ORDNUNGEN NICHTKOMMUTATIVER RINGE

UDO HEBISCH UND WILFRIED LEX

ABSTRACT. The cardinalities of non-commutative finite rings are completely determined: there is a non-commutative ring of order n or such a ring with identity if and only if n is not square-free or cube-free, respectively.

Unter einem *Ring* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ soll hier ine Struktur mit binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ so verstanden werden, daß $(R, +)$ eine Abelsche Gruppe und $\cdot$ distributiv bezüglich $+$ ist. $\mathcal{R}$ heiße *assoziativ* beziehungsweise *kommutativ* im Falle der Assoziativität beziehungsweise Kommutativität von $(R, \cdot)$ und natürlich *nichtkommutativ* beziehungsweise *nichtassoziativ*, falls $\mathcal{R}$ nicht kommutativ beziehungsweise nicht assoziativ ist. — $\mathbb{N}$ stehe für die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Bekanntlich ist für jedes n aus $\mathbb{N}$ der Restklassenring der ganzen Zahlen modulo n ein kommutativer Ring der *Ordnung* n — d.h. ein Ring mit n Elementen —, sogar ein assoziativer mit Einselement; aber nichtkommutative Ringe, selbst nichtassoziative, sind, zumindest was die möglichen Ordnungen angeht, weit seltener:

Wie üblich nennen wir eine ganze Zahl n *quadratfrei* beziehungsweise *kubusfrei*, falls es kein t aus $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ mit $t^2 \mid n$ beziehungsweise $t^3 \mid n$ gibt wobei "$|$" für "teilt" stehe.

Betrachtet man die möglichen Zerlegungen der additiven Gruppe eines endlichen Ringes in direkte Summen zyklischer Gruppen und benutzt die Tatsache, daß jeder endliche Ring direktes Produkt von Ringen mit Primzahlpotenzordnungen ist (vgl. etwa [1], (I.1), S. 2), so gewinnt man den folgenden Satz.

Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann, und nur dann, einen nichtkommutativen, assoziativen Ring der Ordnung n beziehungsweise einen solchen mit Eins, wenn n nicht quadratfrei beziehungsweise nicht kubusfrei ist.*

Die Teilaussage, daß jeder assoziative Ring kubusfreier Ordnung mit Eins kommutativ ist, findet sich bereits in [1], (I.3), (c), S. 4. — Satz und Beweis bleiben gültig, falls "assoziativen" gestrichen wird. — Dieses Resultat ergab sich im Zusammenhang mit der Entwicklung eines Computerprogramms zur Klassifikation algebraischer Strukturen. — Eine ausführlichere englische Darstellung soll noch publiziert werden.

Literatur

[1] B. R. McDonald, *Finite Rings with Identity*, Marcel Dekker, New York, 1974.

Institut für Mathematik, Technische Universität Clausthal, Erzstrasse 1, D-38678 Clausthal–Zellerfeld

Institut für Informatik, Technische Universität Clausthal, Erzstrasse 1, D-38678 Clausthal–Zellerfeld