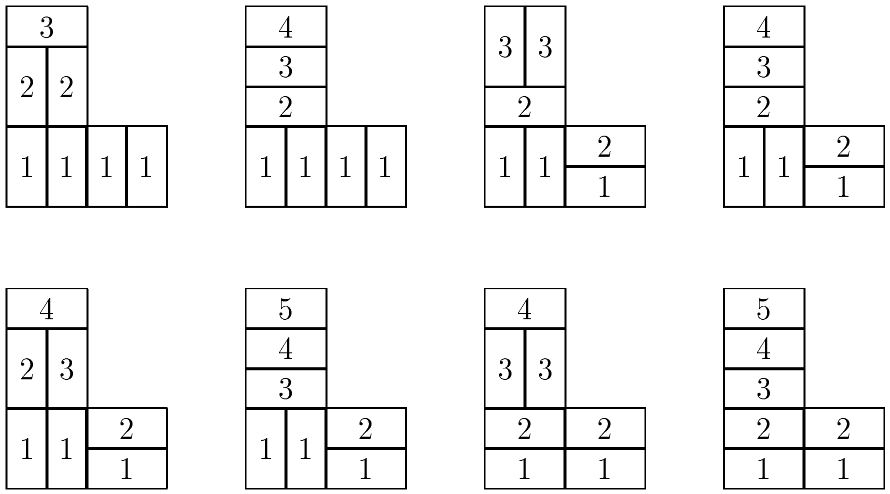


Figure 2:

Théorème 2.7 *Soit $I = (i_1, \ldots, i_n)$ une partition, et notons I_0 et I_1 les partitions $I_0 = (i_2, i_4, i_6, \ldots)$, $I_1 = (i_1, i_3, i_5, \ldots)$. La spécialisation $q \to 1$ de $H_I(A, q)$ est donnée par*

$$H_I(A, 1) = S_{I_0}(A)\, S_{I_1}(A) \ . \tag{5}$$

Compte tenu du Théorème 2.5, le Théorème 2.7 montre que les coefficients de Littlewood-Richardson (ou nombres de Clebsch-Gordan) $c^K_{I_0\, I_1} = (S_{I_0}\, S_{I_1}\, ,\, S_K)$ sont des nombres de tableaux de dominos de Yamanouchi. Ceci s'étend aux coefficients de Littlewood-Richardson plus généraux $c^K_{I\,J}$ pour lesquels la suite $(i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots)$ n'est pas nécessairement une partition (*cf.* [**CL**]).

Ainsi, les coefficients du développement de $H_I(A, q)$ sur la base des fonctions de Schur apparaissent-ils comme des q-analogues de coefficients de Littlewood-Richardson. Le théorème suivant montre que ces q-analogues ont une signification algébrique intéressante.

Théorème 2.8 *Soit $I = (i_1, \ldots, i_n)$ une partition, et notons $I \vee I$ la partition doublée*

$$I \vee I = (i_1, i_1, i_2, i_2, \ldots\, i_n, i_n) \ .$$

Alors la spécialisation $q \to -1$ de $H_{I \vee I}(A, q)$ est égale au pléthysme

$$H_{I \vee I}(A, -1) = (-1)^{\sum i_k}\ \Psi_2(S_I(A)) \ . \tag{6}$$

Rappelons que le pléthysme $\Psi_2(F(A))$ d'une fonction symétrique F n'est rien d'autre que la fonction F en les carrés des variables

$$\Psi_2(F(a_1, \ldots, a_m)) = F(a_1^2, \ldots, a_m^2) \ . \tag{7}$$

Ce pléthysme peut aussi s'écrire comme la différence entre la partie symétrique et la partie antisymétrique du carré de F, comme le montrent les équations suivantes

$$F(A)^2 = S_2(F(A)) + \Lambda_2(F(A)) \ , \tag{8}$$

$$\Psi_2(F(A)) = S_2(F(A)) - \Lambda_2(F(A)) \ . \tag{9}$$

Nous renvoyons le lecteur à [**K**] [**Mcd**] pour de plus amples informations sur les pléthysmes. On déduit des Théorèmes 2.7, 2.8 et des relations (8), (9) le

Corollaire 2.9 (Expression combinatoire des pléthysmes $S_2(S_I)$ et $\Lambda_2(S_I)$) *Soit I une partition et notons*

$$S_2(S_I) = \sum_J \alpha_{IJ} S_J \ , \qquad \Lambda_2(S_I) = \sum_J \beta_{IJ} S_J \ .$$

L'entier α_{IJ} (resp. β_{IJ}) est égal au nombre de tableaux de dominos de Yamanouchi de forme $2I \vee 2I := (2i_1, 2i_1, 2i_2, 2i_2, \ldots, 2i_n, 2i_n)$ et d'évaluation J, dont le nombre de dominos horizontaux est $\equiv 0$ mod 4 (resp. $\equiv 2$ mod 4).

Exemple 2.10 Choisissons $I = (1, 2)$. Les huit tableaux de dominos de Yamanouchi de forme $(2, 2, 4, 4)$ sont représentés par la Figure 3

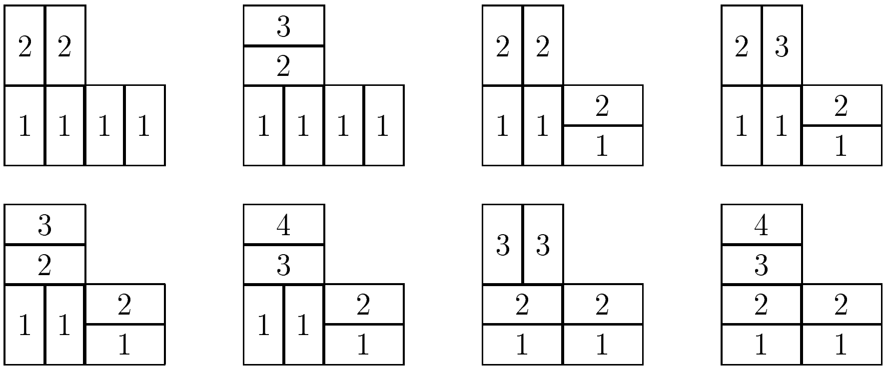


Figure 3:

On déduit du Théorème 2.5 et du Corollaire 2.9 les expressions suivantes

$$S_{12}\ S_{12} = S_{24} + S_{114} + S_{33} + 2S_{123} + S_{1113} + S_{222} + S_{1122} \ ,$$

$$\begin{cases} S_2(S_{12}) = S_{24} + S_{123} + S_{1113} + S_{222} \ , \\ \Lambda_2(S_{12}) = S_{114} + S_{33} + S_{123} + S_{1122} \ . \end{cases}$$

3 Commentaires

Mentionnons quelques prolongements de ce travail.

1. D'autres identités satisfaites par les fonctions H sont étudiées dans [**KLLT**], à savoir, une "demi-formule de Pieri", et des séries génératrices qui généralisent les identités suivantes de Schur et Littlewood

$$\sum_I S_I(A) = \prod_i \frac{1}{1-a_i} \prod_{i<j} \frac{1}{1-a_i a_j} ,$$

$$\sum_I S_{I \vee I}(A) = \prod_{i<j} \frac{1}{1-a_i a_j} ,$$

$$\sum_I S_{2I}(A) = \prod_{i \leq j} \frac{1}{1-a_i a_j} .$$

2. Les fonctions H ont été découvertes à l'occasion de recherches sur les fonctions de Hall-Littlewood, et notamment de leurs spécialisations aux racines de l'unité. Ainsi le Théorème 2.8 est-il à comparer aux résultats de [**LLT**] dans le cas $k = 2$. Dans cette perspective, les fonctions H définies dans cet exposé apparaissent comme la première étape d'une filtration des fonctions de Hall-Littlewood en une suite croissante de polynômes. Ce point de vue sera développé ultérieurement.

References

[**CL**] C. Carré et B. Leclerc, *Splitting the square of a Schur function into its symmetric and antisymmetric parts*, Rapport LITP 93.51, université Paris 7, 1993

[**FS**] S. Fomin et D. Stanton, *Rim hook lattices*, Mittag-Leffler institute, preprint No 23, 1991/92

[**K**] A. Kerber, Algebraic combinatorics via finite group actions, Wissenschaftsverlag, Mannheim 1991

[**KKL**] A. Kerber, A. Kohnert et A. Lascoux, *SYMMETRICA, an object oriented computer-algebra system for the symmetric group*, J. Symbolic Computation 14 (1992), 195-203

[**KLLT**] A. N. Kirillov, A. Lascoux, B. Leclerc et J.Y. Thibon, *Séries génératrices pour les tableaux de dominos*, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris.

[**L1**] D. E. Littlewood, *Invariant theory, tensors and group characters*, Phil. Trans. Roy. Soc. A, 239 (1944), 305-65

[**L2**] D. E. Littlewood, The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford 1950

[**LLT**] A. Lascoux, B. Leclerc and J.Y. Thibon, *Fonctions de Hall-Littlewood et polynômes de Kostka-Foulkes aux racines de l'unité*, C.R. Acad. Sci. Pa ris, t. 316, Série I, (1993) 1-6

[**Mcd**] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford 1979

[**SW**] D. Stanton et D. White, *A Schensted algorithm for rim-hook tableaux*, J. Comb. Theory A 40, (1985), 211-247