Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B23c (1990)

MARIAGES STABLES

PAR

DOMINIQUE DUMONT

1. L'agence matrimoniale honnête

L'agence matrimoniale que nous considérons est honnête dans le sens qu'elle prétend respecter les principes suivants :

1) l'information la plus large : tout adhérent a accès au fichier des adhérents de l'autre sexe, et peut les rencontrer.

2) la stabilité des couples : l'agence ne forme que des couples stables (contrairement à d'autres agences, celle-ci ne vit pas de l'instabilité des couples).

3) l'efficacité : tout adhérent est assuré de rencontrer au moins un adhérent de l'autre sexe avec lequel il peut former un couple stable (contrairement à d'autres agences, personne ne cotise en pure perte).

Notre objectif dans cette première partie, sera de démontrer qu'une telle agence matrimoniale honnête n'existe pas, plus précisément que le "système d'axiomes" constitué par les trois principes énoncés ci-dessus est contradictoire. A cet effet, nous allons d'abord leur donner un sens plus précis.

1.1. Position du problème. — Nous supposons que chaque adhérent classe ceux de l'autre sexe selon son ordre de préférences (il peut le faire d'après l'axiome d'information, et nous allons voir qu'il doit le faire pour satisfaire l'axiome de stabilité). Ainsi chaque garçon classe les filles selon un ordre total, et réciproquement. On obtient ainsi une *configuration de préférences.* En voici un exemple, avec n garçons et n filles (ici, $n = 3$) :

G_1 :	F_1	F_2	F_3	F_1 :	G_3	G_2	G_1
G_2 :	F_1	F_3	F_2	F_2 :	G_2	G_1	G_3
G_3 :	F_2	F_3	F_1	F_3 :	G_1	G_2	G_3

Configuration de préférences complètes P_1

On dit qu'on détermine une *solution* en mariant garçons et filles, donc en formant n couples.(*) Mais il existe deux catégories de solutions : les stables et les instables.

Une *solution instable* est une solution telle qu'il existe un garçon G et une fille F non mariés ensemble qui se préfèrent mutuellement à leur épouse et époux respectifs. On dit que (G, F) est une *cause d'infidélité* ou une *cause d'instabilité.*

Exemple : la solution $(G_1, F_1), (G_2, F_3), (G_3, F_2)$ est instable pour P_1, car (G_2, F_1) est une cause d'infidélité. En effet, G_2 préfère F_1 à son épouse F_3, et F_1 préfère G_2 à son époux G_1.

A l'inverse, une *solution stable* est une solution sans cause d'infidélité. Il suffit que chaque garçon constate que toute fille qu'il préfère à son épouse est mariée à un garçon qu'elle préfère à lui (il s'ensuit que la réciproque est vraie aussi).

Exemple : la solution $A = (G_1, F_2)(G_2, F_3)(G_3, F_1)$ est stable pour la configuration P_1. En effet, G_1 préfère F_1 à son épouse mais ce n'est pas réciproque, G_2 est dans la même situation, G_3 aurait préféré F_2 ou F_3 mais ce n'est pas réciproque. Il est clair qu'on ne trouve aucune cause d'infidélité.

Nous allons démontrer un peu plus loin qu'il existe toujours une solution stable, quelle que soit la configuration de préférences. Cet optimiste théorème d'existence semble a priori en contradiction avec la conclusion pessimiste annoncée plus haut. Il l'est en effet dans le cas très particulier que nous avons considéré ici, où d'une part il existe le même nombre d'adhérents pour chaque sexe, d'autre part chaque adhérent classe tous ceux de l'autre sexe, donc admet implicitement qu'il peut épouser chacun d'eux. Or ce “modèle idéal” ne reflète évidemment pas la réalité vécue. Nous allons donc nous situer dans un cadre plus général, celui des *configurations de préférences incomplètes.* En voici un exemple :

G_1 :	(F_5)	F_1	F_2	F_4		F_1 :	G_2	(G_4)	G_1	
G_2 :	F_2	(F_5)	F_1	F_3		F_2 :	G_1	G_2	G_3	
G_3 :	F_3	F_2	F_4	F_5	(F_1)	F_3 :	G_2	G_4	G_3	(G_1)
G_4 :	F_4	F_3	F_5			F_4 :	(G_2)	G_3	G_1	G_4
						F_5 :	G_3	G_4		

Configuration de préférences incomplètes P_2

(*) Le mot anglais est *matching*, son équivalent français habituel, le mot *couplage*, nous semble particulièrement malvenu dans le contexte et nous préférons donc parler de *solution*, celle-ci ne saurait être finale...

Comme on le voit, chaque adhérent ne classe qu'une partie de ceux (ou celles) de l'autre sexe, seulement ceux qu'il juge *acceptables.* On peut aussi considérer qu'il a classé tous ceux de l'autre sexe, comme dans le cas des préférences complètes, mais qu'il s'est également classé lui-même parmi eux, en ce sens qu'il préfère les acceptables à lui-même (c'est-à-dire à son célibat), mais qu'il préfère son célibat plutôt qu'à former un couple avec un(e) inacceptable, selon le schéma suivant :

$$G : \underbrace{F \ldots F}_{\text{acceptables}} \; G \; \underbrace{F \ldots F}_{\text{inacceptables}}$$

Dans la configuration P_2 ci-dessus, nous n'avons reproduit que les listes d'acceptables, pour alléger et parce que seules ces listes importent.

Dans le contexte d'une configuration de préférences incomplètes pour m garçons et n filles, une solution est une partition de l'ensemble des adhérents en k couples (G, F) et $m + n - 2k$ célibataires (G) et/ou (F), où $k \leq \min(m, n)$ (non nécessairement égal). Ceux et celles qui restent célibataires s'appellent les *laissés-pour-compte* de la solution.

Une solution est dite *irrationnelle* si elle contient un couple dont l'un des membres est jugé inacceptable par l'autre. On rationnalise une configuration de préférences en mettant entre parenthèses sur la liste de chaque adhérent ceux de ses acceptables qui le jugent, lui, inacceptable. C'est ainsi que dans l'exemple de la configuration P_2, nous voyons que G doit mettre entre parenthèses les sentiments qu'il éprouve pour F_5.

La définition d'une solution instable est inchangée, à cela près qu'un célibataire peut entrer dans une cause d'infidélité.

Exemple : la solution $(G_1, F_1)(G_2, F_2)(G_3, F_5)(G_4, F_4)(F_3)$ est instable, car (G_3, F_3) est une cause d'infidélité. (Notons en passant qu'une solution irrationnelle n'est qu'un cas particulier de solution instable.)

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le théorème d'existence fondateur de la théorie.

1.2. Théorème d'existence.

THÉORÈME (Gale-Shapley [5]). — *Quelle que soit la configuration de préférences P, il existe au moins une solution stable pour P.*

Démonstration. — La démonstration repose sur un algorithme de construction d'une solution stable que nous appellerons *algorithme des initiatives masculines.* Nous supposons que l'agence organise un bal au cours duquel tous les adhérents se retrouvent pour danser. Les garcons invitent les filles au cours de *mouvements* successifs.

Au premier mouvement, chaque garçon invite la fille qu'il préfère. Si une fille se trouve alors prise entre plusieurs feux, elle choisit pour danser celui qu'elle préfère parmi ceux qu'elle juge acceptables, et qui devient par le fait même son *prétendant*, tandis que les autres sont *rejetés* par la fille. Ces garçons, non prétendants à l'issue du premier mouvement, sont dits *libres*.

Au deuxième mouvement, chaque garçon libre invite la fille qui suit dans l'ordre de ses préférences, même si elle possède déjà un prétendant. Chaque fille choisit à nouveau celui qu'elle préfère entre ceux qui l'invitent et son éventuel prétendant, et désigne ainsi un nouveau prétendant, les autres étant rendus à leur liberté.

Et ainsi de suite... L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'y a plus de garçons libres (ce qui se produit au bout d'un nombre fini de mouvements, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de garçons, dont les listes de filles acceptables sont de longueurs finies). On marie alors chaque fille avec son prétendant. Reste célibataire tout garçon qui s'est fait rejeter par toutes les filles qu'il juge acceptables, reste célibataire aussi toute fille qui n'a été invitée par aucun des garçons qu'elle juge acceptables. Nous notons Masc la solution ainsi définie.

Montrons que Masc est une solution stable. Soit G un garçon quelconque, et F une fille qu'il préfère à son épouse (ou à son célibat, dans le cas où Masc le désigne comme célibataire). Il est clair que F l'a rejeté au cours de l'algorithme, puisqu'il a invité toutes les filles dans l'ordre décroissant de ses préférences. Elle l'a rejeté au profit d'un certain G' qu'elle préfère à G, or son époux à l'issue de l'algorithme est soit G', soit un autre qu'elle aime encore plus, car les prétendants qui se sont succédés auprès d'elle allaient dans l'ordre croissant de ses préférences. Il est donc exclu qu'elle préfère G à son époux, autrement dit (G, F) n'est pas une cause d'infidélité. Par conséquent, la solution Masc est stable. $\square$

Voyons par exemple ce que donne l'algorithme des initiatives masculines sur la configuration P_1 : au premier mouvement, G_1 et G_2 invitent F_1, qui choisit G_2 et rejette G_1, tandis que G_3 invite F_2. Au deuxième mouvement, le garçon libre G_1 invite F_2, laquelle le préfère au détriment de G_3. Au troisième mouvement, celui-ci se console avec F_3. D'où le résultat, en tête du tableau suivant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Masc}(P_1) &= (G_1, F_2), (G_2, F_1), (G_3, F_3)\\ A &= (G_1, F_2), (G_2, F_3), (G_3, F_1)\\ \mathrm{Fem}(P_1) &= (G_1, F_3), (G_2, F_2), (G_3, F_1)\end{aligned}$$

En dessous de Masc, nous avons fait figurer la solution A proposée en début d'article comme exemple de solution stable pour P_1, puis la solution Fem qui résulte de manière analogue (en un seul mouvement) d'un algorithme des initiatives féminines où les rôles sont renversés. Ainsi nous avons sur cet exemple, parmi les $3! = 6$ solutions possibles en trois couples (les solutions avec célibataires sont évidemment instables, puisque les préférences sont complètes), trois solutions stables, et il est facile de vérifier que ce sont les seules.

Quelle solution stable choisir lorsque plusieurs se présentent à nous ? Sur cet exemple nous pouvons constater que des conflits entre les sexes apparaissent dès qu'on aborde cette question, en l'occurrence les garçons préfèrent Masc, les filles Fem (alors que pour les garçons c'est la pire des solutions envisageables), et A occupe une position intermédiaire. Nous allons voir que cette situation de désaccord est générale, sauf si Masc = Fem, ce qui peut se produire.

Nous montrerons au paragraphe 5 que les garçons préfèrent Masc (et les filles Fem) à toute autre solution stable, selon le théorème suivant :

THÉORÈME d'optimalité (Gale-Shapley). — *Soit une configuration de préférences P et soit* Masc(P) *la solution correspondante. Alors tout garcon est marié dans* Masc(P) *à la fille qu'il préfère parmi toutes celles qu'il épouserait selon les diverses solutions stables pour la configuration P.*

1.3. Désaccords conjugaux. Laissés-pour-compte. — Nous allons à présent aborder deux théorèmes pessimistes. Commençons par établir que si A et B sont deux solutions stables pour une configuration de préférences P (complète ou incomplète), alors deux époux ne sont jamais d'accord sur la préférence à accorder à l'une ou l'autre de ces deux solutions, sauf lorsque cela leur est indifférent à tous deux parce qu'ils sont mariés de la même manière dans les deux solutions. Lorsque nous dirons qu'un conjoint *préfère* A à B, nous sous-entendrons *strictement* (il n'est pas marié de la même manière selon les deux solutions et préfère son conjoint dans A à son conjoint dans B).

THÉORÈME des désaccords conjugaux. — *Soient A et B deux solutions stables pour une configuration de préférences P, et soit G un garçon qui préfère A. Alors il est marié dans A et son épouse F dans A préfère B. En outre il est aussi marié dans B et son épouse F' dans B préfère également B.*

Démonstration. — Il est évident que G est marié dans A. Si G et F préféraient tous deux A, ils seraient une cause d'infidélité pour B, où ils ne sont pas mariés, mais B est stable. Donc F préfère B.

Désignons par $\Gamma(A)$ l'ensemble des garçons qui préfèrent A et par $\Phi(B)$ l'ensemble des filles qui préfèrent B. Il résulte de ce qui précède que le mariage dans A est une application injective de $\Gamma(A)$ dans $\Phi(B)$. Pour une raison symétrique, le mariage dans B est une application injective de $\Phi(B)$ dans $\Gamma(A)$ (sinon, c'est A qui serait instable). Par conséquent les deux ensembles $\Gamma(A)$ et $\Phi(B)$ ont même cardinal et les deux applications sont en fait des bijections. Par suite G est bien marié dans B, et avec une fille de $\Phi(B)$, ce qui achève la démonstration du théorème. ∎

THÉORÈME des laissés-pour-compte (Gale-Sotomayor [6]). — *Soit P une configuration de préférences incomplètes, l'ensemble des laissés-pour-compte (c'est-à-dire des non marié(e)s dans une solution) ne dépend pas de la solution stable choisie.*

Démonstration. — En effet, supposons que G soit laissé-pour-compte dans la solution stable B, et soit A une autre solution stable quelconque. Si G était marié dans A il préférerait A à B, mais nous venons de voir qu'il serait également marié dans B ce qui est contradictoire. Donc G est exclu de toute solution stable. Le même raisonnement s'applique symétriquement à une fille F. ∎

Exemple : dans le cas de la configuration incomplète P_2, les quatre solutions stables (dont la liste sera donnée au paragraphe suivant) désignent la même laissée-pour-compte, F_5.

Le théorème des laissés-pour-compte montre bien que le troisième axiome de l'agence matrimoniale honnête est en contradiction avec les deux autres. Deux remèdes sont envisagés en pratique : soit on fait une entorse à l'axiome d'information, en privilégiant dans les rencontres certains clients au détriment d'autres, soit on fait patienter en attendant de nouveaux adhérents de l'autre sexe.

1.4. Treillis des solutions stables. — Une configuration de préférences complètes ou incomplètes P étant donnée, il existe un certain ensemble de solutions stables. Nous avons vu que chaque adhérent (garçon ou fille) munit cet ensemble d'une relation d'ordre partielle, celle de ses préférences entre les solutions. Considérons la relation d'ordre partielle de *préférence masculine,* où l'on dit que A est preférée par les garçons à B si et seulement si chacun d'eux soit préfère A à B, soit est indifférent (autrement dit $\Gamma(B)$ est vide). Bien entendu d'après le théorème des désaccords conjugaux B est preférée par les filles à A, car $\Phi(A)$ est vide. Cette relation d'ordre est partielle car il peut arriver que $\Gamma(A)$ et $\Gamma(B)$ soient simultanément non vides. C'est le cas plus loin dans l'exemple de P_2, contrairement au cas de P_1, où l'ordre entre les trois solutions stables était total.

THÉORÈME (Conway). — *La relation d'ordre de préférence masculine définit une structure de treillis sur l'ensemble des solutions stables pour une configuration P donnée.*

Démonstration. — En effet, soient A et B deux solutions stables quelconques. Désignons par C la solution qui consiste à attribuer à chaque garçon celle qu'il préfère entre ses deux épouses selon A et selon B.

Montrons d'abord qu'on définit bien ainsi une solution, c'est-à-dire que deux garçons G et G' ne risquent pas de se voir attribuer la même fille F. Si cela était, celle-ci serait par exemple l'épouse de G dans A et de G' dans B. Alors G préférerait A, et G' préférerait B, elle devrait donc être en désaccord avec tous les deux sur la préférence à accorder entre les deux solutions, ce qui est absurde. Donc C est bien une solution. Notons en passant que C consiste à faire épouser à chaque fille le garçon qu'elle aime le moins entre ses époux selon A et B.

Montrons que C est stable. Soit G un garçon quelconque, F une fille qu'il préfère à son épouse dans C, autrement dit à ses deux épouses dans A et dans B. Mais nous savons que F préfère son époux dans A à G, car A est stable, et elle préfère également son époux dans B à G, car B est stable. Or son époux dans C est l'un d'eux, celui des deux qu'elle aime le moins mais qu'elle préfère quand même à G. Donc C est stable.

On désigne cette solution C par $\sup(A,B)$ (sup pour les garçons, bien sûr), on définit de la même manière une solution $\inf(A,B)$, et on vérifie sans difficulté que l'ensemble des solutions stables muni de ce sup et de cet inf est un treillis distributif.

Exemple : voici le treillis des quatre solutions stables de P_2, où Masc $=$ $\sup(A,B)$ et Fem $= \inf(A,B)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Masc} = (G_1,F_1)(G_2,F_2)(G_3,F_3)(G_4,F_4)(F_5) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A = (G_1,F_2)(G_2,F_1)(G_3,F_3)(G_4,F_4)(F_5) \arrow[dr, dash] & & B = (G_1,F_1)(G_2,F_2)(G_3,F_4)(G_4,F_3)(F_5) \arrow[dl, dash] \\
 & \text{Fem} = (G_1,F_2)(G_2,F_1)(G_3,F_4)(G_4,F_3)(F_5) &
\end{tikzcd}
$$

Pour en revenir au cas général, le treillis étant fini, il existe toujours une solution maximum Max, et on peut reformuler le théorème d'optimalité annoncé plus haut sous la forme suivante :

$$\text{Max} = \text{Masc}.$$

Nous démontrerons ce théorème comme corollaire d'un résultat plus précis dû à Hwang, résultat qui sera l'outil central pour comprendre l'inefficacité du mensonge masculin.

1.5. Infidélité de l'épouse d'un revendicateur. — Soit P une configuration de préférences (complète ou non), Masc la solution stable issue de l'algorithme des initiatives masculines, et A une autre solution rationnelle. Un garçon R est dit revendicateur de A s'il préfère cette solution à *Masc*, parce qu'il est marié dans A à une fille qu'il préfère à son épouse selon Masc. On désigne par $R(A)$ l'ensemble des revendicateurs de A.

Une autre formulation du théorème d'optimalité consiste à dire que si $R(A)$ est non vide, alors A est instable. On peut cependant donner un résultat plus précis.

Théorème (Hwang [2]). — *Soit A une solution rationnelle distincte de* Masc. *Si l'ensemble $R(A)$ des revendicateurs de A est non vide, alors il existe également des non revendicateurs et l'un d'eux, G, constitue une cause d'infidélité pour A avec l'épouse F d'un revendicateur.*

Démonstration. — Notons d'abord que l'hypothèse que A est rationnelle implique que les revendicateurs sont jugés acceptables par leurs épouses dans A, et cela implique qu'elles sont également mariées dans Masc sinon Masc serait instable.

Il y a un cas où le théorème est évident, c'est quand il existe une fille F qui est l'épouse d'un revendicateur R dans A et l'épouse d'un non revendicateur G dans Masc. En effet il est clair que (G, F) est une cause d'infidélité : d'une part, G ne revendique pas A, et préfère donc F à son épouse (ou à son célibat) selon A, d'autre part F préfère G à R, sinon (R, F) serait une cause d'infidélité pour Masc, qui est stable.

Supposons à présent qu'une telle fille n'existe pas. Il en résulte que l'ensemble des épouses des revendicateurs de A est le même ensemble dans les deux solutions, et que ceux-ci revendiquent "simplement" de pouvoir échanger leurs épouses entre eux !

Reportons-nous au déroulement de l'algorithme des initiatives masculines et considérons le *dernier mouvement* au cours duquel on trouve un revendicateur invitant une fille. Soit R ce revendicateur et F cette fille. Il est clair que R épouse F à l'issue de Masc, sinon ce ne serait pas le dernier mouvement de ce type puisque nous savons que de toute manière R se marie à l'issue de Masc. Donc R n'est pas le revendicateur qui revendique F comme épouse dans A, sinon il serait indifférent et non revendicateur. Celui qui la revendique dans A est un certain R', qui épouse une autre fille F' à l'issue de Masc, mais qui préfère F à cette F' et qui par conséquent s'est fait rejeter par F au cours de l'algorithme. De cela on déduit que

F avait un prétendant à l'arrivée de R. Appelons G ce prétendant qui s'est fait évincer par R et montrons que (G, F) est la cause d'infidélité annoncée.

En fait, le prétendant G n'est pas R', ni aucun autre revendicateur, sinon ce revendicateur reviendrait inviter ultérieurement dans le cours de l'algorithme, ce qui est exclu puique c'est au cours du *dernier mouvement d'invitation par un revendicateur* que G s'est fait supplanter. G est par conséquent un non revendicateur (il en existe donc). Puisque G est l'avant-dernier prétendant de F, elle le préfère à R', qu'elle a rejeté antérieurement et qui veut être son époux dans A. D'autre part G préfère F à son épouse dans Masc (ou à son célibat) puisque F l'a rejeté. Enfin, G aime au moins autant sa situation dans Masc (épouse ou célibat) à sa situation dans A puisqu'il est non revendicateur. Donc (G, F) est une cause d'infidélité pour A. $\square$

En même temps nous avons donc démontré le théorème d'optimalité, pour lequel il existe des démonstrations plus directes (*cf.* [4], [5], [7]) mais aucune vraiment facile. Cependant le principal intérêt du théorème de Hwang est qu'il permet d'obtenir immédiatement le théorème de Dubins et Freedman (*cf.* la fin du présent article) dont la preuve originale était longue et technique.

2. Mensonges et manipulations

2.1. Prévoir le destin de chacun. — Nous supposons à présent que l'agence matrimoniale est dirigée par une dame plutôt conformiste qui considère comme allant de soi qu'on doit laisser toutes les initiatives aux garçons, et que par conséquent dès que la configuration de préférences P est connue, on détermine la solution stable qui lui correspond et qui n'est autre que Masc(P), laquelle se dégagera tout naturellement au cours du bal qu'elle compte organiser, au cours duquel les "convenances" exigent que ce soient les garcons qui invitent.

Comme cette dame est curieuse de nature, elle exige de tous ses adhérents qu'ils expédient préalablement leurs listes de préférences (qu'ils auront établies après consultations du fichier et des rencontres au siège de l'agence, car nous supposons que la directrice respecte au moins l'axiome d'information). Ainsi, prenant connaissance de la configuration de préférences, elle pourra prévoir le déroulement de l'algorithme et connaitra avant tout le monde le destin de chacun.

Le prix de cette curiosité, c'est évidemment le risque d'indiscrétion. On peut imaginer que la secrétaire de l'agence communique tout ou partie de la configuration des préférences à l'un(e) des adhérent(e)s, permettant ainsi que des manipulations faussent le résultat.

2.2. Manipulations féminines. — Supposons par exemple que nous ayons trois garçons et trois filles et la configuration de préférences complètes que voici :

G_1 :	F_1	F_2	F_3	F_1 :	F_2	G_1	G_3
G_2 :	F_2	F_1	F_3	F_2 :	G_1	G_2	G_3
G_3 :	F_2	F_3	F_1	F_3 :	G_3	G_1	G_2

Configuration des vraies préférences P_3

Supposons que F_2 tarde à expédier sa liste, et se fasse discrètement communiquer par la secrétaire les listes de préférences des autres adhérents. Elle est en mesure de prévoir le déroulement de l'algorithme des initiatives masculines : au premier mouvement, G_1 devient prétendant de F_1, tandis que G_2 et G_3 sont en concurrence auprès de F_2 qui choisit G_2 ; au deuxième mouvement, G_3 revient auprès de F_3. D 'où :

$$\mathrm{Masc}(P_3) = (G_1, F_1)(G_2, F_2)(G_3, F_3).$$

C'est pourquoi F_2 décide de mentir sur ses préférences, et d'agir comme si elle préférait G_3 à G_2. D'où la configuration des fausses préférences que voici :

G_1 :	F_1	F_2	F_3	F_1 :	G_2	G_1	G_3
G_2 :	F_2	F_1	F_3	F_2 :	G_1	G_3	G_2
G_3 :	F_2	F_3	F_1	F_3 :	G_3	G_1	G_2

Configuration des fausses préférences P_4

Voici en effet le déroulement de l'algorithme sur la configuration P_4 : au premier mouvement, G_1 devient prétendant de F_1, tandis que G_2 et G_3 sont en concurrence auprès de F_2 qui choisit cette fois G_3 en mentant sur sa préférence. Au deuxième mouvement, G_2 invite F_1, qui le préfère et rejette donc G_1. Au troisième mouvement, G_1 vient auprès de F_2 qui triomphe car elle obtient enfin celui qu'elle préfère. Elle rejette G_3 qui se consolera au quatrième mouvement avec F_3. Résultat :

$$\mathrm{Masc}(P_4) = (G_1, F_2)(G_2, F_1)(G_3, F_3).$$

Autrement dit F_2 obtient par son mensonge la solution optimale pour les filles, qui n'est autre que $\mathrm{Fem}(P_3)$ et qui est donc stable, même pour les vraies préférences.

Certes, on peut voir que ce type de manipulation féminine n'est pas toujours possible avec une configuration complète. Cependant, dans le cas où l'agence autorise les configurations de préférences incomplètes (ce qui est bien la moindre des choses, le mariage forcé n'étant guère en vogue de nos jours), il est facile de voir que toute configuration est manipulable par les filles. Si les filles connaissent les préférences des garcons (et font patienter pour faire connaître les leurs), elles peuvent se réunir, se dévoiler clandestinement leurs vraies préférences, étudier la configuration des vraies préférences P, déterminer Fem(P) par l'algorithme des initiatives féminines. Puis elles décrètent inacceptable tout garçon qui vient après celui qui leur est attribué selon Fem(P). Il est clair que sur la configuration incomplète P' ainsi modifiée, qu'elles présenteront à l'agence, on a, inévitablement, $\mathrm{Masc}(P') = \mathrm{Fem}(P') = \mathrm{Fem}(P)$.

2.3. Impuissance du mensonge masculin. — On pourrait penser qu'un garçon, ou une coalition de garcons, peut en faire autant, et obtenir une fille préférable en mentant sur ses (ou leurs) préférences. Or nous pouvons déjà prévoir une première faiblesse du mensonge masculin, qui est que de toute manière en prétendant "améliorer" encore la solution Masc, qui est la solution optimale pour eux, il ne peut conduire qu'à des solutions instables pour les vraies préférences, or ce défaut majeur n'affectait nullement le mensonge féminin comme nous venons de le voir.

On peut cependant imaginer le cas d'un revendicateur indifférent au fait que la solution altérée par son mensonge soit instable, d'autant que rien ne lui prouve que c'est son épouse qui sera infidèle (le théorème de Hwang n'exclut pas que ce soit l'épouse d'un autre revendicateur). Les tentatives manipulatoires de ce genre d'individu seront ruinées par le théorème suivant.

Théorème (Dubins-Freedman [3]). — *Si un garçon ment sur ses préférences au cours de l'algorithme des initiatives masculines, il n'obtiendra pas une fille préférable à celle qu'il aurait obtenu en agissant selon ses vraies préférences.*

Démonstration. — Soit P la configuration des vraies préférences, P' une configuration modifiée qui ne diffère de P que par la liste des préférences d'un garçon R, que nous désignons ainsi parce que nous supposons qu'il préfère Masc(P') à Masc(P).

D'après le théorème de Hwang, $A = \mathrm{Masc}(P')$ est instable pour P, la cause d'instabilité étant un couple (G, F), où G est distinct de R. Or les préférences de G et de F selon P' sont rigoureusement les mêmes que selon P, donc la solution A est également instable pour P', ce qui est absurde puisque c'est Masc(P'). $\square$

Ce théorème illustre en quel sens on peut dire qu'on trouve d'un côté ceux qui prétendent décider, et de l'autre, celles qui peuvent manipuler.

3. Problèmes de recherche

On peut compliquer ces problèmes de manipulation, liés à la théorie des jeux, par exemple en introduisant des dots, dans un sens ou dans l'autre, qui font varier la configuration de préférences. Citons à ce sujet les travaux de Gabrielle Demange [1].

Sur le strict plan combinatoire et algorithmique, beaucoup d'aspects du sujet restent méconnus. On trouvera une liste de problèmes de recherche sur les mariages stables dans le livre de Knuth [7]. En voici quelques-uns :

(1) Existe-t-il des “algorithmes d'initiatives mixtes” permettant d'engendrer les solutions stables intermédiaires, ou n'a-t-on pas d'autre ressource pour en dresser la liste que de tester toutes les solutions, en cherchant systématiquement pour chacune d'elle une éventuelle cause d'infidélité ?

(2) Avec n garçons et n filles, comment fabriquer une configuration de préférences complètes qui maximise le nombre de solutions stables ? Ce nombre maximal est 3 pour $n = 3$, très probablement 10 pour $n = 4$ (*cf.* [4], [7]). Quelle est la croissance de ce nombre maximal en fonction de n ? On sait montrer qu'elle est au moins exponentielle [7], peut-on espérer qu'elle soit de l'ordre de $n!$ (nombre total de solutions) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Demange, D. Gale. — The strategy structure of two-sided matching markets, *Econometrica*, vol. **53**, 1985, p. 873-878.
[2] G. Demange, M. Sotomayor. — A further note on the stable matching problem, *Disc. Applied Math.*, vol. **16**, 1987, p. 217-222.
[3] L.E.Dubins, D.Freedman. — Macchiavelli and the Gale-Shapley Algorithm, *Amer. Math. Monthly*, vol. **88**, 1981, p. 485-494.
[4] D.Dumont. — Les mariages stables, Pour la Science, oct.1989.
[5] D.Gale, L.S.Shapley. — College Admission and the Stability of Marriage, *Amer. Math. Monthly*, vol. **69**, 1962, p. 9-14.
[6] D.Gale, M.Sotomayor. — Ms Macchiavelli and the stable matching problem, *Amer. Math. Monthly*, vol. **92**, 1985, p. 61-268.
[7] D.Knuth. — *Mariages stables.* — Presses de l'Université de Montréal—1976.

Dominique Dumont,
Département de mathématique,
Université Louis Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg.