Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Computers

Ute Vogel

Im Jahre 1968 wurde im Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques Nr. 260, 1968, S. 32 das folgende Problem gestellt:

> 24 Teilnehmer einer Tagung möchten 8 Tage lang zusammen an Tischen für je 4 Personen zu Mittag essen.
>
> Kann man einen Sitzplan so aufstellen, daß jede Person mit jeder anderen wenigstens einmal zusammen am Mittagstisch sitzt?

Dieses Sitzplan-Problem führt auf den Begriff des Fast-Blockplanes, einer Inzidenzstruktur, die von G. Pickert und K. E. Wolff in den Arbeiten [Pic,70] bzw. [Wol,73] definiert und untersucht worden ist.

Im folgenden wird eine Eigenschaft der Parallelismen von Fast-Blockplänen hergeleitet, die bei der Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Backtracking-Algorithmus die Laufzeit erheblich herabsenkt.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein Inzidenzstruktur ($\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$). Die betrachteten Inzidenzstrukturen $\mathcal{I}$ seien stets endlich, d.h. es gelte $v \risingdotseq |\mathcal{P}| \in \mathbb{N}$ und $b \risingdotseq |\mathcal{B}| \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet.
Für $P \subseteq \mathcal{P}$ sei

$$(P) \risingdotseq \{C \in \mathcal{B} \mid \forall p \in P : pIC\}$$

und $[P] \risingdotseq |(P)|$ die *Verbindungszahl* von P. Analog sei für $B \subseteq \mathcal{B}$

$$(B) \risingdotseq \{p \in \mathcal{P} \mid \forall C \in B : pIC\}$$

und $[B] \risingdotseq |(B)|$ die *Schnittzahl* von B.

Für die Menge $\{p_1, .., p_n\} \subseteq \mathcal{P}$ schreibt man statt $(\{p_1, .., p_n\})$ auch einfach $(p_1, .., p_n)$ und entsprechend für die Verbindungszahl $[p_1, .., p_n]$, analog für $\{C_1, .., C_m\} \subseteq \mathcal{B}$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Ein *Parallelismus* von $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ist eine Äquivalenzrelation $\| \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, die dem „Parallelenaxiom"

$$\forall p \in \mathcal{P}\, \forall B \in \mathcal{B}\, \exists_1 C \in \mathcal{B} :\; pIC \wedge C \parallel B$$

genügt. Die Äquivalenzklassen heißen Parallelenscharen. Inzidenzstrukturen, die einen Parallelismus besitzen, werden *auflösbar* genannt.

Eine *taktische Konfiguration* ist eine Inzidenzstuktur $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ für die gilt:

$$\exists k, r \in \mathbb{N}\, \forall p \mathcal{P} :\; [p] = r \wedge \forall B \in \mathcal{B} : [B] = k.$$

Im Falle $r = k$ nennt man die taktische Konfiguration *symmetrisch* (kurz: STK).

Eine taktische Konfiguration $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ heißt *zerlegbar*, wenn eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ existiert, die eine Zerlegung der Punktmenge in $m > 1$ Klassen von je $n > 1$ Elementen derart induziert, daß

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}_0 \, \forall p, q \in \mathcal{P} : &(\, p \sim q \wedge p \neq q \Rightarrow [p,q] = \lambda_1) \\ &\wedge (\, p \not\sim q \qquad \Rightarrow [p,q] = \lambda_2) \end{aligned}$$

gilt.

Nach [Pic,70] und [Wol,73] wird eine taktische Konfiguration, die den Bedingungen

(FB1) $\forall p, q \in \mathcal{P} : [p,q] \geq 1$

und (FB2) $r \cdot (k-1) = v$

genügt, als *Fast-Blockplan* bezeichnet. Für Fast-Blockpläne gelten die folgenden Parameterbedingungen (vgl. [Wol,73] 1.3):

(1) $\forall p \in \mathcal{P} \, \exists_1 \widetilde{p} \in \mathcal{P} \backslash \{p\} : \, [p, \widetilde{p}] = 2,$

(2) $\forall p, \widetilde{p}, q \in \mathcal{P} : \, p \neq q \neq \widetilde{p} \wedge [p, \widetilde{p}] = 2 \Rightarrow [p,q] = 1,$

(3) $\forall B, C \in \mathcal{B} : \, B \neq C \Rightarrow [B,C] \leq 2.$

(1) und (2) zufolge sind Fast-Blockpläne mit $v > 2$ zerlegbare taktische Konfigurationen mit $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1, \ m = \frac{v}{2}$ und $n = 2$. Da zwei Punkte eines Blockplanes stets dieselbe Verbindungszahl besitzen, stellen Fast-Blockpläne i.a. keine Blockpläne dar.

Ist der Fast-Blockplan $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ auflösbar und bezeichnet s die Anzahl der Blöcke einer Parallelenschar, so gilt offenbar $v = s \cdot k$.

Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein auflösbarer Fast-Blockplan mit $v > 2$. Dann existieren mindestens zwei Parallelenscharen $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{B}$ derart, daß für je zwei Blöcke B, C dieser Parallelenscharen $[B,C] \leq 1$ gilt (vgl. [Vog,89] (2.19)).

Für einen Fast-Blockplan $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, dessen Blockmenge $\mathcal{B}$ zwei disjunkte Teilmengen S_1, S_2 mit den Eigenschaften

$$\bigcup_{B \in S_i} (B) = \mathcal{P}, \ |S_i| = s \text{ für } i \in \{1,2\} \text{ und } \forall B_1 \in S_1, B_2 \in S_2 : [B_1, B_2] \leq 1$$

enthält, wird die Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, S_1 \cup S_2, I|_{\mathcal{P} \times S_1 \cup S_2})$ als **Startkonfiguration** $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ bezeichnet.

Eine Startkonfiguration eines Fast-Blockplanes stellt eine taktische Konfiguration mit $r = 2$ dar. Ist der Fast-Blockplan $\mathcal{F}$ auflösbar und gilt $v > 2$, so können stets zwei Parallelscharen als S_1 und S_2 gewählt werden.

Der realisierte Algorithmus erweitert eine gegebene Startkonfiguration durch sukzessive Konstruktion weiterer Parallelenscharen zu einem auflösbaren Fast-Blockplan. Um zu den vorgegebenen Parametern alle auflösbaren Fast-Blockpläne zu konstruieren, muß das Verfahren auf alle möglichen Startkonfigurationen dieses Fast-Blockplanes angesetzt werden. Zur Bestimmung der Startkonfigurationen betrachtet man symmetrische taktische Konfigurationen, denn jede Startkonfiguration $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, S_1 \cup S_2, I_{\mathcal{F}}|_{S_1 \cup S_2})$ eines Fast-Blockplanes $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I_{\mathcal{F}})$ definiert durch $\mathcal{I} :\Leftrightarrow (S_1, S_2, I)$ mit

$$B_1 I B_2 :\Leftrightarrow (B_1) \cap (B_2) \neq \emptyset \text{ für } B_1 \in S_1 \text{ und } B_1 \in S_2$$

eine symmetrische taktische Konfiguration mit $v' = b' = |S_1|$ und $r' = k' = k$.

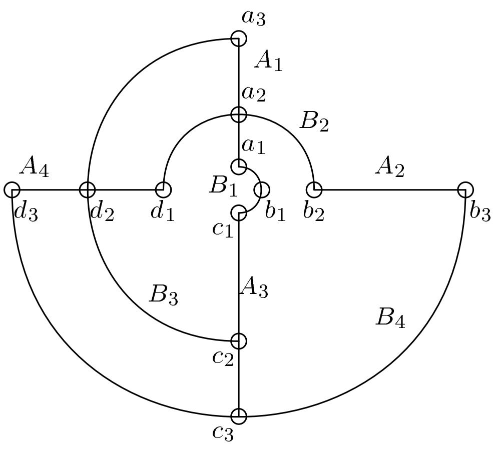
Umgekehrt erhält man aus jeder symmetrischen taktischen Konfiguration $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ mit den Parametern $|\mathcal{P}| = s$ und $[p] = k$ für $p \in \mathcal{P}$ durch

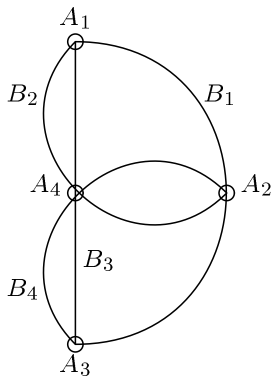
$$\mathcal{P}' \leftrightharpoons I,\ \mathcal{B}' \leftrightharpoons \mathcal{P} \cup \mathcal{B} \text{ sowie } I' \leftrightharpoons \{((x,y),z) | x = z \vee y = z\} \subseteq \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$$

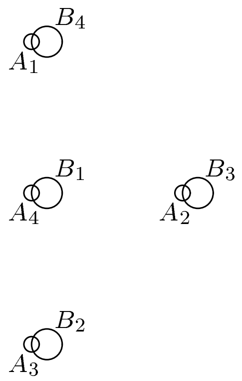
eine auflösbare taktische Konfiguration $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ mit $v' = s \cdot k,\ k' = k,\ r' = 2$ und den beiden Parallelenscharen $S_1 \leftrightharpoons \mathcal{P},\ S_2 = \mathcal{B}$.

Außerdem liefert eine STK $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ mittels $pI^cB \leftrightharpoons \neg(pIB)$ wieder eine STK $\mathcal{I}_c = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I^c)$ mit den Parametern $v_c = v$ und $k_c = v - k$.

Beispiel: Transformation einer Startkonfiguration in die STK $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^c$







Startkonfiguration $\mathcal{I}_\mathcal{F} = (\mathcal{P}_\mathcal{F}, \mathcal{B}_\mathcal{F}, \in)$
eines Fast-Blockplanes $\mathcal{F}$
mit $k_\mathcal{F} = 3, r_\mathcal{F} = 6$ und $s_\mathcal{F} = 4$.

STK $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$
$v = b = s = 4$,
$k = r = k_\mathcal{F} = 3$

STK $\mathcal{I}^c = (\mathcal{P}_c, \mathcal{B}_c, I_c)$
$v_c = b_c = 4$,
$k_c = r_c = 1$,

$\mathcal{P}_\mathcal{F} = \{a_i, b_i, c_i, d_i | i \in \{1,2,3,4\}\}$
$S_1 = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2, d_3\}\}$
$= \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$
$S_2 = \{\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, d_1\}\{a_3, c_2, d_2\}, \{b_3, c_3, d_3\}\}$
$= \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$
$\mathcal{B}_\mathcal{F} = S_1 \cup S_2$.

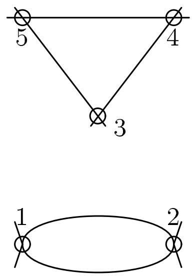
$\mathcal{P} = S_1$
$\mathcal{B} = S_2$
$A_i I B_j \leftrightharpoons (A_i) \cap (B_j) \neq \emptyset$

$\mathcal{P}_c = \mathcal{P}$
$\mathcal{B}_c = \mathcal{B}$
$A_i I_c B_j \leftrightharpoons \neg(A_i I B_j)$

Im folgenden werden taktische Konfigurationen $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, in denen eine Punktmenge $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ existiert so, daß $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ mit $\mathcal{B}' \leftrightharpoons \bigcup_{p \in \mathcal{P}'} (p)$ sowie $I' \leftrightharpoons I|_{\mathcal{P}' \times \mathcal{B}'}$ eine taktische Konfiguration darstellt, reduzibel genannt, anderenfalls irreduzibel.

Die in einer reduziblen taktischen Konfiguration enthaltenen irreduziblen taktischen Konfigurationen nennt man Teilkonfigurationen.

Beispiel:



Die symmetrische taktische Konfiguration
$\mathcal{I} = (\{1,2,3,4,5\},$
$\{(\{1,2\},1), (\{1,2\},2), (\{3,4\},1), (\{3,5\},1), (\{4,5\},1)\}, I)$
mit $pI(B,n) :\Leftrightarrow p \in B$
ist reduzibel und zerfällt in die zwei Teilkonfigurationen
mit $\mathcal{P}_1 = \{1,2\}$ und $\mathcal{P}_2 = \{3,4,5\}$.

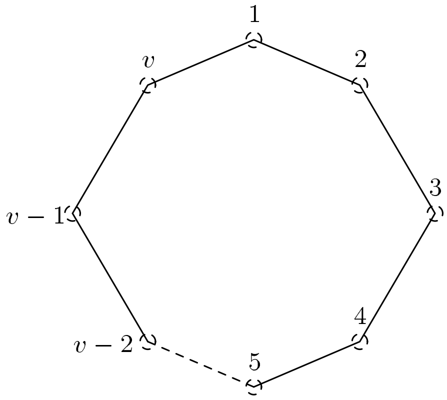
Kennt man die Anzahl $\zeta(v,k)$ der irreduziblen STK mit den Parametern v und k, die nicht zueinander isomorph sind, so kann nach Satz 2.10 aus [Vog,89] die Anzahl $\sigma(v,k)$ aller untereinander nichtisomorphen STK berechnet werden.

Für $k=1$ ist lediglich die STK mit $v=b=1$ irreduzibel, und es gilt $\zeta(v,1)=0$ für $v>1$, woraus man $\sigma(v,1)=1$ für $v \geq 1$, d.h. es existiert stets – bis auf Isomorphie – nur eine STK mit $k=1$ und $v \geq 1$.

Im Fall $k=2$ ist jede irreduziblen STK mit $v \geq 2$ Punkten isomorph zu der STK $\mathcal{R}(v) = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ mit

$\mathcal{P} := \{p_1, .., p_v\}$,
$\mathcal{B} := \{\{\{p_i, p_{i+1}\} | i = 1, .., v-1\}\} \cup \{\{p_1, p_v\}\}$
und $I := \in$.

$\mathcal{R}(v)$



Insbesondere ist also $\zeta(v,2)=1$ für $v \geq 2$.

Beispiele:

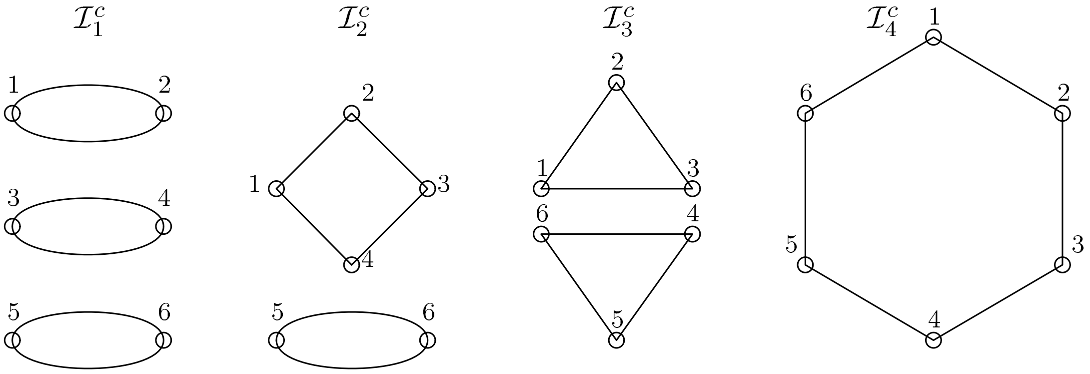
1) **Mögliche Startkonfigurationen eines Fast-Blockplanes $\mathcal{F}$ mit $k=3$ und $r=6$**

$\mathcal{F}$ besitzt (FB2) zufolge $v = 6 \cdot (3-1) = 12$ Punkte. Jede Parallelenschar besteht daher aus $s = \frac{v}{k} = 4$ Blöcken.

Eine Startkonfiguration von $\mathcal{F}$ definiert somit eine STK $\mathcal{I}$ mit 4 Punkten und $k=3$. Aus dieser gewinnt man wie oben angegeben die STK $\mathcal{I}^c$ mit $v=4$ und $k=1$. Wegen $\sigma(v,1)=1$ für $v \geq 1$ ist $\mathcal{I}^c$ eindeutige bestimmt, also auch die Startkonfiguration $\mathcal{I}$. Diese Startkonfiguration kann durch Konstruktion weiterer Parallelenscharen nicht zu einem Fast-Blockplan erweitert werden. Somit kann kein auflösbarer Fast-Blockplan mit $k=3$ und $r=4$ existieren.

2) Startkonfigurationen eines Fast-Blockplanes $\mathcal{F}$ mit $k = 4$ und $r = 8$

Ein Fast-Blockplan mit diesen Parametern beschreibt das eingangs erwähnte Sitzplan-Problem. Wegen $v = 24$ besteht jede Parallelenschar aus $s = 6$ Blöcken. Aus einer Startkonfiguration von $\mathcal{F}$ erhält man daher eine STK $\mathcal{I}$ mit 6 Punkten und $k = 4$. Der Übergang zur STK $\mathcal{I}^c$ liefert die Parameter $v_c = 6$ und $k_c = 2$. Damit kann die Anzahl der nichtisomorphen dieser STK mit Hilfe von $\sigma(6, 2) = 4$ berechnet werden.



Somit existieren für den Fast-Blockplan $\mathcal{F}$ lediglich vier Startkonfigurationen. Ob eine dieser Startkonfigurationen zum Fast-Blockplan $\mathcal{F}$ erweitert werden kann, konnte aufgrund der hohen Zeitbedarfs des verwendeten Backtracking-Algorithmus noch nicht festgestellt werden.

Literatur:

[Pic,70] G. Pickert, *Remarques ur une classe de structures géometriques finies*, Séminaire d'algebre non commutative, Conférence n° 14 du 3 mars 1970.

[Wol,73] K. E. Wolff, *Fast Blockpläne*, Mitt. math. Sem. Giessen **102** (1973).

[Vog,89] U. Vogel, *Algorithmen zur Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Computers*, Diplomarbeit, TU Clausthal, 1989.