ZUR ABZÄHLUNG PERIODISCHER WORTE

von

Andreas DRESS und Christian SIEBENEICHER[1]

Abstract. — We show that the basic bijection Ψ of a diagram which has been introduced in [DS3] (see also [DS2]) to unify the known combinatorial proofs of the so called *cyclotomic identity* (cf. [DS1, MR1, MR2, VW]) and which provides moreover a setting for bijections concerning primitive necklaces, defined and studied by Viennot [V], de Bruijn and Klarner [dBK], and Gessel [DW], may be viewed as a special instance of a more general bijection defined for arbitrary *cyclic sets*. Indeed, if this more general bijection is applied to the cyclic set $P(A)$ of periodic functions on the integers with values in the set A, one gets the bijection discussed in [DS2, DS3].

Eine Beobachtung über Bijektionen

Daß zwischen zwei Mengen mit offensichtlich gleicher Kardinalität nicht immer nur *eine* wohlbestimmte kanonische Bijektion zu existieren braucht, führt das wohlbekannte Beispiel eines affinen Raumes $\mathbf{A}$ und des zugehörige Vektorraum $T(\mathbf{A})$ der Translationen auf $\mathbf{A}$ deutlich vor Augen. Es gibt keine kanonische Bijektion zwischen $T(\mathbf{A})$ und $\mathbf{A}$. Zwar liefert nach Auswahl eines Basispunktes $a \in \mathbf{A}$ die Abbildung $x \mapsto a + x$ eine Bijektion von $T(\mathbf{A})$ auf $\mathbf{A}$, aber diese Abbildung ist natürlich nicht kanonisch, sondern hängt von der Auswahl von a ab. Oder, anders gesagt, sie ist nur dann kanonisch, wenn $a \in A$ ein in irgendeiner Weise ausgezeichneter Punkt ist. Zu einer unabhängig von jeder solchen Auszeichnung stets kanonischen Bijektion kommt man bekanntlich jedoch, sozusagen auf einer höheren Ebene, zwischen den Mengen $\mathbf{A} \times T(\mathbf{A})$ und $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ unter Benutzung der Operation von $T(\mathbf{A})$ auf $\mathbf{A}$: durch die Bijektion $(a, x) \mapsto (a, a + x)$ werden die durch Auswahl eines Nullpunktes definierten unkanonischen Bijektionen $T(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ in gewisser Weise alle in dem folgenden kommutativen Diagramm kanonisch zusammengefaßt:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \times T(\mathbf{A}) \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \mathbf{A} \times \mathbf{A} \arrow[dl, "pr_1"] \\
& \mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen hier und im folgenden die kanonischen Projektionen von dem Produkt zweier Mengen auf den ersten bzw. den zweiten Faktor (und auch deren Einschränkung auf irgendeine Teilmenge des Produktes) mit pr_1 bzw. mit pr_2.

Allgemeiner hat man für jede Gruppe G und jeden Raum X, auf dem G transitiv und treu operiert (also, mit anderen Worten, für jeden *prinzipal homogenen Raum* X zur Gruppe G) ein analoges kommutatives Diagramm, in welchem die durch die Auswahl eines Elementes x aus X definierten nicht kanonischen Bijektionen $g \mapsto x \cdot g$ von G auf X kanonisch zusammengefaßt werden:

[1]Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Postfach 10 01 31, D 33 501 Bielefeld, e–mail: dress@mathematik.uni-bielefeld.de sieben@mathematik.uni-bielefeld.de

$$\begin{tikzcd}
(x,g) \arrow[r, mapsto] & (x, x\cdot g) \\
X \times G \arrow[r] \arrow[dr, "pr_1"'] & X \times X \arrow[d, "pr_1"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Ist insbesondere E eine Menge und ist $E!$ die Gruppe der Permutationen von E, dann liefert die Operation von $E!$ auf der Menge $\mathbf{B}(E,F)$ der Bijektionen von E auf eine mit E gleichmächtige Menge F hierfür ein häufig betrachtetes Beispiel.

Dieses Beispiel kann in der folgenden Weise verallgemeinert werden: Sind $E_1, E_2, \ldots, E_r$ und F gleichmächtige, endliche Mengen, dann ist klar, daß auch die Mengen $\prod_i \mathbf{B}(E_i, E_{i+1})$ und $\prod_i \mathbf{B}(E_i, F)$ gleichmächtig sind. Eine kanonische Bijektion ist auch hier nicht möglich, jedoch hat man wiederum kanonische Bijektionen auf höherem Niveau, zwischen $\prod_i \mathbf{B}(E_i,F) \times \prod_i \mathbf{B}(E_i, E_{i+1})$ und $\prod_i \mathbf{B}(E_i,F) \times \prod_i \mathbf{B}(E_i,F)$ (über $\prod_i \mathbf{B}(E_i,F)$), die durch

$$((\varphi_i);(\sigma_i))_{i \bmod r} \mapsto ((\varphi_i);(\varphi_{i+1}\circ\sigma_i))_{i \bmod r}$$
$$((\varphi_i);(\varphi_{i+1}^{-1}\circ\tau_i))_{i \bmod r} \mapsfrom ((\varphi_i);(\tau_i))_{i \bmod r}$$

definiert sind

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[d, "\varphi_1"] & \\
E_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\sigma_2"'] & F & E_4 \arrow[l, "\varphi_4"] \arrow[ul, "\sigma_4"'] \\
& E_3 \arrow[u, "\varphi_3"] \arrow[ur, "\sigma_3"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& E_1 \arrow[d, shift right, "\tau_1"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_1"] & \\
E_2 \arrow[r, shift left, "\varphi_2"] \arrow[r, shift right, "\tau_2"'] & F & E_4 \arrow[l, shift right, "\tau_4"'] \arrow[l, shift left, "\varphi_4"] \\
& E_3 \arrow[u, shift left, "\varphi_3"] \arrow[u, shift right, "\tau_3"'] &
\end{tikzcd}$$

und die das folgende kommutative Diagramm etablieren:

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_i \mathbf{B}(E_i,F) \times \prod\limits_i \mathbf{B}(E_i,E_{i+1}) \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \prod\limits_i \mathbf{B}(E_i,F) \times \prod\limits_i \mathbf{B}(E_i,F) \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "pr_1"] \\
& \prod_i \mathbf{B}(E_i,F) &
\end{tikzcd}$$

Hat man eine Familie *ausgezeichneter* Bijektionen $\varphi_i : E_i \to F$, sind beispielsweise sämtliche Mengen linear geordnet, so hat man natürlich auch eine *kanonische* Bijektion $\psi : \prod_i \mathbf{B}(E_i, E_{i+1}) \to \prod_i \mathbf{B}(E_i,F)$. Wir werden später hierauf zurückkommen.

Eine Anwendung auf zyklische Mengen

Die kanonische Bijektion

$$\prod_i \mathbf{B}(E_i,F)\times\prod_i \mathbf{B}(E_i,E_{i+1})\to\prod_i \mathbf{B}(E_i,F)\times\prod_i \mathbf{B}(E_i,F)$$

kann in der Sprache der *zyklischen Mengen* auf folgende einfache, aber überraschend folgenreiche Weise interpretiert werden:

Sei X eine Menge, sei α eine auf X wirkenden Permutation[2] und sei $S(X) := \{u : X \to \mathbf{N}_0 \mid \sum_{x\in X} u(x) < \infty\}$ das in [DS1] betrachtete frei von X erzeugte kommutative Monoid, kurz die *symmetrische Algebra* von X, die aus allen auf X definierten Funktionen mit Werten in $\mathbf{N}_0 := \{0,1,2,\dots\}$ und endlichem Träger $supp(u) := \{x \in X \mid u(x) \neq 0\}$ besteht. Der Shift–Operator von X induziert durch $\alpha \cdot u := u\circ\alpha^{-1}$ einen Shift–Operator auf $S(X)$, der auch $S(X)$ zu einer zyklischen Menge macht. Für $u \in S(X)$ sei[3] $[u] := \{(x,i) \mid x \in X,\ i \in [u(x)]\} \subset X \times \mathbf{N}_0$. Die Menge $[u]$ ist genau dann invariant unter dem naheliegenden Shift–Operator auf $X\times\mathbf{N}_0$, wenn u eine shift–invariante Funktion auf X ist. Die Menge der shift–invarianten Elemente von $S(X)$ sei mit $s(X)$ bezeichnet.

Für jede endliche Menge E und jede Abbildung $\pi : E \to X$ ist die Funktion ${}^{\#}\pi : X \longrightarrow \mathbf{N}_0$, die definiert ist durch $x \mapsto \#\pi^{-1}(x)$, ein Element von $S(X)$. Dieses Element ist genau dann invariant unter dem Shift–Operator (und liegt dann in $s(X)$), wenn über jeder Bahn von X sämtliche Fasern von π gleichviel Elemente haben. Bezeichnet man die Menge derjenigen Abbildungen π von E nach X, für welche ${}^{\#}\pi$ shift–invariant ist, mit $X^{(E)}$, dann liefert die Zuordnung $\pi \mapsto {}^{\#}\pi$ eine kanonische Abbildung ${}^{\#} : X^{(E)} \to s(X)$.

Seien nun für festes $\pi : E \to X$ aus $X^{(E)}$ mit

$$T_{X,\pi}(E) := \{\sigma \in E! \mid \pi\circ\sigma = \alpha\circ\pi\}$$

die Menge der mit π verträglichen Shift–Operatoren $\sigma : E \xrightarrow{\sim} E$ und mit

$$s_{X,\pi}(E) := \{\Phi \in \mathbf{B}(E,[{}^{\#}\pi]) \mid pr_1\circ\Phi = \pi\}.$$

die Menge der Bijektionen zwischen E und $[{}^{\#}\pi]$ über X bezeichnet.

Besteht $\pi(E) = supp({}^{\#}\pi)$ aus einer einzigen Bahn des Shift–Operators α, wählt man ein beliebiges Element $x \in \pi(E)$, bezeichnet man die Fasern von π über der Bahn $x, \alpha\cdot x, \dots, \alpha^{r-1}\cdot x$ von x mit $E_1, E_2, \dots, E_r$ und setzt man $F = [{}^{\#}\pi(x)]$, so definiert

$$\begin{gathered} T_{X,\pi}(E) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} \mathbf{B}(E_i,E_{i+1}) \\ \sigma \mapsto (\sigma|_{E_1}, \sigma|_{E_2}, \dots, \sigma|_{E_r}) \end{gathered}$$

(was wegen $\sigma(E_i) = \sigma(\pi^{-1}(\alpha^{i-1}\cdot x)) = \pi^{-1}(\alpha^i\cdot x) = E_{i+1}$ wohldefiniert ist!) und

$$\begin{gathered} s_{X,\pi}(E) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} \mathbf{B}(E_i,F) \\ \Phi \mapsto (pr_2\circ\Phi|_{E_1}, pr_2\circ\Phi|_{E_2}, \dots, pr_2\circ\Phi|_{E_r}) \end{gathered}$$

kanonische Bijektionen, die folglich eine kanonische Bijektion

[2] Wir wollen dann X eine *zyklische Menge* mit *Shift–Operator* α nennen.

[3] Für jede natürliche Zahl n setzen wir $[n] := \{1,\dots,n\}$.

$$\begin{tikzcd}
s_{X,\pi}(E) \times T_{X,\pi}(E) \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_1"'] & & s_{X,\pi}(E) \times s_{X,\pi}(E) \arrow[dl, "pr_1"] \\
& s_{X,\pi}(E) &
\end{tikzcd}$$

über den jeweiligen Projektionen auf den ersten Faktor induzieren.

Diese Bijektion läßt sich sogar für ganz beliebiges π auch ohne Bezug auf die obige einführende Diskussion direkt durch Betrachten der umkehrbar eindeutigen Korrespondenz

$$(\Phi, \sigma) \leftrightarrow (\Phi, \Phi') \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi'|_{\pi^{-1}(x)} = \Phi|_{\pi^{-1}(\alpha x)} \circ \sigma|_{\pi^{-1}(x)}$$
$$\text{für alle } x \in X$$

etablieren.

Durch Einachränkung dieser Korrespondenz auf die Fasern (jeweils bezüglich der Abbildung pr_1) über einem beliebigen Element $\Phi \in s_{X,\pi}(E)$ erhält man folglich auch (von der Auswahl von Φ abhängige) Bijektionen $\psi_\Phi : T_{X,\pi}(E) \to s_{X,\pi}(E)$. Für den Fall, daß E linear geordnet ist (insbesondere also im Falle $E = [n]$), gibt es in $s_{X,\pi}$ genau ein Element $\Phi_\pi : E \xrightarrow{\sim} [{}^{\#}\pi]$, dessen Einschränkung auf jede der Fasern von π monoton wächst. In dieser Situation hat man deshalb sogar eine kanonische Bijektion $\psi_\pi : T_{X,\pi}(E) \to s_{X,\pi}(E)$.

Definiert man schließlich für jede endliche Menge E die Mengen

$$T_X(E) := \{(\sigma, \pi) \mid \sigma \in E!,\ \pi \in X^E, \pi \circ \sigma = \alpha \circ \pi\} \subset E! \times X^{(E)}$$

bzw.

$$s_X(E) := \{(u, \Phi) \mid u \in s(X), \Phi \in \mathbf{B}(E, [u])\},$$

dann sind die Mengen $T_{X,\pi}(E)$ bzw. $s_{X,\pi}(E)$ gerade die Fasern der Projektions–Abbildung $pr_2 : T_X(E) \to X^{(E)}$ bzw. der Abbildung $t : s_X(E) \to X^{(E)}$, die definiert ist durch $(u, \Phi) \mapsto pr_1 \circ \Phi$ und deren Komposition mit der Abbildung ${}^{\#} : X^{(E)} \to s(X)$ gleich der Projektion $pr_1 : s_X(E) \to s(X)$ ist. Die obige Korrespondenz liefert also eine kanonische und über der jeweiligen Projektion auf den ersten Faktor fasertreue Bijektion der Faserprodukte

$$\begin{tikzcd}
s_X(E) \underset{X^{(E)}}{\times} T_X(E) \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_1"'] & & s_X(E) \underset{X^{(E)}}{\times} s_X(E) \arrow[dl, "pr_1"] \\
& s_X(E) &
\end{tikzcd}$$

Sie induziert durch Einschränkung auf das Bild eines (beliebigen) Schnittes $\rho : X^{(E)} \to s_X(E)$ für die Abbildung $t : s_X(E) \to X^{(E)}$ eine (von ρ abhängige) Bijektion $\psi_\rho : T_X(E) \to s_X(E)$. Falls die Menge E linear geordnet ist, existiert wiederum ein kanonischer Schnitt

$$\rho_X^E : X^{(E)} \to s_X(E) \qquad \pi \mapsto ({}^{\#}\pi, \Phi_\pi)$$

so daß in diesem Falle auch eine kanonische Bijektion

$$\psi_X^E : T_X(E) \xrightarrow{\sim} s_X(E)$$

existiert.

Bemerkung
Für den Fall, daß die Menge E linear geordnet ist, liefert die Komposition des Schnittes $\rho_X^E : X^{(E)} \to s_X(E)$ mit dem Inversen der kanonischen Bijektion $\psi_X^E : T_X(E) \to s_X(E)$ einen kanonischen Schnitt für die Abbildung $pr_2 : T_X(E) \to X^{(E)}$. In dem Bild (σ_π, π) von π unter diesem Schnitt, ist σ_π diejenige der Gleichung $\pi \circ \sigma = \alpha \circ \pi$ genügende Permutation von E, die auf den Fasern von π monoton wächst.

Der Spezialfall der Menge der periodischen Funktionen

Ist speziell $X = P(A)$, gleich der zyklischen Menge der auf $\mathbf{Z}$ definierten *periodischen Funktionen*[4] mit Werten in der Menge A (cf. [DS3]), dann hat man zusätzlich zu den vielen von der Auswahl eines Schnittes $\rho : X^{(E)} \to s_X(E)$ abhängigen (unkanonischen) Bijektionen $T_{P(A)}(E) \to s_{P(A)}(E)$ noch eine kanonische Bijektion $\omega : E! \times A^E \longrightarrow T_{P(A)}(E)$. Sie ist wie folgt definiert: für jedes Element $(\sigma, f) \in E! \times A^E$ und jedes $\epsilon \in E$ wird durch die Zuordnung $i \mapsto f(\sigma^i(\epsilon))$ eine periodische Punktion $f_\sigma^\epsilon : \mathbf{Z} \to A$ definiert. Die Zuordnung $\epsilon \mapsto f_\sigma^\epsilon$ ist mit σ und dem Shift–Operator α verträglich (d.h., es ist $f_\sigma^\epsilon \circ \sigma = \alpha \circ f_\sigma^\epsilon$), und sie definiert daher eine äquivariante Abbildung $\pi_{\sigma,f} : (E, \sigma) \longrightarrow (P(A), \alpha)$. Durch die Zuordnung

$$(\sigma, f) \mapsto (\sigma, \pi_{\sigma,f})$$

wird daher eine natürliche Abbildung

$$\omega : E! \times A^E \longrightarrow T_{P(A)}(E)$$

definiert, die leicht als Bijektion zu erkennen ist: ihre Umkehrabbildung ist durch

$$(\sigma, \pi) \mapsto (\sigma, ev \circ \pi)$$

gegeben, wobei $ev : P(A) \to A$ durch die Zuordnung $g \mapsto g(0)$ definiert ist. Abstrakt gesehen resultieren diese Bijektionen aus der Tatsache, daß der Funktor $A \mapsto P(A)$ von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der zyklischen Mengen links–adjungiert zum Vergißfunktor ist, wobei die Evaluationsabbildung ev eine der beiden Adjunktionsabbildungen ist und die Zuordnung $f \mapsto \pi_{\sigma,f}$ die andere Adjunktionsabbildung definiert.

Auf der Menge $E! \times A^E$ hat man eine Reihe weiterer kanonisch definierter Abbildungen.

- Die Projektion $\quad pr_2 : E! \times A^E \to A^E$
- Die Abbildung $\quad r : E! \times A^E \to P(A)^{(E)} \qquad (\sigma, f) \mapsto \pi_{\sigma,f}$.
  Für sie gilt $r = pr_2 \circ \omega$.
- Die Abbildung $\quad q : E! \times A^E \to s(P(A)) \qquad (\sigma, f) \mapsto u_{\sigma,f}$,

  wobei (cf. [DS2, DS3]) $\quad u_{\sigma,f}(g) := \#\{\epsilon \in E \mid f_\sigma^\epsilon = g\} = {}^{\#}\pi_{\sigma,f}(g)$

  ist. Für diese Abbildung gilt daher $q = {}^{\#} \circ r$.

Darüber hinaus induziert die Komposition mit der Evaluation $ev : P(A) \to A$ eine kanonische Abbildung $ev^* : P(A)^{(E)} \to A^E$. Für die Komposition von ev^* mit der Abbildung $t : s_{P(A)}(E) \to P(A)^{(E)}$ gilt:

$$ev^* \circ t\,(u, \Phi) = ev^*(pr_1 \circ \Phi) = ev \circ pr_1 \circ \Phi.$$

Die Komposition $ev^* \circ t$ ist daher gleich der in [DS2, DS3] definierten Abbildung[5]

[4] Der Shift–Operator $\alpha : P(A) \to P(A)$ ist definiert durch $(\alpha \cdot g)(i) := g(i+1)$ für alle $g \in P(A)$

[5] Man beachte, daß dort die Menge $s_{P(A)}(E)$ mit $S^A(E)$ bezeichnet wurde.

$p : s_{P(A)}(E) \to A^E$. Ferner sieht man unmittelbar, daß die zu dem Element $(\sigma, f) \in E! \times A^E$ gehörige Abbildung $ev^* \circ r(\sigma, f) = ev^*(\pi_{\sigma,f}) : E \to A$ in folgender Weise wirkt: $\epsilon \mapsto f_\sigma^\epsilon(0) = f(\epsilon)$, und dies bedeutet, daß $ev^* \circ r = pr_2$ ist.

Schließlich hat man noch eine natürliche Abbildung (cf. [DS3])

$$\delta : s(P(A)) \to S(A) \qquad \delta(u)(a) = \sum_{g(0)=a} u(g),$$

und eine analog zur Abbildung ${}^{\#} : P(A)^{(E)} \to s(P(A))$ definierte Abbildung ${}^{\#} : A^E \to S(A)$. Es ist klar, daß für jedes Element $\pi \in P(A)^{(E)}$ gilt: $\delta({}^{\#}\pi) = {}^{\#}(ev \circ \pi)$. Dies bedeutet aber, daß die Kompositionen $\delta \circ pr_1 : P(A)^{(E)} \to S(A)$ und ${}^{\#} \circ p : P(A)^{(E)} \to S(A)$ übereinstimmen.

Wir fassen nun alle diese Daten in dem folgenden kommutativen Diagramm zusammen. In ihm sind, bis auf die von der Auswahl eines t–Schnittes $\rho : X^{(E)} \to s_X(E)$ abhängende Bijektion $\psi_\rho : T_{P(A)}(E) \to s_{P(A)}(E)$, sämtliche Abbildungen kanonisch:

$$\begin{tikzcd}
 & & E! \times A^E \arrow[dll, "pr_2"'] \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, "\omega"] \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, "q"] & & \\
A^E \arrow[ddrr, "\#"'] & P(A)^{(E)} \arrow[l, "ev^*"'] & T_{P(A)}(E) \arrow[l, "pr_2"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\psi_\rho"] & P(A)^{(E)} \arrow[r, "\#"] & s(P(A)) \arrow[ddll, "\delta"] \\
 & & s_{P(A)}(E) \arrow[ull, "p"] \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[urr, "pr_1"'] & & \\
 & & S(A) & &
\end{tikzcd}$$

Ist $E = [n]$, dann hat man, wie wir gesehen haben, einen kanonischen t–Schnitt $\rho_A^n := \rho_{P(A)}^{[n]} : P(A)^{[n]} \to s_{P(A)}([n])$ und folglich auch eine kanonische Bijektion $\psi_A^n := \psi_{P(A)}^{[n]} : T_{P(A)}(E) \to s_{P(A)}(E)$. Setzt man nun

$$s^n(P(A)) := \{u \in s(P(A)) \mid |u| := \sum_{g \in P(A)} u(g) = n\},$$

und entsprechend $S^n(A) := \{v \in S(A) \mid |v| := \sum_{a \in A} v(a) = n\}$, dann geht unser Diagramm in das folgende Diagramm über, in welchem nunmehr sämtliche Pfeile kanonisch und surjektiv und die senkrechten Pfeile Bijektionen sind:

$$
\begin{tikzcd}
& & {[n]! \times A^n} \arrow[dll, "pr_2"'] \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, "\omega"] \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, "q"] & & \\
A^n \arrow[ddrr, "\#"'] & P(A)^{([n])} \arrow[l, "ev^*"'] & T_{P(A)}([n]) \arrow[l, "pr_2"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\psi_A^n"] & P(A)^{([n])} \arrow[r, "\#"] & s^n(P(A)) \arrow[ddll, "\delta"] \\
& & s_{P(A)}([n]) \arrow[ull, "p"] \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[urr, "pr_1"'] & & \\
& & S(A) & &
\end{tikzcd}
$$

In diesem Diagramm erkennt man in dem dicker ausgezogenen Rhombus das in [DS2, DS3] etablierte Viereck, und aus einem Vergleich mit der dort gegebenen Definition für die Abbildung Ψ geht unmittelbar hervor, daß diese mit der Komposition $\psi_A^n \circ \omega$ übereinstimmt. Ferner lassen sich die dort gezogenen Folgerungen aus dem vervollständigten Diagramm besonders bequem ablesen:

1. Hat die Menge A die Kardinalität q, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
n! \cdot q^n &= \#[n]! \times A^{[n]} = \#T_{P(A)}([n]) = \#s_{P(A)}([n]) \\
&= \sum_{u \in s^n(P(A))} \#pr_1^{-1}(u) \\
&= \sum_{u \in s^n(P(A))} n! \\
&= n! \cdot \#s^n(P(A))
\end{aligned}
$$

und es folgt

$$q^n = \#s^n(P(A))$$

2. Ist $v \in S^n(A)$, dann ist die Anzahl der Elemente $f \in A^n$, für die ${}^{\#}f = v$ ist, bekanntlich gleich dem (in [DS2, DS3] mit $((v))$ bezeichneten) Multinomialkoeffizienten $\binom{n}{v} := \frac{n!}{v!} := \frac{n!}{\prod_{a \in A} v(a)!}$. Folglich ist die Anzahl der $(u, \Phi) \in s_{P(A)}([n])$, die durch die Komposition ${}^{\#} \circ p$ auf v abgebildet werden, gleich der Anzahl der $(\sigma, \pi) \in T_{P(A)}([n])$, die durch ${}^{\#} \circ ev^* \circ pr_2$ auf v abgebildet werden, also gleich $n! \cdot \binom{n}{v}$. Andererseits ist diese Anzahl wegen der Kommutativität des unteren Vierecks in unserem Diagramm aber auch die Anzahl der Urbilder von v unter $\delta \circ pr_1$, und da alle Fasern der Projektion $pr_1 : s_{P(A)}([n]) \to s^n(P(A))$ die gleiche Kardinalität $n!$ haben, folgt, daß die Menge $\delta^{-1}(v)$ genau $\binom{n}{v}$ Elemente hat. Für diese Menge gilt aber

$$
\begin{aligned}
\delta^{-1}(v) &= \{u \in s^n(P(A)) \mid \delta(u) = v\} \\
&= \{u \in s^n(P(A)) \mid \sum_{g(0)=a} u(g) = v(a) \quad \text{für alle } a \in A\}
\end{aligned}
$$

Definiert man also für jede Bahn T (unter dem Shift–Operator α) in $P(A)$ und jedes $a \in A$ die Zahlen

$$
\begin{aligned}
\Delta(a, T) &:= \#\{g \in T \mid g(0) = a\} \\
&= \sum_{\substack{g \in T \\ g(0)=a}} 1
\end{aligned}
$$

und setzt $u(T)$ gleich dem gemeinsamen Wert von u auf allen Elementen der Bahn $T \subset P(A)$, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\delta^{-1}(v) &= \{u \in s^n(P(A)) \mid \sum_{T \subset P(A)} \Delta(a,T) \cdot u(T) = v(a) \quad \text{für alle } a \in A\} \\
&= \{u \in s^n(P(A)) \mid \Delta \cdot u = v\}.
\end{aligned}$$

Wegen $\#\delta^{-1}(v) = \binom{n}{v}$ ergibt sich hieraus also unmittelbar die Aussage von Theorem 1 aus [DS2], daß die Anzahl der ganzzahligen, nicht negativen Lösungen der linearen diophantischen Gleichung $\Delta \cdot u = v$ gerade gleich $\binom{n}{v}$ ist.

3. Ist die Menge A linear geordnet, beispielsweise $A = \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, dann tragen auch die Mengen A^n und $P(A)$ kanonische lineare Ordnungen. Auf der Menge A^n ist es die lexikographische Ordnung, auf der Menge $P(A)$ ist es die folgendermaßen definierte lineare Ordnung: Es gilt $g < g'$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbf{N}_0$ gibt, so daß

$$\begin{aligned}
ev(\alpha^k \cdot g) &< ev(\alpha^k \cdot g') \\
ev(\alpha^{k-1} \cdot g) &= ev(\alpha^{k-1} \cdot g') \\
\vdots &= \vdots \\
ev(\alpha \cdot g) &= ev(\alpha \cdot g') \\
ev(g) &= ev(g')
\end{aligned}$$

gilt.

Betrachtet man $P(A)$ mit dieser Ordnung, dann gibt es zu jedem $u \in s^n(P(A))$ genau eine monotone Abbildung $\pi_u : [n] \to P(A)$, für die ${}^\#\pi_u = u$ ist. Die Zuordnung $u \mapsto \pi_u$ definiert also einen kanonischen Schnitt $\lambda : s^n(P(A)) \to P(A)^{([n])}$ für die Abbildung $^\# : P(A)^{([n])} \to s^n(P(A))$. Die Komposition $\rho_A^n \circ \lambda : s^n(P(A)) \to s_{P(A)}([n])$ von λ mit dem am Ende des letzten Paragraphen definierten t–Schnitt $\rho_A^n : P(A)^{([n])} \to s_{P(A)}([n])$ liefert daher einen Schnitt für die Komposition $^\# \circ t$. Komponiert mit dem Inversen von ψ_A^n definiert dieser eine kanonische, eineindeutige Korrespondenz zwischen den Elementen von $s^n(P(A))$ und der Menge derjenigen Elemente $(\sigma, \pi) \in T_{P(A)}([n])$, für die die Abbildung $\pi : [n] \to P(A)$ monoton wächst und die Permutation σ auf den *Konstanz–Intervallen* von π (d.h. den Fasern von π) ebenfalls monoton wächst. Da die Evaluationsabbildung $ev : P(A) \to A$ gleichfalls monoton wächst, ist die Komposition $f := ev \circ \pi$ für jedes Element (σ, π) der beschriebenen Menge, ebenso wie die Funktion π monoton wachsend. Es zeigt sich, daß die Permutation σ sogar auf den Fasern der Funktion f monoton wächst. Sind nämlich ϵ und ϵ' Elemente von $[n]$ mit $\epsilon < \epsilon'$, $f(\epsilon) = f(\epsilon')$ aber $\pi(\epsilon) < \pi(\epsilon')$, dann gilt aufgrund der Definition der Ordnung in $P(A)$ auch $\alpha \cdot \pi(\epsilon) < \alpha \cdot \pi(\epsilon')$. Weil π äquivariant ist, folgt hieraus $\pi(\sigma(\epsilon)) < \pi(\sigma(\epsilon'))$, und da π monoton wächst, folgt hieraus $\sigma(\epsilon) < \sigma(\epsilon')$. Insgesamt erhält man damit die folgende Aussage (cf. [DW]):

Gessel's Lemma

Ist die Menge A linear geordnet, dann definiert der q–Schnitt

$$(\psi_A^n \circ \omega)^{-1} \circ \lambda : s^n(P(A)) \to [n]! \times A^{([n])}$$

eine Bijektion von $s^n(P(A))$ auf die Menge derjenigen Elemente $(\sigma, f) \in [n]! \times A^{([n])}$, für die die Funktion f monoton wächst und die Permutation σ auf den Fasern von f ebenfalls.

Genauso einfach läßt sich im Falle eines linear geordneten A die von DE BRUIJN und KLARNER definierte Bijektion $A^n \xrightarrow{\sim} s^n P(A)$ (cf. [dBK]) durch die Konstruktion geeigneter Schnitte in dem obigen Diagramm herleiten (cf. [DS3]).

Zyklische Mengen und Funktoren

Aus unserer Diskussion folgt weiterhin, daß die Kardinalitäten der Werte der Funktoren

$$E \mapsto T_X(E)$$

und

$$E \mapsto s_X(E),$$

die auf der Kategorie der enlichen Mengen (mit den Bijektionen als Morphismen) definiert sind, übereinstimmen, d.h. daß für jede endliche Menge E

$$\# T_X(E) = \# s_X(E)$$

gilt. Als unmittelbare Konsequenz der Definitionen ergeben sich darüber hinaus die folgenden funktoriellen Bijektionen:

$$T_{X \sqcup Y}(E) \cong \coprod_{F \subset E} T_X(F) \times T_Y(E \setminus F)$$

und

$$s_{X \sqcup Y}(E) \cong \coprod_{F \subset E} s_X(F) \times s_Y(E \setminus F).$$

Mit der von JOYAL vorgeschlagenen Definition des Produktes solcher Funktoren (cf. [J]) hat man also

$$T_{X \sqcup Y} \cong T_X \cdot T_Y \quad \text{und} \quad s_{X \sqcup Y} \cong s_X \cdot s_Y.$$

Ist daher $X \cong \coprod a_k C(k)$ die kanonische Zerlegeung der zyklischen Menge X in Bahnen, wobei $C(k)$ den *Zyklus der Länge* k bezeichnet und a_k die Vielfachheit angibt, mit der dieser in der Zyklenzerlegung von X vorkommt, dann hat man die kanonischen Zerlegungen

$$T_X(E) \cong \prod (T_{C(k)}(E))^{a_k}$$

und

$$s_X(E) \cong \prod (s_{C(k)}(E))^{a_k}.$$

Für die Kardinalitäten der Werte des Funktor $s_{C(k)}$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition (siehe auch [DS1]):

$$\# s_{C(k)}(E) = \begin{cases} (\# E)! & \text{falls} \quad k \text{ ein Teiler von } \# E \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man erhält somit für die von JOYAL in [J] für Funktoren F der obigen Art definierte *Kardinalität*

$$\# F := \sum_{n=0}^{\infty} \# F([n]) \cdot \frac{t^n}{n!}$$

im Falle $F = T_{C(k)}$ und $F = s_{C(k)}$ die Reihe

$$\# T_{C(k)} = \# s_{C(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} (k \cdot i)! \frac{t^{k \cdot i}}{(k \cdot i)!} = \frac{1}{1 - t^k}.$$

Für die Kardinalität der zu einer beliebigen zyklischen Menge gehörigen Funktoren ergibt sich dann wegen der leicht zu verifizierenden Formel $\#(F_1 \cdot F_2) = \#F_1 \cdot \#F_2$ die folgende Identität von Potenzreihen:

$$\#T_X = \#s_X = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^j} \right)^{a_j} .$$

Ist insbesondere $X = P(A)$ und enthält die Menge A gerade q Elemente, dann liefert die kanonische Zyklenzerlegung

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} M(q,j)C(j)$$

von $P(A)$, in welcher die Koeffizienten $M(q,j)$ gerade die durch Möbius Inversion berechenbaren und im Kontext der *zyklotomischen Identität* diskutierten (cf. [MR1, MR2, DS1]) Größen

$$M(q,j) = \frac{1}{j} \sum_{d|j} \mu(j) q^{j/d}$$

bezeichnen, zusammen mit der aus unserem Diagramm folgenden Tatsache, daß $\#s^n(P(A)) = q^n$ ist, die folgende Identität von Potenzreihen

$$\frac{1}{1-qt} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^j} \right)^{M(q,j)} ,$$

also gerade die zyklotomische Identität.

Literatur

[dBK] de Bruijn (N.G.) and Klarner (D.A.) — *Multisets of aperiodic cycles*, SIAM J. Alg. Disc. Meth., vol. **3** (1982), 359–368.

[DS1] Dress (A.W.M.) and Siebeneicher (Ch.) — *The Burnside Ring of the Infinite Cyclic Group and its Relations to The Necklace Algebra, λ–Rings and The Universal Ring of Witt Vectors* (1987); to appear in: Advances in Mathematics.

[DS2] Dress (A.W.M.) und Siebeneicher (Ch.) — *Ein Lemma über Perlenketten*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 20^e session, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, (1988), 47–55.

[DS3] Dress (A.W.M.) and Siebeneicher (Ch.) — *On the Number of Solutions of Certain Linear Diophantine Equations* to appear in: Hokkaido Mathematical Journal.

[DW] Désarménien (J.) et Wachs (M.) — *Descentes des dérangement et mots crculaires*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 19^e session, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, (1988), 13–21.

[J] Joyal (A.) — *Une Théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, vol. **42** (1981), 1–82.

[MR1] Metropolis (N.) and Rota (G.-C.) — *Witt Vectors and the Algebra of Necklaces*, Advances in Mathematics, vol. **50** (1983), 95–125.

[MR2] Metropolis (N.) and Rota (G.-C.) — *The cyclotomic Identity*, Contemporary Mathematics, vol. **34** Amer. Math. Soc. (1984), 19–24.

[V] Viennot (G.) — *Algébre de Lie Libres et Monoides Libres*, Lecture Notes in Mathematics **691**, Springer (1978).

[VW] Varadarajan (K.) and Wehrhahn (K.), *Aperiodic Rings, Necklace Rings and Witt Vectors*, preprint (1988).