IDENTITÉ CYCLOTOMIQUE, SUPERALGÈBRES DE LIE ET BICARACTÈRES

Gérard Duchamp

Abstract. The introduction of an arbitrary bicharacter unifies the theories of Lie algebras and superalgebras. Here, we give the structure of bicharacters and study those that are compatible with linear and symmetric actions on the free Lie superalgebra. We also give a way to adapt the construction of classical bases of Lie algebras to superalgebras and derive consequences on modules and characters.

Résumé. L'introduction d'un bicaractère arbitraire unifie les théories des algèbres et des superalgèbres de Lie. Ici, nous donnons la structure des bicaractères et déterminons ceux qui sont compatibles avec les actions des changements de variables par les groupes linéaires et symétriques. Nous indiquons aussi un moyen d'adapter les bases classiques des algèbres de Lie aux superalgèbres et en déduisons des propriétés des modules associés et de leurs caractères.

1. Introduction. Il est bien connu que les dérivations d'une algèbre forment une algèbre de Lie. Mais l'analyse offre des situations où les dérivations vérifient

$$\partial xy = \partial x.y + \chi\, x.\partial y$$

avec un facteur χ scalaire différent de 1. L'exemple le plus connu étant la différentielle extérieure des formes sur une variété.

Les axiomes que vérifie χ sont ceux des bicaractères (cf. section 3), ils ont été énoncé pour la première fois sous leur forme actuelle par R. Ree [Ree] qui, dans son papier, définit en toute généralité la notion de χ-algèbre, donne un analogue des caractérisations classiques des polynômes de Lie (Friedrichs, Dynkin–Specht–Wever) et des formules de Witt.

Les superalgèbres ont été étudiées principalement avec le facteur de commutation $(-1)^{\text{degré}(x)\cdot\text{degré}(y)}$ [Sc]. Plus récemment l'école de Moscou en a repris l'étude dans toute sa généralité et le lecteur curieux des questions comme les identités dans les algèbres enveloppantes, les p-algèbres et les variétés d'algèbres est invité à consulter le livre qu'elle vient de publier [Ba].

Ce qui suit est consacré aux aspects combinatoires des bicaractères et des bases effectives des χ-algèbres. Après un bref rappel du cas classique (section 2) et du cas général (section 3), on donne un théorème de structure des bicaractères (section 4). Sur tous les bicaractères possibles, la condition que la superalgèbre libre soit stable par les changements de variables n'en retient que deux (les deux classiques d'ailleurs) et quatre si on n'autorise que les substitutions (section 5).

Enfin, dans la section 6, l'élimination de LAZARD permet de voir très facilement (en se ramenant au cas d'un seul générateur) comment adapter aux superalgèbres les constructions de bases classiques connues dans le cas des algèbres de Lie. Nous en déduisons quelques conséquences énumératives sur les dimensions, les modules et leurs caractères.

2. Superalgèbres de Lie classiques. On dira qu'une algèbre $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée et munie d'une loi [,], est une superalgèbre de Lie si elle vérifie identiquement, pour $x \in \mathcal{G}_p$, $y \in \mathcal{G}_q$:

$$(J) \qquad [x,[y,z]] = [[x,y],z] + (-1)^{pq}[y,[x,z]],$$

$$(S) \qquad [x,y] = -(-1)^{pq}[y,x].$$

Exemples. *1)* Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ une algèbre associative $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. La formule

$$[x,y] = xy - (-1)^{pq}yx$$

définie pour $x \in \mathbb{A}_p$ et $y \in \mathbb{A}_q$ s'étend par linéarité à toute $\mathcal{A}$ et la munit d'une structure de superalgèbre de Lie.

2) On peut définir ainsi les superalgèbres *gl*$(m|n)$, *sl*$(m|n)$ et *Psl*$(n|n)$ qui sont utilisées par les physiciens [DeW][F].

La superalgèbre linéaire *gl*$(m|n)$ est un cas particulier du permier exemple.

Soit $V = V_0 \oplus V_1$, un espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué (V_0 est appellé secteur de Bose et V_1, de Fermi). $\mathrm{End}(V)$ ($= \mathrm{End}^{gr}(V)$) est munie naturellement d'une structure d'algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée par

$$\mathrm{End}^{(i)}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) : f(V_j) \subset V_{i+j} \text{ pour tout } j\}$$

qui permet, selon l'exemple précédent, de munir $\mathrm{End}(V)$ d'une structure de superalgèbre de Lie. Cette algèbre n'est pas simple et admet un idéal non trivial, *sl*$(m|n)$ qui est le noyeau de la forme "supertrace" dont la définition est (p_0 et p_1 désignant les projecteurs associés à la somme $V = V_0 \oplus V_1$)

$$\mathrm{str}(f) = \mathrm{tr}(p_0 f) - \mathrm{tr}(p_1 f).$$

Si $m \neq n$, *sl*$(m|n)$ est simple, *sl*$(n|n)$ admet encore un idéal non trivial, son centre, qui est la droite des matrices scalaires. Le quotient *Psl*$(n|n) =$ *sl*$(n|n)/(\mathbb{C} \cdot 1)$ est simple pour $n \geq 2$ (cf. [DeW][F]).

Remarques. 1) Les $\mathbb{C}$-superalgèbres simples de dimension finie ont été classifiées par KAC [K].

2) La catégorie des superalgèbres de Lie a un comportement très semblable à celle des algèbres de Lie par rapport aux objets libres et aux algèbres enveloppantes.

Cette remarque conduit à la question suivante :

QUESTION : Existe-t-il une famille de structures qui ait le même comportement et qui contienne à la fois les algèbres et superalgèbres de Lie ?

RÉPONSE : Oui, les χ-superalgèbres de Lie. RHIMAC REE [Ree] a remarqué que $(-1)^{pq}$ pouvait se remplacer par un facteur de commutation χ, bilinéaire antisymétrique sur le monoïde des degrés (qui n'est alors plus nécessairement $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Nous allons maintenant en donner la définition exacte.

3. χ-superalgèbres. Soit K, un anneau et $(\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha\in M}$, une K-algèbre graduée par un monoïde commutatif M et dont la loi est notée [,]. Un bicaractère (ou facteur de commutation sur M) est une application $\chi : M \times M \longrightarrow K$ telle que les identités suivantes soient vérifiées pour $x, y, z \in M$

$$\begin{cases} \chi(x+y,z) = \chi(x,z) + \chi(y,z), & (bc1) \\ \chi(x,y+z) = \chi(x,y) + \chi(x,z), & (bc2) \\ \chi(x,y)\chi(y,x) = 1, & (bc3) \\ \chi(x,x) = \pm 1. & (bc4) \end{cases}$$

$(bc1)$, $(bc2)$ et $(bc3)$ signifient que χ est bilinéaire antisymétrique et $(bc4)$ est une condition diagonale qui est toujours réalisée lorsque K est un corps. On peut alors définir la structure de superalgèbre.

Définition. Soit $(M,+)$ un monoïde comutatif, K un anneau tel que $2, 3 \in K^*$ et $\chi : M \times M \longrightarrow K$ un bicaractère, on dit qu'une algèbre graduée $\mathcal{G} = \bigoplus_{\alpha\in M} \mathcal{G}_\alpha$ est une χ-superalgèbre (ou superalgèbre colorée [Bah]) si elle vérifie les identités suivantes

$$\begin{cases} [x,[y,z]] = [[x,y],z] + \chi(\alpha,\beta)[y,[x,z]], & (J) \\ [x,y] = -\chi(\alpha,\beta)[y,x], & (A) \end{cases}$$

identiquement pour $x \in \mathcal{G}_\alpha$ et $y \in \mathcal{G}_\beta$.

Exemple. On peut déjà définir une telle structure sur l'anneau des polynômes non commutatifs (dont nous verrons qu'elle est l'algèbre enveloppante de la superalgèbre libre).

Soit $\mathbb{A}$, un alphabet. Pour un mot $w \in \mathbb{A}^*$, $|w|_a$ désignera le nombre d'occurrences de la lettre a dans w et $\mathrm{ev}(w) := (|w|_a)_{a\in\mathbb{A}}$, son évaluation. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{A}}$, on pose $\mathbb{A}^\alpha := \mathrm{ev}^{-1}(\alpha)$ et $\mathbb{C}_\alpha\langle\mathbb{A}\rangle := \mathbb{C}\mathbb{A}^\alpha$.

Muni de cette graduation $\mathbb{C}\langle\mathbb{A}\rangle = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{A}}} \mathbb{C}_\alpha\langle\mathbb{A}\rangle$ est une $\mathbb{C}$-algèbre graduée. Maintenant, si l'alphabet $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ + \mathbb{A}^-$ est signé, on peut définir le bicaractère χ par la formule

$$\chi(\alpha,\beta) = \xi^{\begin{pmatrix} d_+(\alpha) & d_-(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_+(\alpha) \\ d_-(\beta) \end{pmatrix}}$$

avec $d_\epsilon(\alpha) = \sum_{a\in\mathbb{A}^\epsilon} \alpha(a)$ et $\xi \in \mathbb{C}$.

Le crochet

$$[P,Q] = PQ - \chi(\alpha,\beta)QP$$

défini pour $P \in \mathbb{C}_\alpha\langle\mathbb{A}\rangle$ et $Q \in \mathbb{C}_\beta\langle\mathbb{A}\rangle$ munit $\mathbb{C}\langle\mathbb{A}\rangle$ d'une structure de superalgèbre de Lie.

Remarques. 1) Des superalgèbres dont le bicaractère n'est ni trivial ($\chi = 1$), ni classique ($\chi = (-1)^{pq}$) peuvent se trouver dans [RW].

2) Nous allons voir que l'exemple précédent est en quelque mesure générique puisque tout bicaractère est le produit d'exponentielles de formes antisymétriques et d'un facteur $(-1)^\beta$ où β est symétrique. Ceci conduit à la question suivante :

QUESTION : Pour un monoïde donné M, peut-on connaître et construire tous les bicaractères ?

La réponse est positive et ca être rendue plus précise dans la section suivante.

4. Structure des bicaractères. Pour l'énoncer, nous aurons besoin de la notion de matrice admissible.

Définition. Soit F un sous-ensemble d'un groupe commutatif. Une matrice $C = [a_{gh}]_{g,h\in F}$ à valeurs dans K^* sera dite *admissible* si elle vérifie les trois conditions suivantes :[1]

$$\begin{cases} ng = 0 \implies (a_{gh})^n = 1, & (T) \\ a_{gh}a_{hg} = 1, & (A) \\ a_{gg} = \pm 1. & (D) \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant donner la structure des bicaractères.

Proposition [DDKM]. *Soit M un monoïde commutatif de type fini et $\phi : M \to \bar{M}$ le morphisme canonique dans le groupe librement engendré par M. Soit $\bar{M} = \bigoplus_{g\in F} \mathbb{Z}g$ une décomposition directe de $\bar{M}$ en sous-modules monogènes (F est alors finie). Soit enfin $C = [a_{gh}]_{g,h\in F}$ une matrice admissible. Alors*

i) *Pour tous $u, v \in M$, la quantité*

$$(*) \qquad \chi_C(u,v) = \prod_{g,h\in F} a_{gh}^{n_g m_h}$$

est indépendante des décompositions $\phi(u) = \sum_{g\in F} n_g g$ et $\phi(v) = \sum_{g\in F} m_h h$.

ii) $(*)$ *définit un bicaractère sur M.*

iii) *Tout bicaractère sur M peut s'obtenir ainsi.*

Preuve. i) Pout tout $g \in F$ soit $o(g)$ l'ordre de g. Si $\phi(u) = \sum_{g\in F} n'_g g$ est une seconde décomposition on a

$$\begin{aligned} n_g - n'_g &\in o(g)\mathbb{Z} \quad \text{si } o(g) < \infty, \\ &= 0 \qquad\quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Le fait que le second membre ait la même valeur selon les deux décompositions résulte alors de la condition (T) de la matrice admissible. On raisonne de même avec une double décomposition de v.

ii) Résulte des conditions (A) et (D).

iii) Si χ est un bicaractère donné, χ se factorise à travers ϕ. Soit $C = [\chi(u_g, u_h)]_{g,h\in F}$ avec $\chi(u_h) = h$. C est indépendante des représentants choisis et admissible. De plus $\chi = \chi_C$. □

On déduit aussitôt de cette paramétrisation la décomposition suivante.

Corollaire [DDKM]. *Soit K un corps de caractéristique différente de $2, 3$ et $\chi : M \times M \to K$ un bicaractère. Il existe alors une décomposition de χ,*

$$\chi = \chi_a \cdot (-1)^\beta,$$

[1] (T) est une condition de compatibilité avec la torsion, (A) la condition d'antisymétrie et (D) la condition diagonale $(bc4)$ toujours réalisée lorsque K est un corps.

où χ_a est alterné (i.e. $\chi_a(u,u) = 0$ pour tout[2] *$u \in M$) et $\beta : M \times M \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Preuve. Si C_1 et C_2 sont deux matrices admissibles leur produit de Hadamard est un matrice admissible et

$$\chi_{C_1 \odot C_2} = \chi_{C_1}\chi_{C_2}.$$

Soit $\chi = \chi_C$ un bicaractère avec $C = [a_{gh}]_{g,h\in F}$. Posons

$$\begin{aligned} a'_{gh} &= a_{gh} \quad \text{si } a_{gh} \neq a_{hg}, \\ &= 1 \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Il est clair que $C' = [a'_{gh}]_{g,h\in F}$ et $C'' = [a_{gh}/a'_{gh}]_{g,h\in F}$ sont admissibles et que $\chi = \chi_{C'}\chi_{C''}$. $\chi_{C'}$ est alterné par construction et $\chi_{C''}$ est symétrique, ce qui entraine qu'il est de la forme $(-1)^\beta$ où $\beta : M \times M \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une forme bilinéaire symétrique. □

Remarques. 1) La factorisation $\chi = \chi_a \cdot (-1)^\beta$ n'est en général pas unique comme le montre l'exemple suivant.

Considérons, sur $\mathbb{N}^2$ le bicaractère complexe $\chi = i^\phi$ ($i = \sqrt{-1}$) où avec $\mathrm{mat}(\phi) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ (on note $\mathrm{mat}(\phi)$ la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{N}^2$). On a alors deux décompositions $\chi = i^{\phi_1} \cdot (-1)^{\phi_2}$,

$$\mathrm{mat}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{mat}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou bien

$$\mathrm{mat}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{mat}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) La d'ecomposition $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_-$ avec

$$\mathcal{G}_\epsilon = \bigoplus_{\substack{\alpha \in M \\ \chi(\alpha,\alpha) = \epsilon 1}} \mathcal{G}_\alpha$$

ne dépend que de $(-1)^\beta$, et c'est seulement de cette décomposition que dépend la structure de module gradué de l'algèbre enveloppante.

Nous allons décire maintenant les objets libres et les algèbres enveloppantes.

5. Algèbres libres et enveloppantes. Soit $\mathbb{A}$ un alphabet, K un anneau tel que $2, 3 \notin K$ et $\chi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to K$ une application telle que l'on ait identiquement

$$\begin{cases} \chi(a,b)\chi(b,a) = 1, \\ \qquad \chi(a,a) = \pm 1. \end{cases}$$

[2]La seule nullité sur la diagonale de la matrice ne suffit pas à entrainer qu'un bicaractère soit alterné.

On cherche une solution du problème universel suivant.

(L) *Trouver un couple* $(j, \mathcal{L})$ *tel que*

1) $\mathcal{L}$ *est une superalgèbre* $\mathbb{N}^{\mathbb{A}}$*-graduée et* j *est une application* $\mathbb{A} \to \mathcal{L}$ *telle que* $a \in \mathbb{A} \Longrightarrow j(a) \in \mathcal{L}_{\epsilon_a}$*, où* ϵ_a *désigne l'image de* a *dans* $\mathbb{N}^{\mathbb{A}}$*.*

2) Toute application $g : \mathbb{A} \to \mathcal{G}$ *vérifiant la condition (1) ci-dessus se factorise* $g = \bar{g} \circ j$ *où* $\bar{g} : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$ *est un morphisme de superalgèbres.*

Comme dans le cas des algèbres de Lie (soit $\chi = 1$), la solution est donnée par la sous-algèbre engendrée par les lettres dans l'algèbre libre [Bah, ch. 2]. Nous allons décrire maintenant complètement cette construction.

On étend d'abord χ par linéarité en un bicaractère sur $\mathbb{N}^{\mathbb{A}}$. La formule

$$[P, Q] = PQ - \chi(\alpha, \beta)QP, \quad P \in K_\alpha\langle\mathbb{A}\rangle,\ Q \in K_\beta\langle\mathbb{A}\rangle,$$

munit $K\langle\mathbb{A}\rangle = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{A}}} K_\alpha\langle\mathbb{A}\rangle$ d'une structure de superalgèbre $\mathbb{N}^{\mathbb{A}}$-graduée. Alors la sous-algèbre de $K\langle\mathbb{A}\rangle$ engendrée par les lettres, $L_k^\chi(\mathbb{A})$ et l'injection canonique $j : \mathbb{A} \to L_K^\chi(\mathbb{A})$ forment une solution au problème universel (L).

Pour pouvoir calculer les caractères de GL_n et $\mathfrak{S}_n$ sur le sous-module ainsi défini, il faut résoudre le problème de sa stabilité. On peut déterminer les bicaractères qui sont compatibles avec ces changements de variables. Plus précisement on a le résultat suivant.

Proposition [DDKM]. *Soit* K *un corps* $(\mathrm{ch}(K) > 3)$ *et* $\mathbb{A}$*,* $L_k^\chi(\mathbb{A})$ *comme ci-dessus. Alors :*

Pour que $L_K^\chi(\mathbb{A})$ *soit stable pour l'action de* G $(= GL(K\mathbb{A}), \mathfrak{S}_{\mathbb{A}})$ *il faut et il suffit que* χ *soit un des bicaractères donnés par le tableau ci-dessous :*

Groupe	$\chi =$			
$\mathfrak{S}_{\mathbb{A}}$	1	$(-1)^{pq}$	$(-1)^{\lvert\alpha\odot\beta\rvert}$	$(-1)^{pq+\lvert\alpha\odot\beta\rvert}$
$GL(K\mathbb{A})$	1	$(-1)^{pq}$		

avec $|\alpha \odot \beta| = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \alpha(a)\beta(a)$*.*

Preuve. L_χ est un sous-module gradué. Soient a, b deux lettres. On a $(L_\chi)_{a+b}^\sigma = (L_\chi)_{\sigma(a)+\sigma(b)}$. On va d'abord montrer que, si $a \neq b$, alors $\chi(a, b) = \chi(b, a)$.

Supposons que L_χ soit stable par $\mathfrak{S}_{\mathbb{A}}$. Pour tout σ on a

$$[a, b]^\sigma = \sigma(a)\sigma(b) - \chi(a, b)\sigma(b)\sigma(a)$$

et

$$[\sigma(a), \sigma(b)]^\sigma = \sigma(a)\sigma(b) - \chi(\sigma(a), \sigma(b))\sigma(b)\sigma(a).$$

Mais, le fait que $(L_\chi)_{a+b}$ soit un sous espace vectoriel de dimension ≤ 1 entraine que

$$(*) \qquad \chi(a, b) = \chi(\sigma(a), \sigma(b)).$$

En particulier, on a $\chi(a, b) = \chi(b, a)$ et compte tenu de ce que K est un corps $\chi(a, b) \in \{1, -1\}$. Le bicaractère est donc de la forme $(-1)^\beta$ où $\beta : M \times M \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

est une forme bilinéaire invariante par le groupe sumétrique. Ceci montre que χ est de l'une des quatre formes de la première ligne. Pour la deuxième ligne, il est facile de voir que les deux bicaractères supplémentaires ne sont pas compatibles avec les changements de variables lináires. $\square$

Remarques. 1) Le caractère de la représentation de $GL(K\mathbb{A})$ sur $L_K^\chi(\mathbb{A})$ pour $\chi = (-1)^{pq}$ peut de déduire aisément de l'isomorphisme

$$K\langle\mathbb{A}\rangle \cong \mathcal{U}(L) \cong S(L^+) \otimes \Lambda(L^-),$$

où L désigne $L_K^\chi(\mathbb{A})$. Qui résulte de l'identité cyclotomique comme nous le verrons à la section suivante.

2) Le caractère de la représentation de $\mathfrak{S}_\mathbb{A}$ sur ce même module a été calculé par Molev et Tsalenko [MT].

6. Calcul de bases effectives et identité cyclotomique. Toutes les bases classiques[3] de l'algèbre de Lie libre (et de la superalgèbre) sont compatibles avec l'élimination de Lazard. Rappelons ici les outils de base de cette théorie. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{B} + \mathbb{Y}$ un alphabet. Il est immédiat [Lo] que

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}^*\mathbb{Y})^*\mathbb{B}^*.$$

En particulier, si $\mathbb{B} = \{b\}$, on a $\mathbb{A}^* = \big(\mathbb{B}^*(\mathbb{A} - b)\big)^* b^*$, ce qui revient à dire que tout mot w peut s'écrire de façon unique

$$w = b^{n_1}y_1b^{n_2}y_2\dots b^{n_k}y_kb^{n_{k+1}}, \quad y_i \neq b.$$

Il lui correspond le résultat d'élimination suivant dont la preuve se fait comme dans le cas classique par recomposition du produit smie-direct.

Théorème [DDKM]. *Soit K un anneau avec $2, 3 \in K^*$, les autres notations étant comme ci-dessus. Alors on a*

$$\begin{aligned} L_K^\chi(\mathbb{A}) &\cong K\cdot b \bowtie L_K^\chi(b^*(\mathbb{A}-b)) && \text{si } b\in\mathbb{A}^+,\\ &\cong (K\cdot b \oplus K\cdot[b,b]) \bowtie L_K^\chi(b^*(\mathbb{A}-b)) && \text{si } b\in\mathbb{A}^-,\end{aligned}$$

où $\mathbb{A}^\epsilon = \{a\in\mathbb{A} \mid \chi(a,a) = \epsilon 1\}$, l'isomorphisme étant donné par

$$\begin{cases} b \longrightarrow b,\\ [b,b] \longrightarrow [b,b],\\ b^k y \longrightarrow \underbrace{[b,[b,[\cdots[b,}_{k \text{ fois}}y]\cdots]]] = \mathrm{ad}_b^k(y).\end{cases}$$

Remarquons que ce procédé peut être répété. Avec des notations évidentes

$$\begin{aligned} L(\mathbb{A}) &= L_b \oplus L\big(b^*(\mathbb{A}-b)\big) && \dots \quad \text{choisir } t_1\in b^*(\mathbb{A}-b),\\ &= L_b\oplus L_{t_1}\oplus L(C_2) && \dots \quad \text{choisir } t_2 \in C_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &= \textstyle\bigoplus_{n=0}^\infty L_{t_n}\oplus L(C),\end{aligned}$$

avec $t_0 = b$. Si l'alphabet est fini, on peut choisir la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon $C = \emptyset$ (la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de Hall [Re]). Les monômes de Lie correspondant dans $L_K^\chi(\mathbb{A})$ forment alors une base (linéaire) de $L_K^\chi(\mathbb{A})$. On a donc le résultat suivant.

[3]Et même plus généralement les bases multihomogènes.

Proposition [DDKM]. *Soit $\mathcal{H} = (t_n)_{n\geq 0} = \mathcal{H}^+ + \mathcal{H}^-$ une suite de* HALL *dans $\mathbb{A}^*$, alors*

$$\mathcal{B} = \psi(t_i)_{t_i\in\mathcal{H}} \cup \big([\psi(t_i),\psi(t_i)]\big)_{t_i\in\mathcal{H}^-}$$

est une base linéaire de $L_K^\chi(\mathbb{A})$.

Remarques. 1) Le résultat précédent vaut plus généralement pour les bases de LAZARD–VIENNOT (famille qui englobe toutes les bases classiques connues) puisqu'une telle base coïncide *localement* avec une base obtenue par éliminations successives.[4]

2) Les bases de LYNDON ont été obtenues par SHTERN et MIKHALEV [Sh][Mi], les bases de HALL sont dues à MELANÇON [Me], ainsi que des récritures permettant de décomposer un mot sur la base de POINCARÉ–BIRKHOFF–WITT associée (cf. aussi [Re]).

Les suites de HALL sont des factorisations complètes de $\mathbb{A}^*$ et ceci permet de montrer l'isomorphisme annoncé en section 5. Soit $(t_i)_{i\geq 0}$ une telle suite. Alors [Lo]

$$\mathbb{A}^* = \prod_{i=0}^{\infty} t_i^* \quad \text{dans } \mathbb{Z}\langle\langle\mathbb{A}\rangle\rangle,$$

en passant à l'image commutative, ceci donne

$$\frac{1}{1-\mathbb{A}} = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-t_i},$$

et, avec $I^\epsilon = \{i\in\mathbb{N} \mid \chi(t_i,t_i) = \epsilon 1\}$ on obtient

$$\frac{1}{1-\mathbb{A}} = \prod_{i\in I^+}\frac{1}{1-t_i}\prod_{i\in I^-}\frac{1+t_i}{1-t_i^2} = \underbrace{\prod_{i\in I^+}\frac{1}{1-t_i}\prod_{i\in I^-}\frac{1}{1-t_i^2}}_{\text{base de } L^+}\ \underbrace{\prod_{i\in I^-}(1+t_i)}_{\text{base de } L^-}.$$

Conséquences. 1) $K\langle\mathbb{A}\rangle \cong \mathcal{U}(L) \cong S(L^+)\otimes\Lambda(L^-)$.

2) Comme conséquence du théorème de factorisation de SCHÜTZENBERGER appliqué à la factorisation complète $\mathbb{A}^* = \prod_{i=0}^{\infty} t_i^*$ on a les formules de WITT multihomogènes [Lo] :

$$l_\alpha = \#\{t_i \mid \mathrm{ev}(t_i) = \alpha\} = \frac{1}{|\alpha|}\sum_{d|\alpha}\nu(d)\frac{(|\alpha|/d)!}{(\alpha/d)!},$$

où μ est la fonction de MÖBIUS arithmétique.

Grâce à la construction des bases faites plus haut, on obtient d'abord que

$$l_\alpha = \dim L_K(\mathbb{A})_\alpha \quad (\text{pour } \chi = 1)$$

[4]Cependant une suite unique d'éliminations ne suffit pas en général pour obtenir toute la base.

puis

$$\begin{aligned}\dim L_K^\chi(\mathbb{A})_\alpha &= l_\alpha + l_{\alpha/2} && \text{si } \alpha/2 \text{ est négatif,}\\ &= l_\alpha && \text{sinon.}\end{aligned}$$

Ceci donne, en considérant l'action des matrices diagonales, le caractère de la représentation de $GL(V)$ sur L^+ et L^- (pour $\chi = (-1)^{pq}$),

$$\mathrm{ch}(L^+) = \sum_{n\geq 0} l_n + \sum_{n \text{ impair}} \psi^2(l_n),$$

$$\mathrm{ch}(L^-) = \sum_{n \text{ impair}} l_n.$$

7. Conclusion. Nous possédons maintenant une famille de structures qui englobe à la fois les algèbres et les superalgèbres de Lie classiques. Elles correspondent aux dérivations dont la formule de Leibniz comporte un facteur de commutation χ qui est à valeurs dans l'anneau de base. Nous savons complètement décrire la structure de ces facteurs, les objets libres et leurs caractères. Deux voies semblent dès lors prometteuses.

La première serait d'explorer la combinatoire de l'algèbre libre vue comme algèbre enveloppante de superalgèbres libres.

La seconde serait de généraliser la structure à des facteurs de commutation non commutatifs, puisqu'ils interviennent dans les formules de Leibniz d'opérateurs de base comme les différences divisées [LS].

References

[Ba] BAHTURIN Y.A., MIKHALEV A.A., PETROGRADSKY V.M., ZAICEV M.V., *Infinite dimensional Lie superalgebras*, W. de Gruyter, Berlin, 1992.

[Be] BEREZIN F.A., *Introduction to algebra and analysis with anticommuting variables*, MGU Moscou, 1983.

[DeW] DeWitt B., *Supermanifolds*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[DDKM] DÉSARMÉNIEN J., DUCHAMP G., KROB D., MELANÇON G., *Quelques remarques sur les super-algèbres de Lie libres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **318** (1994), 419–424.

[F] FREUND P.G.O., *Introduction to supersymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[K] KAC V.G., *Lie superalgebras*, Adv. in Math. **26** (1977), 8–96.

[LS] LASCOUX A., SCHÜTZENBERGER M.P., *Symmetrization operators on polynomial rings*, Funct. Anal. Appl. **21** (1987), 77–78.

[Lo] LOTHAIRE M., *Combinatorics on words*, Addison–Wesley, Reading, Mass., 1983.

[Me] MELANÇON G., *Réécritures dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre*, Publications du LACIM, no. 8, Université de Québec à Montréal, 1991.

[Mi] MIKHALEV A.A., *Free color Lie algebras*, Sov. Math. Dokl. **33** (1986), 136–139.

[MT] MOLEV A.I., TSALENKO L.M., *Representations of the symmetric group in the free Lie (super)algebra and in the space of harmonic polynomials*, Funct. Anal. Appl. **20**(2) (1986), 150–152.

[Ree] REE R., *Generalized Lie elements*, Can. J. Math. **12** (1960), 493–502.

[Re] REUTENAUER C., *Free Lie algebras*, Clarendon Press, New York, 1993.

[RW] RITTENBERG V., WYLER D., *Sequences of $Z_2 \oplus Z_2$ graded Lie algebras and superalgebras*, J. Math. Phys. **19** (1978), 4806–4811.

[S] SCHÜTZENBERGER M.P., *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreuil–Pisot, Année 1958–1959.

[Sc] SCHEUNERT M., *The theory of Lie superalgebras*, Lecture Notes in Math., vol. 716, Springer–Verlag, Berlin, 1979.

[Sh] SHTERN A.S., *Free Lie superalgebras*, Siberian Math. J. **27** (1986), 136–140.

[Vi] VIENNOT G., *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lecture Notes in Math., vol. 691, Springer–Verlag, Berlin, 1976.

L.I.R., Université de Rouen, Place E. Blondel, B.P. 118, 76134 Mont-Saint-Aignan Cedex, France