Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B18d, 1987, 9 pp.

UNE EXTENSION D'UNE FORMULE DE RAMANUJAN-BAILEY

PAR

JIANG ZENG

RÉSUMÉ. — L'identité de Ramanujan-Bailey, qui établit une relation symétrique entre deux séries hypergéométriques ${}_3F_2$, est généralisée en une relation symétrique entre deux séries hypergéométriques ${}_4F_3$. On construit également un modèle symétrique qui rend compte de cette symétrie. Enfin, on donne un q-analogue de cette extension.

ABSTRACT. — The Ramanujan-Bailey identity that establishes a symmetric relation between two hypergeometric series ${}_3F_2$ is extended to a symmetric relation between two hypergeometric series ${}_4F_3$. We also give a symmetric model that makes this symmetry evident. Finally, we obtain a q-analog of this extension.

1. Introduction. — Dans une lettre de 1913, RAMANUJAN [Ra, p. 351] a donné la formule suivante :

$$(1)\quad \frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{n+3}+\cdots$$
$$=\left\{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2+\cdots \text{au } (n+1)^{\text{ième}} \text{ terme}\right\},$$

où n (et aussi m dans le reste de l'article) désigne un entier positif.

On notera que la série du premier membre est infinie et que la somme du second membre ne comprend que $(n+1)$ termes, comme l'indique la notation classique "au $(n+1)^{\text{ième}}$ terme."

La première démonstration de cette formule fut publiée par WATSON [Wa1] en 1929. Depuis lors, DARLING [Da], BAILEY [Ba1], HODGKINSON [Ho], WHIPPLE [Wi] et BAILEY [Ba2] ont donné à leur tour de nouvelles démonstrations et généralisations. On pourra se reporter aux livres de BAILEY [Ba3, p. 92–93], HARDY [Ha, chap. VII] et SLATER [Sl, p. 81] pour une description plus détaillée de l'historique des travaux inspirés par cette formule. Notons enfin que WATSON [Wa2] a même donné une application intéressante à l'étude des constantes de Lebesgue et Landau.

La dernière généralisation due à BAILEY (*cf.* [Ba2], [Ba3], [Ha], [Sl]) de la formule (1) s'écrit :

$$\begin{aligned}(2)\quad &\frac{\Gamma(x+m+1)\Gamma(y+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(x+y+m+1)}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}x,y,v+m\\ v,x+y+m+1\end{matrix};1\right)\right]_{n+1}\\ &\qquad=\frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(x+y+n+1)}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}x,y,v+n\\ v,x+y+n+1\end{matrix};1\right)\right]_{m+1},\end{aligned}$$

où suivant la notation de HARDY [Ha, p. 112], seuls les premiers $(n+1)$ (resp. $(m+1)$) termes des deux séries sont retenus.

Lorsque $x=y=1/2$, $v=1$, cette formule se réduit à l'identité :

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+1)}\right\}^2\left\{\frac{1}{m+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{m+2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{m+3}+\cdots\right.\\ &\hspace{18em}\left.\text{au }(n+1)^{\text{ième}}\text{ terme}\right\}\\ &\quad=\left\{\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\right\}^2\left\{\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{n+3}+\cdots\right.\\ &\hspace{18em}\left.\text{au }(m+1)^{\text{ième}}\text{ terme}\right\},\end{aligned}$$

qui donne le théorème de RAMANUJAN lorsque m tend vers $+\infty$.

L'objet de la présente Note est de donner et de démontrer une extension naturelle de la formule (2), à savoir :

$$\begin{aligned}(3)\quad &\frac{\Gamma(x+z+m)\Gamma(y+z+m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(x+y+z+m)}{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,x,y,v+m\\ v,x+y+z+m,1-n-z\end{matrix};1\right)\\ &\qquad=\frac{\Gamma(x+z+n)\Gamma(y+z+n)}{\Gamma(z+n)\Gamma(x+y+z+n)}{}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,x,y,v+n\\ v,x+y+z+n,1-m-z\end{matrix};1\right).\end{aligned}$$

Elle est comme la formule (2) à la fois symétrique en n, m et en x, y ; elle contient un paramètre z supplémentaire, d'où l'apparition de la série ${}_4F_3$, au lieu de ${}_3F_2$.

Cette formule se réduit évidemment à l'identité (2) de Bailey lorsque $z=1$. De plus, elle contient comme autre cas particulier l'identité de AL-SALAM-FIELDS [Al-Fi] :

$$\begin{aligned}(4)\quad &\frac{\Gamma(x+z+m)\Gamma(y+z+m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(x+y+z+m)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,x,y\\ x+y+z+m,1-n-z\end{matrix};1\right)\\ &\qquad=\frac{\Gamma(x+z+n)\Gamma(y+z+n)}{\Gamma(z+n)\Gamma(x+y+z+n)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m,x,y\\ x+y+z+n,1-m-z\end{matrix};1\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir (4) il suffit dans (3) de faire tendre v vers $+\infty$. A son tour, (4) se réduit à l'identité de Pfaff-Saalschütz, lorsque $m=0$.

Nous présentons ici deux démonstrations de (3). La première fait appel à une transformation de séries due à WHIPPLE ; la deuxième est une méthode originale de nature combinatoire, qui inspira, en fait, l'extension (3). Nous donnons enfin le q-analogue de (3) en appliquant par deux fois la q-formule de Whipple.

2. La démonstration analytique. — Notons $(a)_n$ les factorielles montantes :

$$(a)_0=1, \qquad (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1) \quad (n\ge 1).$$

La formule de Whipple (*cf.* [Ba3, p. 56]) s'écrit :

$$(5)\quad {}_4F_3\left({-n,a,b,c \atop d,e,f};1\right) = \frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n}\,{}_4F_3\left({-n,a,d-b,d-c \atop d,1-e+a-n,1-f+a-n};1\right),$$

où $d+e+f=a+b+c-n+1$.

Dans (5), si l'on pose $a=x$, $b=y$, $c=v+m$, $d=v$, $e=x+y+z+m$ et $f=1-n-z$, on obtient :

$$(6)\quad {}_4F_3\left({-n,x,y,v+m \atop v,x+y+z+m,1-n-z};1\right) = \frac{(y+z+m)_n(1-n-z-x)_n}{(x+y+z+m)_n(1-n-z)_n}\,{}_4F_3\left({-n,x,v-y,-m \atop v,1-y-z-m-n,x+z};1\right).$$

On suppose que $m\le n$. Appliquant de nouveau (5) au second membre de (6) et posant $n=m$, $a=x$, $b=v-y$, $c=-n$, $d=v$, $e=1-y-z-m-n$ et $f=x+z$, l'identité (6) devient alors :

$$(7)\quad {}_4F_3\left({-n,x,y,v+m \atop v,x+y+z+m,1-n-z};1\right) = \frac{(y+z+m)_n(1-n-z-x)_n}{(x+y+z+m)_n(1-n-z)_n} \times \frac{(1-x-y-z-m-n)_m(z)_m}{(1-y-z-m-n)_m(x+z)_m}\,{}_4F_3\left({-m,x,y,v+n \atop v,x+y+z+m,1-n-z};1\right).$$

Si l'on multiplie (7) par

$$\frac{(1-y-z-m-n)_m(x+z)_m}{(1-x-y-z-m-n)_m(z)_m}$$

et exprime les factorielles montantes comme des fonctions gamma, on trouve bien l'identité (3).

Remarque. — Dans un article récent, WIMP [Wi, p. 990] a établi, de façon relativement élaborée, la formule suivante :

$$(8)\quad {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+x, y, z\\ x-1, y+1, z+1\end{matrix};1\right) = \frac{n!\,yz}{(y-z)(x-1)_{n+1}}\left[\frac{(x-z-1)_{n+1}}{(z)_{n+1}} - \frac{(x-y-1)_{n+1}}{(y)_{n+1}}\right]$$

et a avancé le fait que cette formule ne pouvait être déduite de la formule de Whipple (5 ci-dessus). C'est, en fait, possible : il suffit d'utiliser la même technique que ci-dessus, c'est-à-dire appliquer la formule de Whipple *deux fois*. Cette méthode a même l'avantage de fournir un q-analogue de la formule de WIMP elle-même (*cf.* § 5).

En effet, si l'on pose $a = z$, $b = y$, $c = n + x$, $d = x - 1$, $e = y + 1$ et $f = z + 1$ dans (5), on a immédiatement :

$$(9)\quad {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+x, y, z\\ x-1, y+1, z+1\end{matrix};1\right) = \frac{(y+1-z)_n(1)_n}{(y+1)_n(z+1)_n}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, -n-1, x-y-1, z\\ x-1, z-y-n, -n\end{matrix};1\right).$$

D'autre part, on remarque que

$$(10)\quad {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, -n-1, x-y-1, z\\ x-1, z-y-n, -n\end{matrix};1\right) = {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n-1, -n-1, x-y-1, z\\ x-1, z-y-n, -n-1\end{matrix};1\right) - \frac{(x-y-1)_{n+1}(z)_{n+1}}{(x-1)_{n+1}(z-y-n)_{n+1}}.$$

Si l'on pose de nouveau $a = z$, $b = x - y - 1$, $c = -n - 1$, $d = -n - 1$, $e = x - 1$ et $f = z - y - n$ dans (5), on trouve :

$$(11)\quad {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n-1, -n-1, x-y-1, z\\ x-1, z-y-n, -n-1\end{matrix};1\right) = \frac{(x-z-1)_{n+1}(-y-n)_{n+1}}{(x-1)_{n+1}(z-y-n)_{n+1}}.$$

En reportant (10), puis (11) dans (9), on obtient l'identité (8).

3. Le modèle symétrique. — Nous avons déja démontré dans [Ze] qu'il y a un modèle symétrique pour l'identité d'Al-Salam-Fields. C'est en fait dans la recherche d'un modèle symétrique pour l'identité de Bailey que l'extension (3) a été découverte. Chassons les dénominateurs dans (3), on est conduit à l'identité polynomiale :

$$
\begin{aligned}
(12)\quad & (x+z)_m(y+z)_m(v)_m \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k(y)_k(v+m)_k(v+k)_{n-k}(x+y+z+m+k)_{n-k}(z)_{n-k} \\
&= (x+z)_n(y+z)_n(v)_n \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x)_k(y)_k(v+n)_k(v+k)_{m-k}(x+y+z+n+k)_{m-k}(z)_{m-k}.
\end{aligned}
$$

Quelques notions de base sont nécessaires pour décrire le modèle combinatoire qui permet d'interpréter l'identité (12). Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinal m et n respectivement. Rappelons d'abord que le polynôme générateur de l'ensemble des injections σ de A dans $A+B$ par le nombre de cycles, noté $\operatorname{cyc}\sigma$, est donné par (*cf.* [Fo-St]) :

$$
\sum_{\sigma} a^{\operatorname{cyc}\sigma} = (a+n)_m. \tag{13}
$$

Soit E un sous-ensemble de $A+B$. Étant donnée une *application* σ de E dans $A+B$, un élément a de E est dit *homogène* si $a \in A$ (resp. B) entaîne $\sigma(a) \in A$ (resp. B). Une *application tricolore* de E dans $A+B$ est définie comme étant un couple (σ, f_σ), où σ est une application de E dans $A+B$ et f_σ une application de l'ensemble des cycles de σ dans $\{1,2,3\}$. Par commodité, pour chaque cycle c de σ, on appelle $f_\sigma(c)$ la *couleur* de c. Dans le cas particulier où σ est une *endofonction* (resp. *injection*, resp. *permutation*), le couple (σ, f_σ) se réduit à une *endofonction* (resp. *injection*, resp. *permutation*) *tricolore*. Notons enfin $\operatorname{cyc}_i(\sigma, f_\sigma)$ le nombre de cycles de (σ, f_σ) de couleur i ($i = 1,2,3$).

Si l'on associe à (σ, f_σ) le poids

$$
w\big((\sigma, f_\sigma)\big) = \alpha^{\operatorname{cyc}_1(\sigma,f_\sigma)} d^{\operatorname{cyc}_2(\sigma,f_\sigma)} \beta^{\operatorname{cyc}_3(\sigma,f_\sigma)},
$$

il est alors facile, d'après (13), d'établir l'identité :

$$
\sum_{(\sigma,f_\sigma)} w\big((\sigma, f_\sigma)\big) = (\alpha+\beta+d+n)_m, \tag{14}
$$

où la sommation est étendue à toutes les injections tricolores de A dans $A+B$.

Considérons maintenant l'ensemble $T[A,B;1,2,3]$ de tous les triplets $(\varphi, (\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))$, où φ est une permutation de $A+B$, et où (σ, f_σ) et

(τ, g_τ) sont deux permutations tricolores de $A+B$ ayant les propriétés suivantes :

(i) tous les cycles de (σ, f_σ) (resp. (τ, g_τ)) de couleur 1 sont entièrement contenus dans A (resp. B) ;

(ii) tous les cycles de (σ, f_σ) (resp. (τ, g_τ)) de couleur 3 sont entièrement contenus dans B (resp. A) ;

(iii) tous les cycles de (σ, f_σ) (resp. (τ, g_τ)) de couleur 2 sont entièrement contenus dans l'ensemble des éléments homogènes de φ (resp. A ou B).

D'après la définition ci-dessus, chaque élément de $T[A, B; 1, 2, 3]$ est en même temps un élément de $T[B, A; 3, 2, 1]$ et vice versa. D'où

$$T[A, B; 1, 2, 3] = T[B, A; 3, 2, 1].$$

De façon équivalente, si l'on munit chaque triplet $(\varphi, (\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))$ de $T[A, B; 1, 2, 3]$ de la fonction-poids :

$$\begin{aligned}(15)\quad w\big((\varphi, (\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))\big) = v^{\operatorname{cyc}\varphi} x^{\operatorname{cyc}_1(\sigma, f_\sigma)} z^{\operatorname{cyc}_2(\sigma, f_\sigma)} y^{\operatorname{cyc}_3(\sigma, f_\sigma)} \\ x^{\operatorname{cyc}_1(\tau, g_\tau)} z^{\operatorname{cyc}_2(\tau, g_\tau)} y^{\operatorname{cyc}_3(\tau, g_\tau)},\end{aligned}$$

alors le polynôme générateur $F(A, B; x, y, z, v)$ de $T[A, B; 1, 2, 3]$ par la fonction-poids ci-dessus est *symétrique* en (A, x) et (B, y), à savoir

$$(16)\qquad F(A, B; x, y, z, v) = F(B, A; y, x, z, v).$$

Pour établir combinatoirement l'identité de Ramanujan-Bailey, il suffit de montrer que $F(A, B; x, y, z, v)$ est égale à l'un des deux membres de (12) ; autrement dit, il suffit d'établir l'identité :

$$\begin{aligned}(17)\quad & F(A, B; x, y, z, v) = (x+z)_m (y+z)_m (v)_m \\ & \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_k (v+m)_k (v+k)_{n-k} (x+y+z+m+k)_{n-k} (z)_{n-k}.\end{aligned}$$

En effet, il est facile d'interpréter le second membre de l'identité (17). Pour tout sous-ensemble K de B, on note $Q_K[A, B; 1, 2, 3]$ l'ensemble des triplets (φ, σ, τ) tels que :

(i) φ est une endofonction de $A+B$; de plus, la restriction φ_A à l'ensemble A est une *permutation* de A et la restriction $\varphi_{B\setminus K}$ (resp. φ_K) est une *injection* de $B \setminus K$ dans B (resp. de K dans $A+K$) ;

(ii) σ (resp. τ) est une *endofonction tricolore* de $A+B$; de plus, la restriction σ_A (resp. τ_A) est une *permutation tricolore* de A n'ayant que des cycles de couleur 1 ou 2 (resp. 3 ou 2) ; en outre, la restriction $\sigma_{B\setminus K}$ (resp.

$\tau_{B\setminus K}$) est une *injection tricolore* de $B \setminus K$ dans $A+B$ (resp. *permutation tricolore* de $B \setminus K$, n'ayant que des cycles de couleur 2) ; enfin, σ_K (resp. τ_K) est une *permutation tricolore* de K n'ayant que des cycles de couleur 3 (resp. 1).

On pose

$$Q[A,B;1,2,3] = \bigcup_K Q_K[A,B;1,2,3] \qquad (K \subseteq B).$$

Si K est de cardinal k, on a d'après (13) et (14) :

$$\begin{aligned}
\sum_\varphi w(\varphi) &= \sum w(\varphi_A) \sum w(\varphi_{B\setminus K}) \sum w(\varphi_K) \\
&= (v)_m (v+k)_{n-k} (v+m)_k, \\
\sum_\sigma w(\sigma) &= \sum w(\sigma_A) \sum w(\sigma_{B\setminus K}) \sum w(\sigma_K) \\
&= (x+z)_m (x+y+z+m+k)_{n-k} (y)_k, \\
\sum_\tau w(\tau) &= \sum w(\tau_A) \sum w(\tau_{B\setminus K}) \sum w(\tau_K) \\
&= (y+z)_m (z)_{n-k} (x)_k.
\end{aligned}$$

Comme il y a $\binom{n}{k}$ tels sous-ensembles $K \subseteq B$, la fonction génératrice de $Q[A,B;1,2,3]$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (v)_m (v+k)_{n-k} (v+m)_k \\
(x+z)_m (x+y+z+m+k)_{n-k} (y)_k (y+z)_m (z)_{n-k} (x)_k,$$

qui est exactement le second membre de (17).

La démonstration consiste à construire une bijection entre le modèle symétrique $T[A,B;1,2,3]$ et le modèle $Q[A,B;1,2,3]$, dont on vient de calculer la fonction génératrice. Nous ne détaillons pas la construction de cette bijection. Le lecteur pourra retrouver toutes les étapes du passage du modèle T au modèle Q dans [Ze1, chap. 7].

4. Le q-analogue. — En utilisant le q-analogue de la transformation (5) de Whipple, la formule (3) peut se q-généraliser. Introduisons d'abord la q-factorielle montante :

$$(a;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n), \qquad (a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

et la fonction hypergéométrique basique (*cf.* [Ba3]) :

$$ {}_r\Phi_s\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_s \end{matrix}; q, x\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n}{(b_1;q)_n\cdots(b_s;q)_n}\frac{x^n}{(q;q)_n}. $$

Le q-analogue de la transformation de Whipple (*cf.* [Jo-St]) s'écrit :

$$ (18)\quad {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} a, b, q^{1-n}/f, q^{-n} \\ c, q^{1-n}/d, q^{1-n}/e \end{matrix}; q, q\right] \\ = \left(\frac{c}{ab}\right)^n \frac{(f/d;q)_n(f/e;q)_n}{(d;q)_n(e;q)_n}\, {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} c/a, c/b, q^{1-n}/f, q^{-n} \\ c, q^{1-n}d/f, q^{1-n}e/f \end{matrix}; q, q\right], $$

où $cf = abde$.

De façon analogue, en appliquant deux fois la formule (12), on obtient :

$$ (19)\quad \frac{(q^n xyz;q)_m(z;q)_m}{(q^n xz;q)_m(yz;q)_m}\, {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-m}, x, y, vq^n \\ v, q^n xyz, q^{1-m}/z \end{matrix}; q, q\right], \\ = \frac{(q^m xyz;q)_n(z;q)_n}{(q^m xz;q)_n(yz;q)_n}\, {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, x, y, vq^m \\ v, q^m xyz, q^{1-n}/z \end{matrix}; q, q\right]. $$

Introduisons maintenant, suivant Jackson [Ja], le q-analogue de la fonction Γ :

$$ \Gamma_q(a) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^a;q)_\infty}(1-q)^{1-a}, \quad a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-. $$

Dans (13), si l'on remplace x, y, z, et v par q^x, q^y, q^z et q^v respectivement, et de plus, si l'on exprime les q-factorielles montantes en q-analogue de la fonction Γ, on obtient un véritable q-analogue de (3), à savoir :

$$ (20)\quad \frac{\Gamma_q(x+z+m)\Gamma_q(y+z+m)}{\Gamma_q(z+m)\Gamma_q(x+y+z+m)}\, {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^x, q^y, q^{v+m} \\ q^v, q^{x+y+z+m}, q^{1-n-z} \end{matrix}; q, q\right], \\ = \frac{\Gamma_q(x+z+n)\Gamma_q(y+z+n)}{\Gamma_q(z+n)\Gamma_q(x+y+z+n)}\, {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-m}, q^x, q^y, q^{v+n} \\ q^v, q^{x+y+z+n}, q^{1-m-z} \end{matrix}; q, q\right]. $$

Comme signalé dans la remarque de la section 2, la formule de Wimp (8) peut se q-généraliser comme suit :

$$ (21)\quad {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, xq^n, y, z \\ xq^{-1}, yq, zq \end{matrix}; q, q\right] = \frac{(q;q)_n(1-y)(1-z)}{(z-y)(xq^{-1};q)_{n+1}} \\ \times\left[z^{n+1}\frac{(x/(zq);q)_{n+1}}{(z;q)_{n+1}} - y^{n+1}\frac{(x/(yq);q)_{n+1}}{(y;q)_{n+1}}\right] $$

ou bien encore, si on fait les substitutions $x \leftarrow q^x$, $y \leftarrow q^y$, $z \leftarrow q^z$ dans (21), comme :

$$(22)\quad {}_4\Phi_3\left[{q^{-n}, q^{n+x}, q^y, q^z \atop q^{x-1}, q^{y+1}, q^{z+1}} ; q, q\right] = \frac{(q;q)_n(1-q^y)(1-q^z)}{(q^z-q^y)(q^{x-1};q)_{n+1}} \times \left[q^{(n+1)z}\frac{(q^{x-z-1};q)_{n+1}}{(q^z;q)_{n+1}} - q^{(n+1)y}\frac{(q^{x-y-1};q)_{n+1}}{(q^y;q)_{n+1}}\right].$$

Cette dernière identité se réduit à la formule (8) lorsque l'on fait tendre q vers 1.

BIBLIOGRAPHIE

[Al-Fi] Al-Salam (W.A.) and Fields (J.L.). — An identity for Double Hypergeometric Series (Problem 85-24 proposed by Srivastava (H.M.), *SIAM Review*, vol. **28**, 1986, p. 576–578.

[Ba1] Bailey (W.). — The partial sum of the coefficients of the hypergeometric series, *J. London Math. Soc.*, vol. **6**, 1931, p. 40–41.

[Bai2] Bailey (W.). — On one of Ramanujan's theorems, *J. London Math. Soc.*, vol. **7**, 1932, p. 34–36.

[Bai3] Bailey (W.). — *Generalized hypergeometric series.* — Cambridge, The University Press, 1935.

[Da] Darling (H.B.C.). — On a proof of one of Ramanujan's theorems, *J. London Math. Soc.*, vol. **5**, 1930, p. 8–9.

[Fo-St] Foata (Dominique) and Strehl (Volker). — Combinatorics of Laguerre polynomials, *Enumeration and Design* [Waterloo. June–July 1982 : D.M. Jackson and S.A. Vanstone, eds.], p. 123–140. — Toronto, Academic Press, 1984.

[Ha] Hardy (G.H.). — *Ramanujan.* — New York, Chelsea, 1940.

[Ho] Hodgkinson (J.). — Note on one of Ramanujan's theorems, *J. London Math. Soc.*, vol. **6**, 1931, p. 42–43.

[Ja] Jackson (F.H.). — On q-definite integrals, *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, vol. **41**, 1910, p. 193–203.

[Jo-St] Joichi (J.T.) and Stanton (Dennis). — Bijective proofs of basic hypergeometric series identities, *Pacific J. Math.*, vol. **127**, 1987, p. 103–120.

[Ra] Ramanujan (Srinivasa). — *Collected Papers.* — New York, Chelsea, reprinted in 1962.

[Sl] Slater (Lucy Joan). — *Generalized hypergeometric functions.* — Cambridge, The University Press, 1966.

[Wa1] Watson (G.N.). — Theorems stated by Ramanujan (VIII) : Theorems on divergent series, *J. London Math. Soc.*, vol. **4**, 1929, p. 82–86.

[Wa2] Watson (G.N.). — The constants of Landau and Lebesgue, *Quarterly J. Math.*, vol. **1**, 1930, p. 310–318.

[Wh] Whipple (F.J.W.). — The sum of the coefficients of a hypergeometric series, *J. London Math. Soc.*, vol. **5**, 1930, p. 192.

[Wi] Wimp (Jet). — Explicit formulas for the associated Jacobi polynomials and some applications, *Can. J. Math.*, vol. **34**, 1987, p. 983–1000.

[Ze] Zeng (Jiang). — Un modèle symétrique pour l'identité de Al-Salam-Fields, *J. Disc. Math.*, vol. **85**, 1989, p. 207-213.

[Ze1] Zeng (Jiang). — Calcul Saalschützien. Thése doctorat, Strasbourg, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988 360/TS-05.