Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B23a, 1990, 28 pp.
[Formerly : Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1993, 460/S–23, p. 5–37.]

NOUVELLES AVENTURES AU PAYS DES q-ANALOGUES (ÉQUATION DE YANG-BAXTER)

PAR

Pierre CARTIER (*)

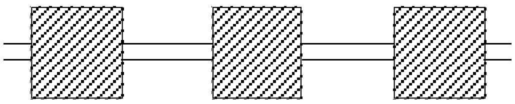
Introduction. — La Mécanique Statistique des systèmes atomiques (cristaux, ...) offre un abondant réservoir de problèmes combinatoires. La difficulté essentielle est le calcul exact, ou asymptotique, des sommes compliquées qu'on appelle la *fonction de partition de Boltzmann et Gibbs*. Il y a peu de cas où l'on sache faire les calculs complets; voici deux cas notables :

le modèle d'Ising à deux dimensions (Onsager, 1940);

le modèle de la glace (Lieb, 1967).

Ces deux modèles se réfèrent à des situations à deux dimensions.

Nous nous proposons, dans ces exposés, de donner une introduction aux problèmes combinatoires liés au modèle de la glace. On y voit tout d'abord une extension à deux dimensions du calcul matriciel. Ce dernier est adapté par exemple à l'étude des circuits électriques en série

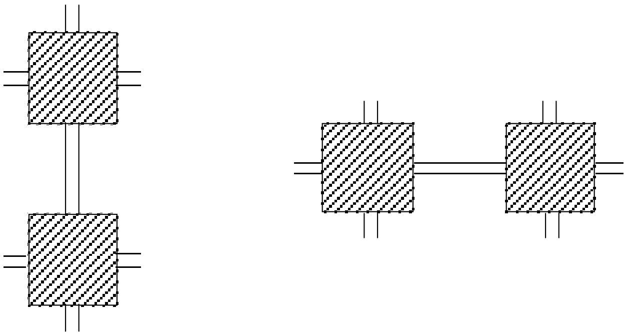


qui amène à l'étude des puissances d'une matrice. Dans notre cas, on a deux types de composition, horizontale et verticale, comme le suggèrent les figures ci-dessous. Une telle interprétation graphique du calcul tensoriel a été introduite par l'imaginatif Roger Penrose.

La méthode de Lieb a été simplifiée par Baxter [2] qui a réalisé l'importance de la relation, dite de Yang-Baxter, et qui s'écrit

$$T^{1,2}T^{2,3}T^{1,2} = T^{2,3}T^{1,2}T^{2,3}.$$

(*) Notes rédigées par E. Roblet, élève à l'École Normale Supérieure de Paris, d'après trois exposés de Pierre Cartier au Séminaire Lotharingien de Combinatoire des 8, 9 et 10 mai 1989 à Bayreuth.



C'est à cet endroit que s'insinue le *q-calcul*. Une solution élémentaire de l'équation de Yang-Baxter est fournie par un opérateur de symétrie $T(1) : x \otimes y \to y \otimes x$ dans un produit tensoriel $V \otimes V$. Le modèle de la glace suggère une déformation $T(q)$ de $T(1)$ qui satisfait à l'équation de Yang-Baxter. Il s'agit de trouver les valeurs propres d'un opérateur R déduit de $T(q)$ et opérant dans l'espace tensoriel $V_N = V \otimes \cdots \otimes V$ (N facteurs). Comme V est ici de dimension 2, on peut chercher à utiliser une q-déformation du calcul classique de Clebsch-Gordan.

Dans ces exposés, nous avons donné une idée des méthodes de la Mécanique Statistique, explicité les liens entre l'équation de Yang-Baxter, l'algèbre de Hecke et le groupe des tresses, et donné une introduction à la q-déformation du calcul tensoriel. On verra en particulier apparaître de manière naturelle les *coefficients q-binomiaux de Gauss*, et une algèbre de polynômes non commutatifs en deux variables x, y telles que $yx = qxy$. Pour aller jusqu'à la solution du problème de la glace, il aurait fallu introduire les groupes quantiques, qui sont des q-déformations des groupes de symétrie naturels.

Remerciements. — Je remercie les organisateurs du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, qui m'ont donné l'occasion de faire cette série d'exposés dans le cadre très inspirant de la Franconie. Je remercie aussi mes auditeurs à l'École Normale Supérieure, qui ont servi de cobayes pour la mise au point de ce cours. Plus particulièrement, je remercie Emmanuel Roblet pour l'intelligence et le soin apportés à la rédaction, la mise au point et la typographie de ces notes.

1. Introduction à la mécanique statistique discrète. — Les modèles discrets de la mécanique statistique étudient, en fonction de la température, les configurations d'un système fini de "particules" (atomes, molécules, ...) existant dans différents états. On s'intéresse également au comportement asymptotique de ces modèles, lorsque le nombre de "particules" tend vers l'infini, ou lorsque la température tend vers zéro ou vers l'infini. On utilisera les notations et les définitions suivantes :

Λ est l'ensemble des *sites* occupés par les atomes et, pour $x \in \Lambda$, S_x est l'ensemble des états possibles de la particule placée en x ;

$\Omega = \prod_{x\in\Lambda} S_x$ désigne l'ensemble des *configurations*. Une configuration est donc une fonction ω qui donne, pour chaque site x, l'état $\omega_x \in S_x$ de la particule en x ;

$H : \Omega \to \mathbb{R}$ est le *hamiltonien* du système ; cette fonction est déduite de considérations physiques et $H(\omega)$ représente l'énergie de la configuration ω ;

$\mu_0 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est la *loi a priori*; on n'impose pas la condition de normalisation

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mu_0(\omega) = 1.$$

Plutôt que la *température* T, on utilise la variable $\beta = 1/kT$, où k est la constante de Boltzmann.

On note Z la *fonction de partition* du modèle ; son calcul exact ou son évaluation asymptotique est essentielle, car elle permet de calculer toutes les grandeurs thermodynamiques usuelles :

$$Z(\beta) = \sum_{\omega\in\Omega} e^{-\beta H(\omega)}\mu_0(\omega).$$

On définit enfin la valeur moyenne thermique d'une fonction $A : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\langle A\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\omega\in\Omega} A(\omega)e^{-\beta H(\omega)}\mu_0(\omega).$$

C'est en fait l'intégrale de la fonction A sur Ω par rapport à la loi de probabilité μ définie par

$$\mu(\omega) = \frac{e^{-\beta H(\omega)}\mu_0(\omega)}{Z(\beta)},$$

et appelée *loi canonique de Gibbs*.

Étudions les limites de la valeur moyenne de A.

1) Dans le cas où la température tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque β tend vers zéro, on a :

$$\langle A\rangle \to \frac{\sum_{\omega\in\Omega} A(\omega)\mu_0(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega} \mu_0(\omega)}.$$

La loi de probabilité des configurations à très haute température est donc de la forme $\mu_\infty(\omega) = c_\infty\mu(\omega)$ où la constante c_∞ est choisie pour qu'on ait la normalisation $\sum_{\omega\in\Omega} \mu_\infty(\omega) = 1$.

2) Notons Ω_0 le sous-ensemble de Ω constitué des configurations où H est minimal et remarquons que la valeur moyenne de A est invariante lorsqu'on ajoute à H une constante ; on peut donc supposer que $\min\{H(\omega), \omega \in \Omega\} = 0$. L'ensemble Ω_0 s'interprète physiquement comme l'ensemble des états stables à basse température. On montre alors facilement que, dans le cas où la température tend vers zéro par valeurs positives, c'est-à-dire, pour β tendant vers l'infini, on a :

$$\langle A \rangle \to \frac{\sum\limits_{\omega \in \Omega_0} A(\omega)\mu_0(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega_0} \mu_0(\omega)}.$$

Par conséquent, la loi à $T = 0$ est la loi de probabilité induite sur l'ensemble Ω_0 des états d'énergie minimale par un multiple convenable $c_0\mu_0$ de μ_0.

Le cas le plus fréquent est celui où la loi *a priori* est *uniforme* ; on peut alors se ramener au cas où $\mu_0(\omega) = 1$ pour tout ω. Si l'on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini X, on a alors

$$\mu_\infty(\omega) = |\Omega|^{-1}, \quad \text{pour la loi à haute température ;}$$
$$\mu_0(\omega_0) = |\Omega_0|^{-1}, \quad \text{pour la loi à basse température ;}$$

avec $\omega \in \Omega$ et $\omega_0 \in \Omega_0$. L'expression de la fonction de partition se simplifie :

$$Z(\beta) = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}.$$

2. Grandeurs thermodynamiques. — L'*énergie libre* F de Gibbs est donnée par $Z(\beta) = e^{-\beta F(\beta)}$ ce qui nous donne $F(\beta) = (-1/\beta) \operatorname{Log} Z(\beta)$. L'*énergie* E est la valeur moyenne de H ; on démontre aisément les formules suivantes :

$$E = \langle H \rangle = -\frac{\partial(\operatorname{Log} Z(\beta))}{\partial\beta} = F - T\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Notons f la densité de μ par rapport à μ_0. Suivant la définition de Kühlback, l'*entropie* S est donnée par :

$$S(\beta) = -k \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \operatorname{Log} \frac{\mu(\omega)}{\mu_0(\omega)} = -k \sum_{\omega \in \Omega} \mu_0(\omega)(f \operatorname{Log} f)(\omega).$$

Si la loi a priori μ_0 est uniforme sur Ω, les valeurs limites de S sont $k \operatorname{Log} |\Omega|$ (resp. $k \operatorname{Log} |\Omega_0|$) lorsque T tend vers l'infini (resp. zéro). On a les égalités suivantes :

$$S = \frac{E - F}{T} = -\frac{\partial F}{\partial T} = k\beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

3. Le modèle d'Ising à une dimension.

a) *Présentation.* — Il s'agit d'une chaîne Λ de N atomes identiques possédant chacun un moment magnétique pouvant prendre deux orientations. On modélise l'ensemble des états possibles d'un atome x par $S_x = \{-1, 1\}$, de sorte que $\Omega = \{-1, 1\}^N$. Un élément de Ω est donc un vecteur $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ à N composantes égales à $+1$ ou à -1. La *loi a priori* est uniforme et vaut 1.

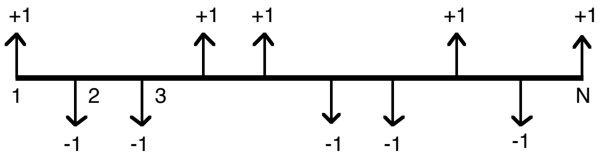


fig. 1

On suppose que les atomes interagissent avec leur(s) plus proche(s) voisin(s), ainsi qu'avec un champ magnétique extérieur. Le hamiltonien est donné par

$$H(\omega) = J \sum_{i=1}^{N-1} \omega_i \omega_{i+1} + B \sum_{i=1}^{N} \omega_i,$$

où J et B sont des nombres réels, qui décrivent respectivement l'intensité de l'interaction entre deux plus proches voisins et l'intensité du champ magnétique extérieur.

Examinons, en l'absence de champ magnétique (i.e., $B = 0$), les configurations où H est minimal ; elles dépendent du signe de J.

1) Si $J < 0$, H est minimal lorsque les moments des atomes sont tous de même sens ; il y a deux configurations possibles :

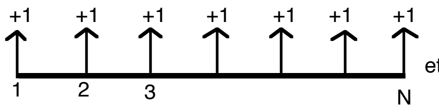


fig. 2.1

et

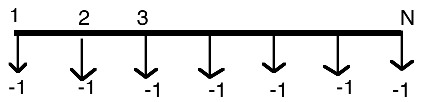


fig. 2.2

C'est le modèle *ferromagnétique.*

2) Si $J > 0$, H est minimal lorsque les moments des atomes sont alternés ; là encore, on obtient deux configurations :
C'est le modèle *antiferromagnétique.*

Remarques.

1) Dans le cas où $B = 0$, le hamiltonien H est invariant par la symétrie $\omega \to -\omega$; on peut donc prévoir que $|\Omega_0|$ est pair.

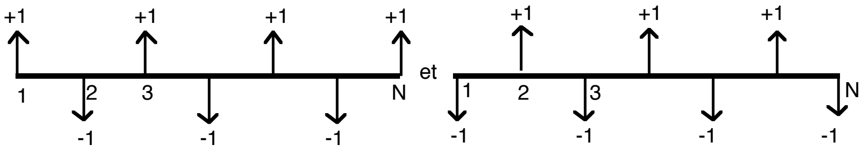


fig. 3.1 fig. 3.2

2) On a $|\Omega_0| = 2$ alors que $|\Omega| = 2^N$, où N est de l'ordre du nombre d'Avogadro, c'est-à-dire 6×10^{26}. En particulier, lorsque la température croît de 0 à $+\infty$, l'entropie s'accroît de $k \operatorname{Log} |\Omega|/|\Omega_0|$, approximativement égal à $kN \operatorname{Log} 2$. On rappelle que, si N est le nombre d'Avogadro, kN est la constante R des gaz parfaits égale à $8,32 \times 10^3$ J/^{o}K.

3) Si B n'est pas nul, Ω_0 est modifié et en particulier, n'est plus nécessairement invariant par la symétrie $\omega \to -\omega$: on dit qu'il y a *brisure de symétrie.*

b) *Calcul de la fonction de partition ; conditions aux limites cycliques.* La façon de mener les calculs — ici comme au paragraphe 4 — est la suivante : on examine l'interaction limitée d'un atome avec un atome voisin ainsi qu'avec le champ magnétique. Le hamiltonien de cette interaction limitée peut prendre quatre valeurs possibles suivant l'état de l'atome considéré et celui de son voisin; ces quatre valeurs sont les $T_{\sigma\tau}$ définis ci-dessous : on pose $u = e^{-\beta J}$, $v = e^{-\beta B}$ et $T_{\sigma\tau} = u^{\sigma\tau} v^{\tau}$ (σ et τ varient dans $\{-1, 1\}$). On appelle *matrice de transfert* et on note T la matrice carrée 2×2 dont les éléments sont les $T_{\sigma\tau}$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,-1} \\ T_{-1,1} & T_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & u^{-1}v^{-1} \\ u^{-1}v & uv^{-1} \end{pmatrix}.$$

On va s'attacher ensuite à déterminer la fonction de partition (quantité globale) grâce à la matrice de transfert (quantité locale). Pour pouvoir mener le calcul jusqu'au bout, on suppose que le N-ième atome interagit avec le premier, c'est-à-dire que la chaîne d'atomes est cyclique; cette hypothèse est physiquement justifiée par la taille de N. Les expressions de H et de Z sont alors :

$$H(\omega) = J \sum_{i=1}^{N} \omega_i \omega_{i+1} + B \sum_{i=1}^{N} \omega_i \qquad \text{avec } \omega_{N+1} = \omega_1 \,;$$

$$Z(\beta) = \sum_{\omega_1 \in \{-1,+1\}} U_{\omega_1 \omega_1},$$

où l'on a posé

$$U_{\omega_1 \omega_{N+1}} = \sum_{(\omega_2, \ldots, \omega_N) \in \{-1,1\}^{N-1}} T_{\omega_1 \omega_2} T_{\omega_2 \omega_3} \ldots T_{\omega_N \omega_{N+1}}.$$

La matrice U est une matrice 2×2 et l'on constate que $U_{\sigma\tau}$ est l'élément d'indice $\sigma\tau$ de la matrice T^N. Nous avons donc prouvé le résultat suivant.

THÉORÈME 1. — *La fonction de partition $Z(\beta)$ est la trace de la matrice T^N, c'est-à-dire $Z(\beta) = \mathrm{tr}(T^N)$.*

Ce procédé de calcul de la fonction de partition s'appelle la *méthode de la matrice de transfert*; elle s'applique en toute dimension, mais on ne sait terminer le calcul exact qu'en dimension 1 et 2. Nous avons besoin ici du résultat suivant.

THÉORÈME [Perron-Frobenius]. — *Soit $T = (t_{ij})$ une matrice réelle $n \times n$ avec $t_{ij} > 0$ quels que soient i et j. La valeur propre complexe de T de plus grand module est simple et strictement positive : $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. De plus, il existe un vecteur propre pour λ_1 dont toutes les coordonnées sont strictement positives.*

Soient alors λ_1 et λ_2 les valeurs propres de T avec $\lambda_1 > |\lambda_2|$; il existe une matrice 2×2 inversible P telle que $T = P^{-1}DP$ donc $T^N = P^{-1}D^NP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

De l'égalité des traces $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on tire alors $Z(\beta) = \lambda_1^N + \lambda_2^N$, donc :

$$\frac{1}{N} \operatorname{Log} Z(\beta) \to \operatorname{Log} \lambda_1 \qquad (N \to +\infty).$$

On peut aussi calculer $\lambda_1 = e^{-\beta J}\cosh(\beta B) + [e^{-2\beta J}\sinh^2(\beta B) + e^{2\beta J}]^{1/2}$ et exprimer ainsi, en fonction des paramètres J et B et de la température T, les quantités thermodynamiques *par atome* [2].

L'énergie par atome : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{F}{N} = -kT \operatorname{Log} \lambda_1$.

L'entropie par atome : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{S}{N} = k \operatorname{Log} \lambda_1 + k \frac{T}{\lambda_1} \frac{\partial\lambda_1}{\lambda T}$.

L'énergie par atome : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{E}{N} = \frac{kT^2}{\lambda_1} \frac{\partial\lambda_1}{\partial T}$.

4. Le modèle d'Ising à deux dimensions.

a) *Présentation du problème physique et du modèle dual avec conditions aux limites cycliques.* — L'ensemble des sites $\Lambda = \{1, \ldots, N+1\} \times \{1, \ldots, M+1\}$ est un rectangle inclus dans le réseau $\mathbb{Z}^2$ et, pour tout $x \in \Lambda$, l'ensemble des états est $S_x = \{-1, 1\}$. L'ensemble des configurations est donc $\Omega = \{-1, +1\}^\Lambda$. On suppose comme précédemment que les atomes interagissent uniquement avec leurs plus proches voisins (le champ magnétique extérieur est nul); le problème physique se déroule donc sur un graphe G dont les sommets sont les atomes, dont les arêtes matérialisent l'existence d'une interaction entre deux atomes (c'est la valence des chimistes), et dont les faces (on parle aussi de plaquettes) sont les carrés du réseau $\mathbb{Z}^2$ (voir figure 4.1). On note E l'ensemble des arêtes de G. La loi a priori est uniforme et vaut 1. Le hamiltonien est donné par :

$$H(\omega) = J \sum_{\{x,y\}\in E} \omega_x \omega_y .$$

Remarque 2. — Une configuration ω sur G est une application de l'ensemble Λ des sommets de G dans $\{1,-1\}$; une telle configuration ω étant donnée, valuons chaque arête $a = \{x,y\}$ de G par $\sigma_a = \omega_x\omega_y$. Le hamiltonien ne dépend que de l'ensemble des valuations et on constate que le produit $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d$ vaut 1 si a, b, c, d sont les quatre arêtes d'une plaquette de G. Les valuations des arêtes de G ne sont donc pas indépendantes.

Pour pouvoir calculer Z, nous allons considérer le graphe G^* dual de G (figure 4.2). Le graphe G^* possède MN sommets situés aux centres des plaquettes de G. Il possède aussi $(N+1)M$ arêtes horizontales et $N(M+1)$ arêtes verticales ; une arête e de G^* intersecte une et une seule arête a de G et on pose alors $\sigma_e = \sigma_a$: une configuration sur G^* sera donc une application de l'ensemble des *arêtes* de G^* dans $\{-1,1\}$. On désigne par Λ^* (resp. $E^*, \Omega^* = \{-1,1\}^{E^*}$) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes, des configurations) de G^*.

On vient de définir une application Φ de Ω dans Ω^* qui à une configuration $\omega = (\omega_x)_{x\in\Lambda}$ fait correspondre une configuration $\sigma = (\sigma_e)_{e\in E^*}$. Posons $\Omega' = \Phi(\Omega)$; on a alors le résultat suivant :

LEMME 3.

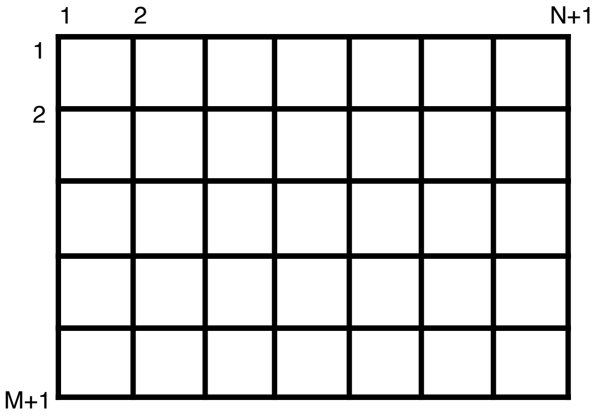
a) *Un élément $\sigma \in \Omega^*$ est dans Ω' si et seulement si, pour tout sommet $z \in \Lambda^*$, on a $\sigma_e\sigma_f\sigma_g\sigma_h = 1$ où e,f,g,h sont les quatre arêtes de G^* adjacentes à z.*

b) *Dans ce cas, σ a deux antécédents par Φ ; si l'un est $\omega = (\omega_x)_{x\in\Lambda}$, l'autre est $-\omega = (-\omega_x)_{x\in\Lambda}$.*

Preuve.

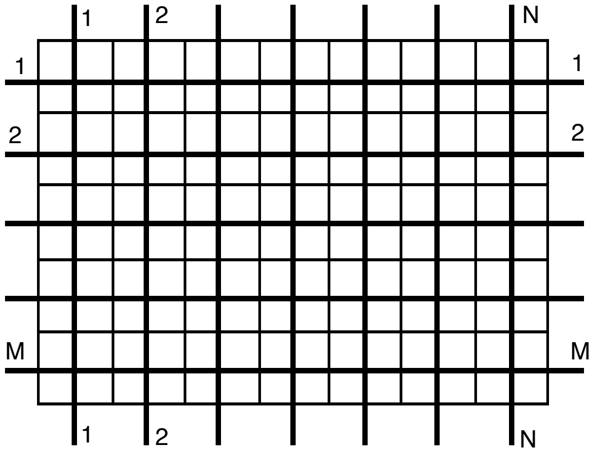
a) Soit σ un élément de Ω^* satisfaisant la condition a). Fixons la valeur d'un des sommets de G en posant par exemple $\omega_{(1,1)} = 1$; on constate alors qu'on peut définir de proche en proche un et un seul ω dans Ω tel que $\Phi(\omega) = \sigma$ (on peut commencer par calculer les valeurs nécessaires de $\omega_{(1,2)}, \ldots, \omega_{(1,N+1)}$, puis on calcule ensuite ligne à ligne les valeurs des $\omega_{(i,j)}$ en utilisant les conditions de compatibilité du type $\sigma_e\sigma_f\sigma_g\sigma_h = 1$).

b) On construit de la même façon le second antécédent ω' de σ en commençant par poser $\omega'_{(1,1)} = -1$, et on constate que ω' est l'opposé du vecteur ω construit au a).



Le graphe G

fig. 4.1



Le graphe G*

(G est tracé en traits fins)

fig. 4.2

On a donc remplacé la condition sur les plaquettes de G donnée dans la Remarque 2 par une condition sur les sommets de G^*, qui se traduit facilement dans la matrice de transfert (*cf.* plus bas). Pour remédier au fait que les seules configurations autorisées sur G^* sont celles de Ω', on utilise l'artifice suivant : on pose, lorsque $\sigma \in \Omega^*$,

$$H^*(\sigma) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \sigma \in \Omega^* \backslash \Omega', \text{ de sorte que } e^{-\beta H^*(\sigma)} = 0; \\ \dfrac{J}{2} \displaystyle\sum_{z \in \Lambda^*} \sum_{e} \sigma_e, & \text{si } \sigma \in \Omega'. \end{cases}$$

(La seconde somme porte sur les arêtes $e \in E^*$ adjacentes à z.) Poser $H^*(\sigma) = +\infty$ lorsque σ est une configuration interdite signifie physiquement qu'il faut une énergie infinie pour l'atteindre.

Le *modèle avec conditions aux limites cycliques* consiste à identifier, dans G, d'une part les sommets de coordonnées $(1, i)$ à ceux de coordonnées $(M+1, i)$, et d'autre part les sommets de coordonnées $(j, 1)$ à ceux de coordonnées $(j, N+1)$ pour toutes les valeurs possibles de i et de j (*cf.* Fig. 5 pour l'orientation des coordonnées). Il revient au même d'identifier, dans G^*, les arêtes libres horizontales de même ordonnée d'une part et les arêtes libres verticales de même abscisse d'autre part. On modifie en conséquence les définitions de Ω et de Ω^* et on conserve dans les deux cas les mêmes expressions du hamiltonien.

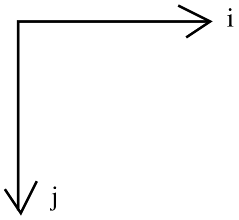


fig. 5

Dans ce cas (et dans ce cas seulement), chaque arête $e \in E^*$ est adjacente à *deux* sommets de G^* de sorte qu'elle intervient exactement deux fois dans l'expression de H^* ; alors, pour tout élément ω de Ω, on a $H^*(\Phi(\omega)) = H(\omega)$. Le lemme 3 permet alors de démontrer le résultat suivant :

Proposition 4. — *Dans le modèle d'Ising à deux dimensions avec conditions aux limites cycliques, on a :*

$$Z(\beta) = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)} = 2 \sum_{\sigma \in \Omega^*} e^{-\beta H^*(\sigma)}.$$

b) *Calcul de la fonction de partition avec conditions aux limites cycliques et champ magnétique nul.* — Nous utiliserons pour ce calcul le modèle dual et l'expression de $Z(\beta)$ donnée par la proposition 4. Comme au paragraphe précédent, on commence par calculer le hamiltonien H^* lorsque $M = N = 1$, c'est-à-dire lorsque G^* est un graphe avec un seul sommet entouré de quatre arêtes (figure 6) : on obtient 16 valeurs possibles dont certaines sont nulles.

On définit comme au paragraphe précédent une matrice de transfert T de la façon suivante : on pose $u = e^{-\beta J/2}$ et, lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ appartiennent à $\{-1, 1\}$

$$T_{\alpha,\beta}^{\gamma\delta} = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \neq 1\,; \\ u^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta = 1. \end{cases}$$

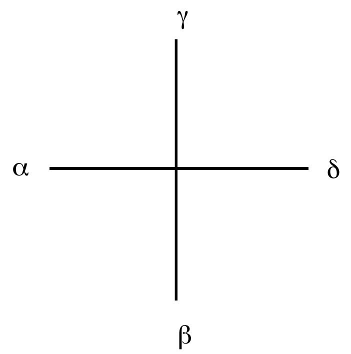


fig. 6

Autrement dit, quand on donne T sous forme de tableau, on a :

$$T = \begin{pmatrix} u^4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & u^{-4} \end{pmatrix}$$

Conventions : dans tout ce paragraphe, les indices du bas (resp. du haut) sont ceux de l'espace vectoriel de départ (resp. d'arrivée). On écrit aussi $+$ pour $+1$ et $-$ pour -1, et l'on indexe les lignes et les colonnes de T dans l'ordre $++$, $+-$, $-+$ et $--$.

On attache à chaque arête de G^* un espace vectoriel $V = \mathbb{C}^2$, muni d'une base (e_1, e_{-1}); si K est un nombre entier positif, on note V_K le produit tensoriel de K copies de V et on munit V_K de la base des tenseurs

$$e_\alpha = e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_K} = e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_K} \text{ pour } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in \{-1, 1\}^K.$$

Ceci permet de donner de la matrice de transfert l'interprétation suivante : c'est la matrice (dans les bases décrites ci-dessus) d'un opérateur de V_2 dans lui-même, que l'on notera encore T par abus de langage. Exprimons maintenant la fonction de partition au moyen de T.

Première étape. — Fixons la valeur des arêtes libres de G^* comme indiqué sur la figure 7, sans procéder tout de suite à leur identification par les conditions aux limites cycliques. Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_M)$, on définit une fonction de partition partielle par :

$$Z^{\gamma}{}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta} = \sum_\sigma e^{-\beta H^*(\sigma)},$$

où la sommation porte sur toutes les configurations σ ayant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme valeurs des arêtes libres (on a omis la variable $\beta = 1/kT$ pour ne pas surcharger les notations). La propriété essentielle de ces fonctions est la suivante :

Lemme 5. — *Si* $M = M' + M''$ *et si l'on a* $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ *et* $\delta = (\delta', \delta'')$ *où la longueur de* α' *(resp. de* δ'*) est* M' *et celle de* α'' *(resp. de* δ''*) est* M''*, on a (voir* Fig. 7*) :*

$$Z^{\gamma}{}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta} = \sum_{\lambda \in \{-1,1\}^N} Z^{\gamma}{}_{\alpha'}{}^{\delta'}{}_{\lambda}\, Z^{\lambda}{}_{\alpha''}{}^{\delta''}{}_{\beta}.$$

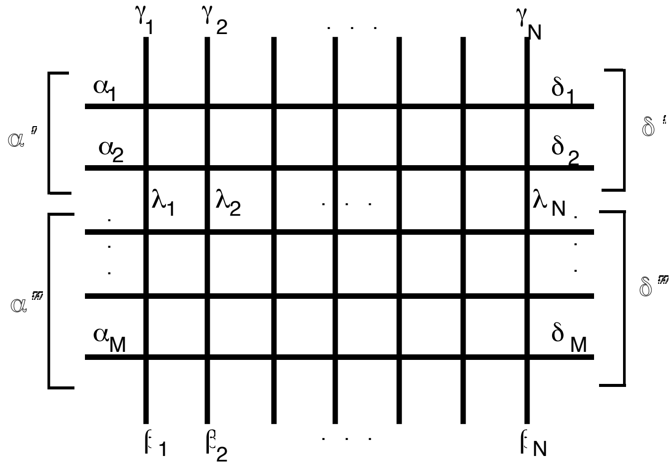


fig. 7

La démonstration du lemme 5 découle immédiatement des définitions de H^* et des fonctions de partition partielles. En répétant ce procédé, qui revient à “couper” le graphe G^* au niveau de chaque ligne horizontale, on obtient finalement :

$$Z^{\gamma}{}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta} = \sum Z^{\gamma}{}_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\lambda_1}\, Z^{\lambda_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\lambda_2} \,\ldots\, Z^{\lambda_{M-1}}{}_{\alpha_M}{}^{\delta_M}{}_{\beta},$$

la somme ci-dessus portant sur tous les $(M-1)$-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{M-1})$ où chaque λ_i parcourt $\{-1,1\}^N$. Nous allons maintenant utiliser un intermédiaire de calcul : l'opérateur R qui va de $V \otimes V_N$ dans $V_N \otimes V$ (ces deux espaces sont isomorphes à V_{N+1}) et dont la matrice dans les bases $(e_\alpha \otimes e_\beta)$ et $(e_\gamma \otimes e_\delta)$ est la matrice des

$$\begin{aligned} Z^{\gamma}{}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta} &= Z^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_N)}{}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{(\beta_1,\ldots,\beta_N)} \\ &= \sum_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_N)\in\{-1,1\}^{N-1}} T^{\gamma_1\alpha_2}_{\alpha\beta_1} T^{\gamma_2\alpha_3}_{\alpha_2\beta_2} \ldots T^{\gamma_N\delta}_{\alpha_N\beta_N}. \end{aligned}$$

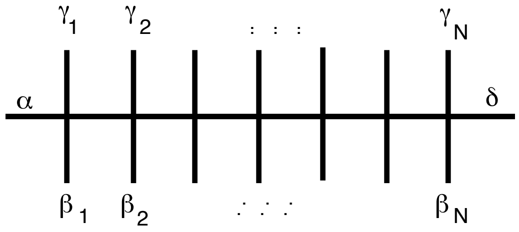


fig. 8

La seconde égalité figurant ci-dessus résulte des définitions. Les coefficients de la matrice de R dans les bases canoniques sont les valeurs des fonctions de partition partielles du graphe ci-dessous :

Seconde étape (le calcul de R et la traduction calculatoire des conditions aux limites cycliques).

PROPOSITION 6. — *On a :*

$$R = T^{N,N+1}T^{N-1,N}\dots T^{1,2}$$

où les opérateurs $T^{i,i+1}$ sont définis sur V_K par

$$1 \le i \le K-1 \text{ et } T^{i,i+1} = (\mathrm{id}_V)^{\otimes i-1} \otimes T \otimes (\mathrm{id}_V)^{\otimes K-i-1}.$$

Le contexte précise K ; ici, $K = N+1$.

Preuve. — On a

$$\begin{aligned}
&T^{N,N+1}T^{N-1,N}\dots T^{1,2}(e_{\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_N})\\
&\quad = T^{N,N+1}\dots T^{2,3}\Big(\sum_{(\gamma_1,\alpha_2)\in\{-1,1\}^2} T^{\gamma_1\alpha_2}_{\alpha\beta_1} e_{\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\dots,\beta_N}\Big)\\
&\quad = T^{N,N+1}\dots T^{3,4}\Big(\sum_{(\gamma_2,\alpha_3)\in\{-1,1\}^2}\\
&\qquad\qquad \sum_{(\gamma_1,\alpha_2)\in\{-1,1\}^2} T^{\gamma_1\alpha_2}_{\alpha\beta_1} T^{\gamma_2\alpha_3}_{\alpha_2\beta_2} e_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha_3,\beta_3,\dots,\beta_N}\Big)\\
&\quad = \sum_{(\gamma_N,\delta)\in\{-1,1\}^2}\ \sum_{(\gamma_{N-1},\alpha_N)\in\{-1,1\}^2}\\
&\qquad\qquad \dots \sum_{(\gamma_1,\alpha_2)\in\{-1,1\}^2} T^{\gamma_1\alpha_2}_{\alpha\beta_1}\dots T^{\gamma_{N-1}\alpha_N}_{\alpha_{N-1}\beta_{N-1}} T^{\gamma_N\delta}_{\alpha_N\beta_N} e_{\gamma_1,\dots,\gamma_N,\delta}
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de réindexer la sommation.

Dans le modèle avec conditions aux limites cycliques, les deux arêtes horizontales libres de la figure 8 sont identifiées. Soit alors U l'opérateur de V_N dans lui-même dont la matrice dans la base (e_β) a les éléments suivants :

$$U^\gamma_\beta = \sum_{\alpha\in\{-1,1\}} Z^\gamma{}_\alpha{}^\alpha{}_\beta.$$

Nous allons calculer U en fonction de R ; introduisons pour cela la notion de *trace partielle*. Si E, M, N sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, on sait qu'il existe un isomorphisme θ_E de $\mathrm{End}(E)$ sur $E^* \otimes E$ et un isomorphisme ψ de $(M \otimes N)^*$ sur $N^* \otimes M^*$ (on note F^* le dual de F). Notons c la contraction de $N^* \otimes M^* \otimes M \otimes N$ dans $N^* \otimes N$ par rapport à $M^* \otimes M$. Toutes ces applications sont indépendantes du choix d'une base, ce qui nous permet de donner la définition suivante.

Définition 7. — La *trace partielle par rapport à M d'un endomorphisme* A de $M \otimes N$ est l'endomorphisme de N image de A par l'homomorphisme $(\theta_N)^{-1} \circ c \circ (\psi \otimes \mathrm{id}_{M\otimes N}) \circ \theta_{M\otimes N}$ de $\mathrm{End}(M \otimes N)$ dans $\mathrm{End}(N)$; on le note $\mathrm{Tr}_M A$.

On peut vérifier que si $e_1, \ldots, e_p$ est une base de M et si $f_1, \ldots, f_q$ est une base de N, alors (les notations sont évidentes) :

$$(\mathrm{Tr}_M A)(f_i) = \sum_{j=1}^{q} \Big(\sum_{k=1}^{p} A^{k,j}_{k,i} \Big) f_j.$$

On peut aussi vérifier que si U (resp. V) est un endomorphisme de M (resp. N), alors $\mathrm{Tr}_M(U \otimes V) = \mathrm{tr}(U).V$ où tr désigne la trace usuelle (on note comme d'habitude $U \otimes V$ l'endomorphisme de $M \otimes N$ qui transforme $x \otimes y$ en $U(x) \otimes V(y)$).

Désignons par γ_N l'opérateur de $V_N \otimes V$ dans $V \otimes V_N$ tel que $\gamma_N(x \otimes v) = v \otimes x$ pour tout $x \in V_N$ et tout $v \in V$. On a alors le résultat suivant. :

Lemme 8. — *L'opérateur U vaut* $\mathrm{Tr}_V(\gamma_N R)$.

Preuve. — Il s'agit d'un calcul court et sans difficulté.

Il est maintenant possible d'exprimer la fonction de partition avec conditions aux limites cycliques ; elle vaut

$$Z(\beta) = 2 \sum U^{\lambda_2}_{\lambda_1} U^{\lambda_3}_{\lambda_2} \ldots U^{\lambda_1}_{\lambda_M},$$

la somme ci-dessus portant sur tous les M-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ où chaque λ_i parcourt $\{-1, 1\}^N$. Comme au paragraphe 3, on en déduit le résultat final.

Théorème 9. — *La fonction de partition du modèle d'Ising à deux dimensions avec conditions aux limites cycliques est* $Z(\beta) = 2\,\mathrm{tr}(U^M)$.

Ici U est un endomorphisme de V_N, qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2^N. Grâce aux résultats intermédiaires 6 et 8, on constate que les éléments de la matrice de U dans la base des (e_α) sont tous positifs; d'après le théorème de Perron-Frobenius, la fonction de partition est alors de la forme suivante

$$Z(\beta) = c_1\lambda_1^M + c_2\lambda_2^M + \ldots + c_{2^N}\lambda_{2^N}^M,$$

où les λ_i sont des fonctions de β et les c_i des constantes. On ne peut malheureusement pas faire le calcul de la valeur limite de Z aussi facilement que dans le cas du modèle à une dimension, car il faut faire tendre M et N simultanément vers $+\infty$ [2].

5. Le modèle de la glace. — L'ensemble des sites est $\Lambda^* = \{1,\ldots,N\} \times \{1,\ldots,M\}$ et on reprend les notations (G^*, E^*, Ω^*) du paragraphe précédent pour désigner le graphe induit par Λ^*. Chaque sommet est occupé par un atome d'oxygène O, chaque arête porte un et un seul atome d'hydrogène H qui est voisin d'un des deux atomes d'oxygène situés aux extrémités de l'arête. On impose de plus que *chaque atome d'oxygène soit entouré d'exactement deux atomes d'hydrogène*, de sorte qu'on a bien affaire à des molécules d'eau : H_2O. Ces molécules peuvent alors se présenter sous six configurations possibles, qui sont dessinées ci-dessous.

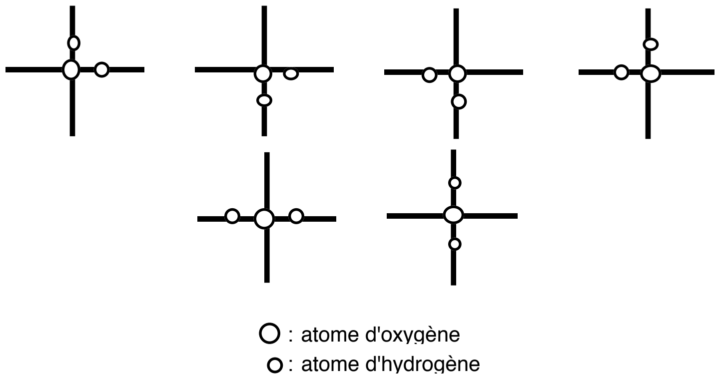


fig. 9

Le formalisme utilisé pour ce modèle physique est le graphe G^* dont les arêtes sont valuées par 1 ou -1 selon les règles suivantes :

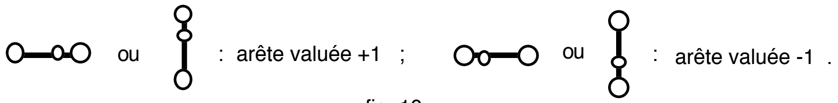


fig. 10

La stratégie utilisée est alors la même que celle du modèle d'Ising à deux dimensions : on est amené à considérer un espace vectoriel V de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, de base (e_+, e_-), et une matrice de transfert T de V_2 dans lui-même. Les règles de répartition des atomes d'hydrogène interdisent certaines configurations et, comme au paragraphe précédent, imposent la nullité de certains éléments de la matrice de transfert. La valeur des six autres éléments de T dépend du hamiltonien considéré, mais on connaît leurs positions ; elles sont figurées ci-dessous par une étoile :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Examinons les propriétés algébriques d'un tel opérateur.

a) Notons H le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices diagonales ; H agit sur V de façon canonique, puis sur V_N par $h(x_1 \otimes \ldots \otimes x_N) = h(x_1) \otimes \ldots \otimes h(x_N)$.

Lemme 10. — *L'opérateur T commute à l'action de H sur V_2 et, pour tout élément i de $\{1, \ldots, N-1\}$, l'opérateur $T^{i,i+1}$ commute à l'action de H sur V_N.*

Les caractères du groupe H sont les χ_δ, où $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ parcourt $\mathbb{Z}^2$, et sont définis par :

$$\chi_\delta \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = t_1^{\delta_1} t_2^{\delta_2}.$$

On a alors la décomposition en somme directe suivante :

$$V_N = \bigoplus_{\delta \in \mathbb{Z}^2} V_{N,\delta} \text{ où } V_{N,\delta} = \{v \in V_N \mid \forall t \in H, t(v) = \chi_\delta(t)v\}.$$

Le lemme 10 nous assure que les opérateurs $T^{i,i+1}$, donc leur produit, laissent les $V_{N,\delta}$ stables ; si un opérateur U possède cette propriété (par exemple, un opérateur intervenant dans le calcul de la fonction de partition), on a :

$$\mathrm{tr}(U^M) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{tr}(U^M \mid V_{N,\delta}).$$

b) Étudions le cas où

$$T = T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & 1-q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $q = 1$, $T(1)$ est l'opérateur d'échange dans V_2 : $T(1)(x \otimes y) = y \otimes x$. Faisons agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ sur V_3 par

$$\sigma.(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = U_\sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes a_{\sigma^{-1}(3)}.$$

Alors l'opérateur $T(1)^{i,j}$ s'identifie à $U_{(i,j)}$ et, puisque l'on a $(i,j)^2 = \mathrm{id}$ et $(1,2)(2,3)(1,2) = (2,3)(1,2)(2,3)$, on a les identités suivantes :

$$T(1)^2 = \mathrm{id}_{V_3} \text{ et } T(1)^{1,2}T(1)^{2,3}T(1)^{1,2} = T(1)^{2,3}T(1)^{1,2}T(1)^{2,3}.$$

La première égalité est équivalente à $(T(1)-I)(T(1)+I) = 0$, où I désigne l'identité de V_3. On peut généraliser ces égalités au cas où q est un nombre complexe quelconque ; on obtient alors, par un simple calcul :

$$(T(q) - I)(T(q) + q^2 I) = 0\,;$$

et

$$T(q)^{1,2}T(q)^{2,3}T(q)^{1,2} = T(q)^{2,3}T(q)^{1,2}T(q)^{2,3}.$$

De plus, $T^{i,i+1}$ et $T^{j,j+1}$ commutent lorsque $|i-j| \geq 2$.

6. L'équation de Yang-Baxter et l'algèbre de Hecke. — Nous allons généraliser les résultats obtenus au paragraphe précédent : V sera un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$; V_N désigne encore le produit tensoriel de N copies de V, muni de la base des $e_{i_1 \ldots i_N} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N}$ où $(i_1, \ldots, i_N)$ parcourt $\{1, \ldots, n\}^N$, et T est un opérateur de V_2 dans lui-même. Enfin, $T^{i,i+1}$ est l'opérateur de V_N dans lui-même donné par $I^{\otimes i-1} \otimes T \otimes I^{\otimes N-i-1}$.

Définition 11. — L'*équation de Yang-Baxter* est l'équation

$$T^{1,2}T^{2,3}T^{1,2} = T^{2,3}T^{1,2}T^{2,3}.$$

Un opérateur T qui vérifie cette équation sera appelé *opérateur de Yang-Baxter*.

On ne connaît pas toutes les solutions de cette équation ; en revanche, guidés par les résultats du paragraphe précédent, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 12. — *Soient q un nombre complexe et $T(q)$ l'opérateur défini par $T(q)(e_{ii}) = e_{ii}$ pour tout i et, pour tous les couples (i,j) vérifiant $i < j$, $T(q)(e_{ij}) = qe_{ji}$ et $T(q)(e_{ji}) = qe_{ij} + (1-q^2)e_{ji}$. Alors $T(q)$ est un opérateur de Yang-Baxter et vérifie $(T(q) - I)(T(q) + q^2 I) = 0$.*

Là encore, la seule façon de démontrer ce résultat ainsi que le lemme suivant est le calcul direct. On remarque cependant que lorsque $q = 1, T(1)$ est l'opérateur d'échange.

LEMME 13. — *On fait l'hypothèse $q^2 \neq -1$. L'opérateur $T(q)$ est diagonalisable et possède deux valeurs propres : 1 et $-q^2$.*

La valeur propre 1 est associée au sous-espace propre de dimension $n(n+1)/2$ dont une base est constituée des tenseurs e_{ii} pour tout i et $qe_{ij} + e_{ji}$ pour tous les couples (i,j) tels que $i < j$.

La valeur propre $-q^2$ est associée au sous-espace propre de dimension $n(n-1)/2$ dont une base est constituée des vecteurs $e_{ij} - qe_{ji}$ pour tous les couples (i,j) tels que $i < j$.

Lorsque $q = 1$, ce lemme énonce un résultat bien connu : V_2 est somme directe des tenseurs symétriques et des tenseurs antisymétriques. Dans le cas où q est quelconque, et par analogie avec la situation où $q = 1$, on notera $S_{q^2}(V)$ (resp. $\bigwedge_{q^2}(V)$) le premier (resp. le second) sous-espace propre mentionné au lemme 13, et ses éléments seront appelés les tenseurs q-symétriques (resp. q-antisymétriques) ; le paragraphe 8 leur est consacré.

Définition 14. — On désigne par q un nombre complexe. L'*algèbre de Hecke* $H_N(q)$ est la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $N-1$ indéterminées $T_1, \ldots, T_{N-1}$ soumises aux relations suivantes :

(I)$_q$ pour tout i, on a $(T_i - 1)(T_i + q^2) = 0$;
(II) si $|i-j| \geq 2$, on a $T_iT_j = T_jT_i$;
(III) si $|i-j| = 1$, on a $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$.

On dispose de manière évidente d'une représentation de $H_N(q)$ dans $\mathrm{End}(V_N)$: à T_i, on fait correspondre $T^{i,i+1}$ où T est l'opérateur de Yang-Baxter $T(q)$ considéré plus haut.

Rappelons le théorème de Moore sur la présentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$.

THÉORÈME DE MOORE (1897). — *Pour i variant de 1 à $N-1$, notons s_i la transposition $(i, i+1)$. Alors les éléments $s_1, \ldots, s_{N-1}$ et les relations suivantes constituent une présentation de $\mathfrak{S}_N$:*

(I) *si $1 \leq i \leq N-1$, on a $s_i^2 = 1$;*
(II) *si $|i-j| \geq 2$, on a $s_is_j = s_js_i$;*
(III) *si $|i-j| = 1$, on a $s_is_js_i = s_js_is_j$.*

Preuve. — Les relations (I), (II) et (III) se vérifient par un simple calcul. On sait qu'une permutation admet une décomposition en produit de cycles disjoints de la forme $(a_1 \ldots a_p)$; on constate qu'un tel cycle est égal au produit des transpositions $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{p-1}a_p)$ et qu'une transposition (i,j) avec $i < j$ est égale au produit $s_is_{i+1}\ldots s_{j-2}s_{j-1}s_{j-2}\ldots s_{i+1}s_i$, ce qui démontre que les si engendrent $\mathfrak{S}_N$. Le lecteur est renvoyé à [4, note C] pour la fin de la preuve de ce théorème.

On peut améliorer ce résultat en précisant le nombre minimum de transpositions du type s_i dont le produit est une permutation donnée et en étudiant ces décompositions minimales. On dit qu'un couple (i,j) vérifiant $1 \leq i < j \leq N$ est une *inversion* de $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$; on note $\mathrm{Inv}(\sigma)$ l'ensemble des inversions de σ et $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.

Soient r un nombre entier supérieur ou égal à 2 et soient $(i_1,\ldots,i_r)$ et $(j_1,\ldots,j_r)$ deux r-uplets de nombres entiers compris entre 1 et $N-1$. On dit qu'on passe du premier r-uplet au second par une *transformation de type (II)* s'il existe un entier k avec $1 \leq k \leq r-1$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1) si $m \in \{1,\ldots,k-1\} \cup \{k+2,\ldots,r\}$, on a $i_m = j_m$;

2) on a $|i_k - i_{k+1}| \geq 2$, $i_k = j_{k+1}$ et $j_k = i_{k+1}$.

On dit qu'on passe du premier r-uplet au second par une *transformation de type (III)* s'il existe un entier k avec $1 \leq k \leq r-2$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1) si $m \in \{1,\ldots,k-1\} \cup \{k+3,\ldots,r\}$, on a $i_m = j_m$;

2) on a $i_k = i_{k+2}$ et $|i_k - i_{k+1}| = 1$ ainsi que $i_k = j_{k+1}$ et $j_k = i_{k+1} = j_{k+2}$.

Enfin, on dit que les deux r-uplets $(i_1,\ldots,i_r)$ et $(j_1,\ldots,j_r)$ sont *équivalents* si l'on passe du premier au second par une succession de transformations de type (II) ou de type (III). On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des r-uplets de nombres entiers compris entre 1 et $N-1$. On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 15. — *Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_N$; alors :*

1) *Si $(i,i+1)$ est une inversion de σ, on a $I(\sigma s_i) = I(\sigma) - 1$; sinon, on a $I(\sigma s_i) = I(\sigma) + 1$.*

2) *La longueur de σ, c'est-à-dire l'entier r minimum tel qu'il existe $(i_1,\ldots,i_r)$ appartenant à $\{1,\ldots,N-1\}^r$ et vérifiant $\sigma = s_{i_1}\ldots s_{i_r}$, est égale à $I(\sigma)$. Une décomposition $\sigma = s_{i_1}\ldots s_{i_r}$ avec r minimal s'appelle une décomposition réduite.*

3) *Soit $s_{i_1}\ldots s_{i_r}$ une décomposition réduite de σ ; alors $s_{j_1}\ldots s_{j_r}$ est une autre décomposition réduite de σ si, et seulement si $(i_1,\ldots,i_r)$ et $(j_1,\ldots,j_r)$ sont équivalents.*

Preuve.

1) Soient j et k deux entiers vérifiant $1 \leq j < i < i+1 < k \leq N$; alors (j,k) (resp. $(j,i),(j,i+1)$, $(i,k),(i+1,k)$) est une inversion de σ si et seulement si (j,k) (resp. $(j,i+1),(j,i),(i+1,k),(i,k)$) est une inversion de σs_i : on établit ainsi une bijection de $\mathrm{Inv}(\sigma)\backslash\{(i,i+1)\}$ sur $\mathrm{Inv}(\sigma s_i)\backslash\{(i,i+1)\}$; il suffit ensuite de constater que $(i,i+1)$ est une inversion de σ si et seulement si $(i,i+1)$ n'est pas une inversion de σs_i. On déduit de cette première partie que $I(s_{i_1}\ldots s_{i_r}) \leq r$.

2) L'inégalité $r \geq I(\sigma)$ résulte de la première partie du théorème. On raisonne par récurrence sur $I(\sigma)$ pour prouver l'autre inégalité. Le résultat est trivial si $I(\sigma) = 0$ ($\sigma = \mathrm{id}$). Soit σ une permutation différente de l'identité et soit i l'entier tel que $\sigma(1) < \ldots < \sigma(i)$ et $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Alors $p := I(\sigma s_i) = I(\sigma) - 1$ et l'hypothèse de récurrence assure l'existence de $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, N-1\}^p$ vérifiant $\sigma s_i = s_{i_1} \ldots s_{i_p}$, c'est-à-dire que $\sigma = s_{i_1} \ldots s_{i_p} s_{i_{p+1}}$ avec $i_{p+1} = i$.

3) On se donne une décomposition réduite $s_{i_1} \ldots s_{i_r}$ de σ. Vu les relations (II) et (III) dans le théorème de Moore, il est évident que l'équivalence des deux r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ implique l'égalité des produits $s_{i_1} \ldots s_{i_r}$ et $s_{j_1} \ldots s_{j_r}$.

La réciproque est vraie dans le cadre plus général des groupes de Coxeter ; nous utiliserons sans démonstration une version de la *condition d'échange* : si $I(s_i\sigma) = I(\sigma) - 1$, il existe $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $s_i s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} s_{i_{k+1}} \ldots s_{i_r}$ soit une décomposition réduite de σ [3, chap. 4, § 1].

On raisonne par récurrence sur r ; l'assertion est triviale pour $r = 0, 1$ ou 2. Supposons que le résultat soit démontré pour toute permutation de longueur $\leq r-1$ avec $r \geq 3$. Soient alors σ et deux de ses décompositions réduites comme indiqué ci-dessus ; si $i_1 = j_1$ ou si $i_r = j_r$, c'est terminé. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ ne sont pas équivalents.

a) Prouvons que $s_{j_1} s_{i_1} \ldots s_{i_{r-1}}$ est une décomposition réduite de σ et que $(j_1, i_1, \ldots, i_{r-1})$ et $(i_1, \ldots, i_r)$ ne sont pas équivalents. En effet, puisque $I(s_{j_1}\sigma) = I(\sigma) - 1$, la condition d'échange dit qu'il existe $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $s_{j_1} s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} s_{i_{k+1}} \ldots s_{i_r}$ soit une décomposition réduite de σ ; puisque $s_{j_1} \ldots s_{j_r}$ est une autre décomposition réduite de σ, l'hypothèse de récurrence implique que $(j_2, \ldots, j_r)$ et $(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_r)$ sont équivalents, donc que $(j_1, \ldots, j_r)$ et $(j_1, i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_r)$ sont équivalents. Si k était différent de r, le même type de raisonnement prouverait que $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_r)$ sont équivalents. Par transitivité, $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ seraient équivalents, ce qui contredit notre hypothèse. On a donc $k = r$ et $(j_1, i_1, \ldots, i_{r-1})$, équivalent à $(j_1, \ldots, j_r)$, n'est pas équivalent à $(i_1, \ldots, i_r)$.

b) On définit $\sigma_0 = s_{j_1} \ldots s_{j_r}$, $\sigma_1 = s_{i_1} \ldots s_{i_r}$ et, pour $1 \leq k \leq r$, $\sigma_{r+1-k} = s_{i_1} s_{j_1} \ldots s_{i_1} s_{j_1} s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}$ (produit de r termes) si $r - k$ est pair, et $\sigma_{r+1-k} = s_{j_1} s_{i_1} \ldots s_{i_1} s_{j_1} s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}$ (produit de r termes) si $r - k$ est impair. En répétant $r - 1$ fois la démonstration du a), on montre que $s_{i_1} s_{j_1} s_{i_1} \ldots s_{i_1 \text{ ou } j_1}$ et $s_{j_1} s_{i_1} s_{j_1} \ldots s_{j_1 \text{ ou } i_1}$ sont des décompositions *réduites* de σ, ce qui est faux si $r \geq 4$, et que les deux r-uplets $(i_1, j_1, i_1, \ldots)$ et $(j_1, i_1, j_1, \ldots)$ *ne sont pas équivalents*, ce qui est faux pour $r = 3$ en particulier ; cela achève la démonstration.

L'équation de Yang-Baxter, jointe aux résultats que l'on vient de prouver, permet d'énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 16. — *Soient T un opérateur de Yang-Baxter et σ un élément de $\mathfrak{S}_N$. Le produit $T^{i_1,i_1+1}\dots T^{i_r,i_r+1}$ représente le même opérateur pour toutes les décompositions réduites $s_{i_1}\dots s_{i_r}$ de σ ; on le note T^σ.*

De plus, on a les règles suivantes : $T^\sigma T^\tau = T^{\sigma\tau}$ si $I(\sigma\tau) = I(\sigma)+I(\tau)$ et $T^{\sigma s_i} = T^\sigma T^{i,i+1}$ si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

Preuve. — Compte tenu du théorème 15, l'existence de T^σ revient à prouver l'égalité

$$T^{i_1,i_1+1}\dots T^{i_r,i_r+1} = T^{j_1,j_1+1}\dots T^{j_r,j_r+1}$$

lorsque les r-uplets $(i_1,\dots,i_r)$ et $(j_1,\dots,j_r)$ sont équivalents. Il suffit de le faire lorsque l'on passe du premier au second par une transformation de type (II) ou (III). Les détails sont les mêmes que dans la démonstration de la proposition 18, b).

Les règles de calcul s'établissent au moyen des remarques suivantes :

notons $s_{i_1}\dots s_{i_r}$ et $s_{j_1}\dots s_{j_q}$ des décompositions réduites de σ et τ respectivement ; alors $\sigma\tau$ admet la décomposition réduite $s_{i_1}\dots s_{i_r}s_{j_1}\dots s_{j_q}$ lorsque l'on a $I(\sigma\tau) = I(\sigma)+I(\tau)$;

de même, si $s_{i_1}\dots s_{i_r}$ est une décomposition réduite de σ et $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, on a $I(\sigma s_i) = I(\sigma)+1$ et l'on applique le premier cas à $\tau = s_i$.

On voit facilement que l'application de $\mathfrak{S}_N$ dans $GL(V_N)$ qui à σ fait correspondre T^σ, définie dans le théorème 16, n'est pas un homomorphisme en général : par exemple, un opérateur T de Yang-Baxter ne vérifie pas nécessairement $T^2 = 1$ alors que $s_i^2 = 1$. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que ceci constitue en fait le principal obstacle et nous allons introduire un groupe qui admet une représentation naturelle à l'aide des opérateurs de Yang-Baxter.

7. Le groupe des tresses. — Une représentation graphique possible de la permutation $\sigma = (12)(345)$ dans le groupe $\mathfrak{S}_5$ (donnée ici sous forme de produit de cycles à supports disjoints), est la suivante :

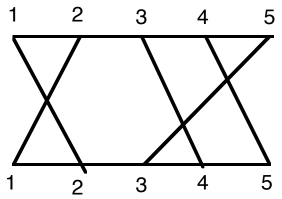


fig. 11

On constate qu'on peut donner une interprétation graphique du produit des permutations ; par exemple, si $\rho = (2)(1543)$, $\rho\sigma$ est obtenue en "attachant" ρ au-dessous de σ.

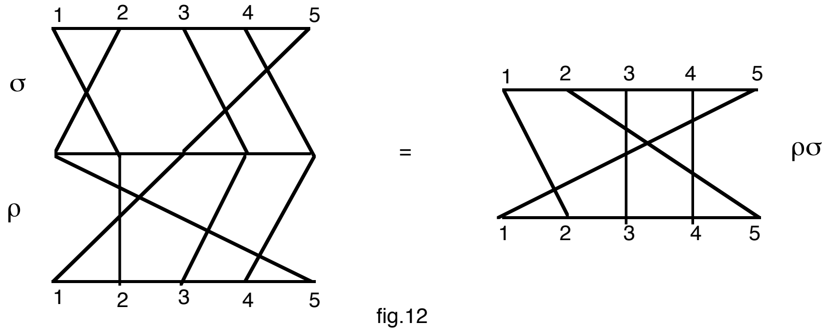


fig.12

Les dessins ci-dessus sont plans : la façon dont les arêtes se croisent n'a aucune importance. Une *tresse* (figure 13.1) sera au contraire représentée par un entrelac de N cordes joignant N points à N autres points, deux cordes pouvant se croiser de deux façons différentes. On compose les tresses de la même façon que les permutations. On notera b_i la tresse de la figure 13.2.

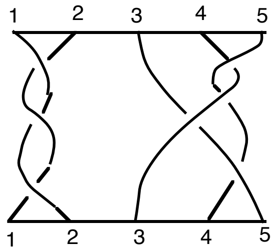


fig. 13.1

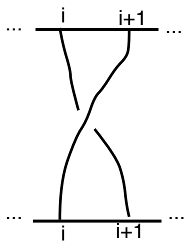


fig. 13.2

Donnons maintenant une définition rigoureuse par générateurs et relations du *groupe des tresses* d'ordre N, noté B_N.

Définition 17. — Le groupe B_N admet la présentation donnée par les générateurs $b_1, \ldots, b_{N-1}$, et les relations :
(II) $b_i b_j = b_j b_i$ si $|i-j| \geq 2$;
(III) $b_i b_j b_i = b_j b_i b_j$ si $|i-j| = 1$.

Comme le suggèrent la représentation graphique des tresses et le théorème de Moore, il y a un épimorphisme de B_N dans $\mathfrak{S}_N$ défini en "oubliant" la façon dont les cordes se croisent. Plus précisément, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 18.

a) *Il existe un unique homomorphisme p de B_N dans $\mathfrak{S}_N$ défini par $p(b_i) = s_i$; de plus p est surjectif.*

b) *Si σ est un élément de $\mathfrak{S}_N$ et si $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ est une décomposition réduite de σ, la tresse $b_{i_1} \dots b_{i_r}$ ne dépend pas de la décomposition choisie et on la note $r(\sigma)$.*

c) *L'application r ainsi définie est une section de p : on a $p \circ r = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_N}$*

Preuve. — Le groupe B_N est défini par une présentation. Il en résulte que, pour tout groupe G et toute famille d'éléments $t_1, \dots, t_{N-1}$ de G, il existe un homomorphisme $\phi : B_N \to G$ transformant b_1 en $t_1, \dots, b_{N-1}$ en t_{N-1} si, et seulement si, les relations suivantes sont satisfaites :

$(\mathrm{II})_G$ on a $t_i t_j = t_j t_i$ pour $|i-j| \geq 2$;

$(\mathrm{III})_G$ on a $t_i t_j t_i = t_j t_i t_j$ pour $|i-j| = 1$.

L'homomorphisme ϕ est surjectif si et seulement si $t_1, \dots, t_{N-1}$ engendrent le groupe G. Ces conditions sont satisfaites dans le cas $G = \mathfrak{S}_N$, $t_i = s_i$ (voir le théorème de Moore). L'assertion a) résulte de là.

Pour prouver b), il suffit (d'après le théorème 15) de vérifier qu'on a $b_{i_1} \dots b_{i_r} = b_{j_1} \dots b_{j_r}$ lorsque l'on passe du r-uplet $(i_1, \dots, i_r)$ au r-uplet $(j_1, \dots, j_r)$ par une transformation de type (II) ou (III). Or cela résulte des relations (II) et (III) respectivement satisfaites par les générateurs $b_1, \dots, b_{N-1}$ de B_N.

Soient σ un élément de $\mathfrak{S}_N$ et $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ une décomposition réduite de σ. Par définition, r transforme $\sigma = s_{i_1} \dots s_{i_r}$ en $b_{i_1} \dots b_{i_r}$ et p transforme $b_{i_1} \dots b_{i_r}$ en $s_{i_1} \dots s_{i_r} = \sigma$, d'où c).

On peut maintenant préciser le théorème 16.

THÉORÈME 19. — *Soient V un espace vectoriel et T un opérateur de Yang-Baxter dans $V_2 = V \otimes V$.*

a) *Il existe un homomorphisme ρ de B_N dans $GL(V_N)$ (où V_N est le produit tensoriel de N copies de V) caractérisé par la relation*

$$\rho(b_i) = T^{i,i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq N-1.$$

b) *L'opérateur T^σ défini dans le théorème 16 est aussi donné par*

$$T^\sigma = \rho(r(\sigma)) \text{ pour } s \in \mathfrak{S}_N.$$

où r est l'application de $\mathfrak{S}_N$ dans B_N définie dans la proposition 18.

Preuve. — L'assertion a) se démontre comme la proposition 18, a). Il suffit d'établir les relations

$(\mathrm{II})_T$ $T^{i,i+1} T^{j,j+1} = T^{j,j+1} T^{i,i+1}$ si $|i-j| \geq 2$;

$(\mathrm{III})_T$ $T^{i,i+1} T^{j,j+1} T^{i,i+1} = T^{j,j+1} T^{i,i+1} T^{j,j+1}$ si $|i-j| = 1$.

La relation $(\mathrm{II})_T$ est immédiate, car les opérateurs $T^{i,i+1}$ et $T^{j,j+1}$ sont appliqués à des couples $(i,i+1)$ et $(j,j+1)$ sans terme commun de facteurs du produit tensoriel V_N. La relation $(\mathrm{III})_T$ se ramène immédiatement à l'équation de Yang-Baxter.

Prouvons b). Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_N$, posons $T^\sigma = \rho(r(\sigma))$. Si $s_{i_1}\ldots s_{i_r}$ est une décomposition réduite de σ, on a $r(\sigma) = b_{i_1}\ldots b_{i_r}$, d'où

$$T^\sigma = T^{i_1,i_1+1}\ldots T^{i_r,i_r+1}.$$

Il en résulte bien que le produit au second membre est le même pour toutes les décompositions réduites $s_{i_1}\ldots s_{i_r}$ de σ.

8. Les tenseurs q-symétriques.

a) *Définition des tenseurs q-symétriques.* — On reprend les notations du paragraphe 5, c'est-à-dire que l'on a $V = \mathbb{C}e_+ \oplus \mathbb{C}e_-$ et $T = T(q)$. On a défini le sous-espace S_q^2 des 2-tenseurs q-symétriques; plus généralement, on pose $\mathfrak{D}_N = S_q^N = \{t \in V_N \mid T^{i,i+1}(t) = t \text{ pour tout } i = 1,\ldots,N-1\}$. Les éléments de $\mathfrak{D}_N$ sont appelés les N-tenseurs q-symétriques : ils sont les q-analogues des tenseurs symétriques habituels (voir la remarque 21). On définit aussi le sous-espace des N-tenseurs q-antisymétriques $\Lambda_q^N = \{t \in V_N \mid T^{i,i+1}(t) = -q^2 t \text{ pour tout } i = 1,\ldots,N-1\}$.

PROPOSITION 20. — *L'espace $\mathfrak{D}_N$ est de dimension $N+1$ et admet la base $(u_0,\ldots,u_N)$, où*

$$u_p = \sum_\alpha q^{I(\alpha)} e_\alpha$$

et où la sommation porte sur les éléments de $\{+,-\}^N$ contenant p fois $+$ et $N-p$ fois $-$; enfin, $I(\alpha)$ est le nombre de fois où $+$ précède $-$ dans α.

Exemples. — Pour $N = 2$ on a : $u_0 = e_{--}$, $u_1 = e_{-+} + qe_{+-}$, $u_2 = e_{++}$. Pour $N = 3$, $u_0 = e_{---}$, $u_1 = e_{--+} + qe_{-+-} + q^2e_{+--}$, $u_2 = e_{-++} + qe_{+-+} + q^2e_{++-}$, $u_3 = e_{+++}$. Pour $N = 4$ on a :

$$u_0 = e_{----};$$
$$u_1 = e_{---+} + qe_{--+-} + q^2e_{-+--} + q^3e_{+---};$$
$$u_2 = e_{--++} + qe_{-+-+} + q^2e_{+--+} + q^3e_{+-+-} + q^2e_{-++-} + q^4e_{++--};$$
$$u_3 = e_{-+++} + qe_{+-++} + q^2e_{++-+} + q^3e_{+++-};$$
$$u_4 = e_{++++}.$$

Remarque 21. — La somme des coefficients dans u_p est égale au coefficient q-binomial de Gauss $\begin{bmatrix} N \\ p \end{bmatrix}_q$, ce qui justifie l'appellation de "*q-analogues des tenseurs symétriques*" pour les éléments de $\mathfrak{D}$.

Démontrons la proposition 20 :

1) Notons $V_{N,p}$ le sous-espace vectoriel de V_N engendré par les e_α où a contient p fois $+$ et $N-p$ fois $-$. On constate que

$$V_N = \bigoplus_{p=0}^{N} V_{N,p}$$

et que chaque $T^{i,i+1}$ laisse stable tous les $V_{N,p}$; par suite, on a :

$$\mathfrak{D}_N = \bigoplus_{p=0}^{N} (\mathfrak{D}_N \cap V_{N,p}).$$

2) Examinons tout d'abord le cas $N = 2$. Vu la forme de la matrice $T = T(q)$, l'équation

$$T = \Big(\sum_{(\alpha,\beta)\in\{+,-\}^2} t_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta} \Big) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\{+,-\}^2} t_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}$$

est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} qt_{-+} = t_{+-} \\ qt_{+-} + (1-q^2)t_{-+} = t_{-+} \end{cases}$$

qui est lui-même équivalent à $qt_{-+} = t_{+-}$. On en déduit immédiatement la base de $\mathfrak{D}_2$ mentionnée dans la proposition 20.

3) Cas général : cherchons une base de $\mathfrak{D}_N \cap V_{N,p}$. Le 2) nous dit qu'un élément de V_N qui s'écrit

$$\sum_{\alpha\in\{+,-\}} t_\alpha e_\alpha$$

appartient à $\mathfrak{D}_N$ si et seulement s'il vérifie

$$t_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},+,-,\alpha_{i+2},\ldots,\alpha_N)} = qt_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},-,+,\alpha_{i+2},\ldots,\alpha_N)}$$

pour tout $i = 1,\ldots,N-1$ et pour tout α. On en déduit qu'un élément de $V_{N,p}$ appartient à $\mathfrak{D}_N$ si et seulement s'il vérifie $t_\alpha = q^{I(\alpha)} t_{(--,\ldots,--,+,\ldots,+)}$ pour tout α contenant p fois $+$ et $N-p$ fois $-$. Par conséquent, $\mathfrak{D}_N \cap V_{N,p}$ est de dimension 1 et est engendré par u_p.

b) *Polynômes tordus.*

Étude du cas $q = 1$: rappelons la structure de l'algèbre symétrique de V :

$$\operatorname{Sym} V = \bigoplus_{N=0}^{\infty} S^N V.$$

Le produit sur $\mathrm{Sym}\, V$ est la multiplication symétrisée, définie de la façon suivante : si u appartient à $S^N V$ et si v appartient à $S^M V$, on pose

$$u.v = \sum_{\sigma} U_\sigma(u \otimes v),$$

où la somme est étendue à toutes les permutations de $\mathfrak{S}_{N+M}$ qui sont croissantes sur $\{1, \ldots, N\}$ et sur $\{N+1, \ldots, N+M\}$. L'opérateur U_σ a été défini au paragraphe 5 pour le cas $N = 3$. En général, on a $U_\sigma(a_1 \otimes \ldots \otimes a_L) = a_\sigma^{-1}(1) \otimes \ldots \otimes a_\sigma^{-1}(L)$ pour toute permutation σ dans $\mathfrak{S}_L$. Le produit $u.v$ est un élément de $S^{N+M}V$ et avec ces notations, les éléments u_p de la proposition 20, dans le cas $q = 1$, sont égaux à $(e_+)^p.(e_-)^{N-p}$. Cette multiplication est associative, commutative et $\mathrm{Sym}\, V$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[e_+, e_-]$ des polynômes en e_+ et e_-.

Cas général : lorsque q est quelconque, on va munir

$$\mathrm{Sym}_q\, V = \bigoplus_{N=0}^{\infty} S_q^N V = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathfrak{D}_N$$

d'une structure d'algèbre associative qu'on appelle *l'algèbre q-symétrique* de V. Si u appartient à $S_q^N V$ et si v appartient à $S_q^M V$, on pose

$$u.v = \sum_{\sigma} q^{2[NM - I(\sigma)]} T^\sigma(u \otimes v),$$

où la somme est étendue à toutes les permutations de $\mathfrak{S}_{N+M}$ qui sont croissantes sur $\{1, \ldots, N\}$ et sur $\{N+1, \ldots, N+M\}$; rappelons que $I(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions de σ et que T^σ a été défini au théorème 16.

Exemples. — Si $N = M = 1$ et $e_-.e_+ = q^2 e_{-+} + T(e_{-+}) = qe_{+-} + e_{-+} = u_1$, on a avec les notations de la proposition 20 : $e_+.e_- = q^2 e_{+-} + T(e_{+-}) = q^2 e_{+-} + qe_{-+} = qu_1$.

PROPOSITION 22. — *L'algèbre* $\mathrm{Sym}_q\, V$ *est isomorphe à la* $\mathbb{C}$*-algèbre engendrée par deux générateurs* e_+ *et* e_- *vérifiant la relation* $e_+e_- = qe_-e_+$.

C'est en ce sens que l'on peut parler de polynômes “tordus”. Dans cette algèbre, on a une q-formule du binôme, à savoir :

$$(e_+ + e_-)^N = \sum_{p=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ p \end{bmatrix}_q e_-^p e_+^{N-p}.$$

Noter que l'algèbre q-symétrique n'est pas commutative si $q \neq 1$.

c) *La décomposition de Clebsch-Gordan.* — Nous allons énoncer les résultats essentiels dans le cas $q = 1$. On sait que $S^N V$ est engendré par les éléments $a^{\otimes N}$ où a parcourt V ; ceci va nous permettre de définir de façon invariante (i.e., sans fixer de base de V) un isomorphisme.

Théorème 23 [Clebsch-Gordan]. — *L'application suivante est un isomorphisme :*

$$S^M V \otimes S^N V \to \bigoplus_{p=0}^{\min(M,N)} \left(S^{M+N-2p} V \otimes (\bigwedge^2 V)^{\otimes_p}\right)$$
$$a^{\otimes M} \otimes b^{\otimes N} \to \sum_{p=0}^{\min(M,N)} \left(a^{M-p}.b^{N-p} \otimes (a \wedge b)^{\otimes_p}\right).$$

Ici V est de dimension 2, donc $\bigwedge^2 V$ est de dimension 1 et finalement, on a un isomorphisme :

$$S^M V \otimes S^N V \cong \bigoplus_{p=0}^{\min(M,N)} S^{M+N-2p} V.$$

Dans le cas où q est quelconque, on a un résultat analogue. Posons

$$\phi(a; q^2) = \prod_{i=1}^{a} \frac{q^{2i} - 1}{q^2 - 1}.$$

On a alors, de manière générale :

$$u_p = \frac{(e_-)^{N-p}(e_+)^p}{\phi(p; q^2)\phi(N-p; q^2)}.$$

Théorème 24. — *Il existe un isomorphisme :*

$$\mathfrak{D}_M \otimes \mathfrak{D}_N \cong \bigoplus_{p=0}^{\min(M,N)} \mathfrak{D}_{M+N-2p}.$$

En particulier, on dispose de la *règle de branchement* :

$$\mathfrak{D}_1 \otimes \mathfrak{D}_M \cong \mathfrak{D}_{M+1} \oplus \mathfrak{D}_{M-1}.$$

On en déduit la décomposition de

$$V_N = \mathfrak{D}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}_1 :$$
$$V_1 = \mathfrak{D}_1;$$
$$V_2 = \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{D}_0;$$
$$V_3 = \mathfrak{D}_3 \oplus 2\mathfrak{D}_1 \ \ldots$$

Pour une étude détaillée des résultats décrits dans ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur à Jimbo [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Artin. — Theorie der Zöpfe, *Abh. der Math. Seminar Hamburg*, t. **4**, 1925, p. 47-72.
[2] R.J. Baxter. — *Exactly solved models in statistical mechanics,*. — Acad. Press, 1982.
[3] N. Bourbaki. — *Groupes et algèbres de Lie* chapitres 4 à 6. — Masson, 1981.
[4] W. Burnside. — *Theory of groups of finite order.* — Dover, 1955.
[5] V. Drinfeld. — Quantum groups, *Proc. Int. Cong. Math. Berkeley*, t. **1**, 1986, p. 798-820.
[6] J. Jimbo. — A q-analog of $U(GL(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.*, t. **11**, 1986, p. 247-252.
[7] V. Jones. — Hecke algebra representations of braid groups, *Ann. Math.*, t. **126**, 1987, p. 335-388.
[8] G. Lusztig. — Quantum deformation of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. Math.*, t. **70**, 1988, p. 237-249.
[9] W. Pauli. — *Lectures on Physics,* vol. 4 *: Statistical mechanics.* — M.I.T. Press, 1973.
[10] M. Rosso. — Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, *Comm. Math. Phys.*, t. **117**, 1988, p. 581-593.
[11] C.N. Yang and M.L. Ge (editors). — *Braid groups, knot theory and statistical mechanics.* — Adv. Series Math. Phys., vol 9, World Scientific, 1989.

Pierre CARTIER,
Département de Mathématiques et d'Informatique,
École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm,
F-75230 PARIS Cedex 05.