SUR LES POLYNÔMES DE CATALAN MULTIPLES

G. Kreweras

Paris VI

Une des définitions possibles des polynômes de Catalan multiples est la suivante : en appelant $c(x)$ la fonction génératrice des nombres de Catalan,

$$c(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots ,$$

le polynôme de Catalan k-uple $P(m_1, m_2, \ldots, m_k; u)$ est le coefficient du monôme $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_m^{m_m}$ dans le développement de

$$(1 - x_1 c(x_1) - x_2 c(x_2) - \cdots - x_k c(x_k))^{-u-1} .$$

Son degré en u est $m_1 + m_2 + \ldots m_k$.

Les polynômes de Catalan simples et doubles ($k = 1$ et $k = 2$) ont fait l'objet d'une étude détaillée, à paraître dans le "Journal Européen de Combinatoire". En particulier leurs zéros sont des entiers négatifs distincts.

Pour $k \geq 3$, on peut démontrer les propriétés suivantes :

1*) Les zéros de $P(m_1, m_2, \ldots, m_k; u)$ continuent d'être des réels négatifs distincts, mais ne sont plus nécessairement entiers.

2*) Si aucun des m_i n'est nul, les entiers -1, -2, … , $-k$ se trouvent parmi les zéros.

3*) Sous la même condition $m_1 m_2 \cdots m_k \neq 0$, on peut poser $m_i = r_i + 1$ et faire le changement de variables $v = -k - 1 - u$. Les $r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ zéros de $P(m_1, m_2, \ldots, m_k; u)$ autres que -1, -2, … , $-k$ sont alors donnés par ceux d'un polynôme $Q(r_1, r_2, \ldots, r_k; v)$ dont les coefficients se calculent par une règle de convolution simple.

4*) Les zéros du polynôme $Q(r_1, r_2, \ldots, r_k; v)$, dont le degré est $d = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$, sont non seulement réels et distincts, mais en outre appartiennent tous au segment $[0, 2d]$. Si l'on a de plus $r_1 > r_2 + r_3 + \cdots + r_k$, $r_1 - r_2 - r_3 - \cdots - r_k$ d'entre eux sont les entiers du segment $[d + 1, 2r_1]$.

5*) Dans le cas particulier où $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 1$, on peut poser $Q(1, 1, \ldots, 1; v) = Q_k(v)$. On a alors

$$Q_k(v) = \sum_{i=0}^{k} (-2)^i \binom{k}{i} (v)_{k-i},$$

avec $(v)_j = v(v-1)\cdots(v-j+1)$, et les $Q_k(v)$ se trouvent former une famille de polynômes orthogonaux dont la récurrence de Darboux–Christoffel est

$$Q_k(v) = (v-k-1)Q_{k-1}(v) - 2(k-1)Q_{k-2}(v),$$

avec $Q_0(v) = 1$ et $Q_1(v) = v-2$.

6*) *Exemple*: Les six zéros du polynôme de Catalan triple $P(2,2,2;u)$ sont

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4.510\ldots, \quad -6.710\ldots, \quad -9.778\ldots\ .$$