Sminaire Lotharingien de Combinatoire **28** (1992), Article B28i

UN q-ANALOGUE DES POLYNÔMES DE BESSEL

(résumé)

Serge Dulucq*

LaBRI,
Unité de Recherche Associé au C.N.R.S. n° 1304
Université de Bordeaux I

Résumé. The combinatorial model for the Bessel polynomials, introduced by Dulucq and Favreau [*IMACS Ann. Comput. Appl. Math.* **9** (1991), 243–249], allows us to define the q-Bessel polynomials. This model, based upon weighted involutions, leads to a combinatorial interpretation of the three-term recurrence relation and to an explicit formula for the n-th q-Bessel polynomial.

1. Introduction

Les polynômes de Bessel, ainsi nommés compte-tenu de leur relation avec les fonctions de Bessel, apparaissent comme solution de l'equation différentielle du second ordre [2, 7]

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (2x+2)\frac{dy}{dx} = n(n+1)y. \tag{1.1}$$

Cette famille de polynômes peut également être définie à partir de la récurrence à trois termes

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) = (2n+1)xy_n(x) + y_{n-1}(x), \\ y_0(x) = 1,\ y_1(x) = 1+x. \end{cases} \tag{1.2}$$

La valeur explicite de ces polynômes, en termes de la fonction hypergéométrique ${}_2F_0$, est

$$\begin{aligned} y_n(x) &= {}_2F_0(-n, n+1; \_; -x/2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans [3], nous avons proposé un modèle combinatoire pour cette famille de polynômes. Ce modèle nous a permis, non seulement de retrouver toutes les identités classiques (récurrence à trois termes (1.2), équation differentielle (1.1), équation de récurrence aux dérivées, identité exprimant la série génératrice), mais également d'obtenir une démonstration entièrement combinatoire de l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

---

* Avec le soutien du P.R.C. Mathématiques et Informatique.

Comme pour les polynômes de Hermite [1, 5, 6], ce modèle combinatoire nous permet de définir un q-analogue des polynômes de Bessel. Nous montrons alors qu'ils vérifient une récurrence à trois termes qui est un q-analogue de (1.2) et nous obtenons une formule explicite pour le $n^{\text{ième}}$ polynôme $y_n(x;q)$.

2. Un modèle combinatoire pour les q-polynômes de Bessel

Soit $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des involutions ayant exactement n *orbites*, où le terme orbite désigne les cycles de longueur 1 ou 2 de l'involution, c'est-à-dire les *points fixes* ou les *arêtes*, et notons $\mathcal{I}_{n,k}$ l'ensemble des involutions de $\mathcal{I}_n$ ayant k arêtes ($0 \le k \le n$).

Étant donnée une involution α de $\mathcal{I}_n$, nous définissons sa *valuation* $v(\alpha)$ par

$$v(\alpha) = x^{e(\alpha)} q^{s(\alpha)},$$

où

$$e(\alpha) = \text{nombre d'arêtes de l'involution } \alpha,$$

$$s(\alpha) = \sum_{\text{arêtes } a} s(a) + \sum_{\text{fixes } f} s(f),$$

et, pour une arête $a = (i,j)$,

$$s(a) = \big|\{k : i < k < j \text{ et } \alpha(k) < j\}\big|,$$

et, pour un point fixe $f = (f)$,

$$s(f) = \big|\{k : k < f \text{ et } \alpha(k) < f\}\big|.$$

Définition 2.1. Les q-analogues $y_n(x;q)$ des polynômes de Bessel sont définis par

$$y_n(x;q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_n} v(\alpha) \tag{2.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{n,k}} q^{s(\alpha)} x^k. \tag{2.2}$$

Théorème 2.2. *Les polynômes $y_n(x;q)$ vérifient la relation de récurrence à trois termes*

$$\begin{cases} y_{n+1}(x;q) = [2n+1]_q\, x y_n(x;q) + q^{2n-1} y_{n-1}(x;q), \\ y_0(x;q) = 1, \quad y-1(x;q) = 1+x, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ est le q-analogue usuel de l'entier n.

Théorème 2.3. *Le polynôme $y_n(x;q)$ est donné par la formule*

$$y_n(x;q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+k \\ n-k \end{bmatrix}_q [2k-1]_q!!\, q^{\binom{n-k}{2}} x^k, \tag{2.4}$$

où $\left[{n \atop k} \right]_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$ est le q-analogue du coefficient binômial, et $[2k-1]_q!! = [1]_q[3]_q[5]_q \cdots [2k-1]_q$ est le q-analogue du nombre d'involutions sans point fixe sur $2k$ points.

Références

[1] R. A. Askey and M. E. H. Ismail, *A generalization of ultraspherical polynomials*, in : Studies in pure mathematics, Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 55–78.

[2] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Mathematics and its Applications, vol. 13, Gordon and Breach Science Publ., New York, London, Paris, 1978.

[3] S. Dulucq and L. Favreau, *A combinatorial model for Bessel polynomials*, in : Orthogonal polynomials and their applications (Erice, 1990), C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux (eds.), IMACS Ann. Comput. Appl. Math., vol. 9, Baltzer, Basel, 1991, pp. 243–249.

[4] J. Désarménien, *Les q-analogues des polynômes d'Hermite*, Séminaire Lotharingien Combin. **8** (1984), Art. B08b, 6 pp.

[5] I. M. Gessel, *A q-analog of the exponential formula*, Discrete Math. **40** (1982), 69–80.

[6] M. E. H. Ismail, D. Stanton and X. Viennot, *The combinatorics of q-Hermite polynomials and the Askey–Wilson integral*, European J. Combin. **8** (1987), 379–392.

[7] H. L. Krall and O. Frink, *A new class of orthogonal polynomials : The Bessel polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 100–115.

LaBRI, Unité de Recherche Associé au C.N.R.S. n° 1304, Université de Bordeaux I