SYMMETRISCHE POTENZEN ZYKLISCHER MENGEN UND PRODUKTZERLEGUNGEN VON ERZEUGENDEN FUNKTIONEN

Christian Siebeneicher

Sei $a = a(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ eine formale Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten und mit konstantem Glied 1. Dann gibt es bekanntlich eindeutig bestimmte unendliche Folgen $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$ und $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$ ganzer Zahlen, so daß

$$\begin{aligned} a(t) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^n} \right)^{b_n} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q_n t^n} \\ &= \exp \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^{n-1} \, dt \right) \end{aligned}$$

ist.

Bekannte Beispiele solcher „Umparametrisierungen" sind Eulers Produkt

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) \cdot t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^n}$$

für die erzeugende Funktion der Anzahl der Partitionen und die zyklotomische Identität

$$\frac{1}{1 - qt} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^n} \right)^{M(q,n)},$$

die Gauß für die Berechnung der Anzahl $M(q,n)$ der irreduziblen Polynome vom Grade n und höchstem Koeffizienten 1 über einem endlichen Körper mit q Elementen benutzte.

Es wird gezeigt, daß diese Umparametrisierungen rein kombinatorisch mit Hilfe zyklischer Mengen (d.h. Mengen, auf denen die unendliche zyklische Gruppe C operiert) interpretiert werden können. Hierzu betrachtet man zu einer Folge $\mathbf{b} =$

$(b_1, b_2, \dots)$ ganzer Zahlen die — möglicherweise unendliche und für negative b_n auch nur virtuelle, aber bis auf C-Isomorphie eindeutig bestimmte — zyklische Menge $X = X(\mathbf{b})$, die genau b_n Bahnen der Länge n hat. Dann gilt:

(1) d_n ist gleich der Anzahl derjenigen Elemente von X, die invariant sind unter der Operation der Untergruppe C^n der n-ten Potenzen der Elemente von C, die in C den Index n hat.
(2) a_n ist die Anzahl $s^n(X)$ der C-invarianten Elemente der n-ten symmetrischen Potenz von X.
(3) X besitzt eine eindeutig bestimmte disjunkte Zerlegung $X = r(\mathbf{q}) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{ind}_n q_n^{(C)}$, wobei $q_n^{(C)}$ die zyklische Menge der Kongruenzabbildungen von C in eine endliche Menge mit q_n Elementen bezeichnet und $\mathrm{ind}_n q_n^{(C)}$ die Induktion dieser Menge relativ zur n-ten Potenzabbildung $z \mapsto z^n$ von C in sich ist.

Grundlage für den Beweis dieser Aussagen ist das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
W(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r} & \hat{\Omega}(C) & \xrightarrow{s_t} & \Lambda(\mathbb{Z}) \\
\Phi\downarrow & & \hat{\phi}\downarrow & & L_{\mathbb{Z}}\downarrow \\
\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{offensichtliche}} & gh(C) & \xrightarrow{\text{Identifizierung}} & t\mathbb{Z}[[t]],
\end{array}$$

dessen horizontale Pfeile kanonisch definierte Isomorphismen sind, in dem $W(\mathbb{Z})$ der universelle Ring der Wittvektoren ist, $\hat{\Omega}(C)$ der Burnsidering der im wesentlichen endlichen zyklischen Mengen und $\Lambda(\mathbb{Z})$ Grothendiecks Ring der formalen Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten und konstantem Glied 1.

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Postfach 8640, D–4800 Bielefeld 1, Germany