LA DÉMONSTRATION DES IDENTITÉS DE GORDON ET MACMAHON ET DE DEUX IDENTITÉS NOUVELLES(*)

Jacques Désarménien (**)

Introduction

Les identités de Gordon et de MacMahon peuvent être interprétées comme les fonctions génératrices des tableaux semi-standard en des puissances de q, les exposants étant les entiers de 1 à n pour Gordon et les entiers impairs de 1 à $2n-1$ pour MacMahon. La forme de ces tableaux est quelquonque, mais leur longueur est limitée. MacMahon conjectura son identité [7] dans la terminologie des partitions planes; le passage aux tableaux semi-standard est facile et classique. Gordon, de son côté, démontra son identité, mais il fut le publié beaucoup plus tard[1] (pour d'autres détails, *cf.* Stanley [8]).

Les deux identités furent démontrées simultanément par Andrews [1] et Macdonald [6]. La démonstration d'Andrews (et aussi celle-ci de Gordon) est essentiellement un calcul de déterminant, nécessitant de nombreuses manipulations de lignes et de colonnes; le résultat apparaît finalement assez miraculeux. La démonstration de Macdonald a l'avantage de se rattacher à un modèle classique, celui des systèmes de racines, et les manipulations, assez nombreuses aussi, y sont un peu plus naturelles.

Dans la présente note, nous donnons les grandes étapes de la démonstration de Macdonald et nous indiquons brièvement comment, par la même méthode, on obtient deux identités qui généralisent une identité de Desainte-Catherine et Viennot [3]. Ce dernier sujet sera repris dans [4].

(*) Soutien par le P.R.C. Mathématiques et Informatique
(**) Départment d'informatique, I.U.T. Strasbourg III, 72, route du Rhin, F-67400 Illkirch-Graffenstaden

[1]B. Gordon, *"A proof of the Bender–Knuth conjecture,"* Pacific J. Math. **108** (1983), 99–113.

1. Les identités

Nous réduirons les préliminaires au minimum, en renvoyant au livre de Macdonald [6]. Un *tableau semi-standard* est le remplissage d'un diagramme de Ferrers par des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ de sorte que les indices vont en *croissant strictement* dans les *colonnes* et en *croissant au sens large* dans les *lignes*. La partition $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ associée au diagramme de Ferrers est la *forme* du tableau, et son ordre est la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$.

La *fonction de Schur* $S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ est la somme sur l'ensemble des tableaux semi-standard de forme λ du produit des indéterminées qui y apparaissent. Les identités de Gordon et de MacMahon font intervenir des spécialisations de ces indéterminées en puissances de l'indéterminée q.

Théorème 1.1. — *On a les identités suivantes :*

$$\sum_{\lambda \subset m^n} S_\lambda(q^n, q^{n-1}, \ldots, q) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{q^{m+i+j-1} - 1}{q^{i+j-1} - 1} \qquad (\textit{Gordon});$$

$$\sum_{\lambda \subset m^n} S_\lambda(q^{2n-1}, q^{2n-3}, \ldots, q) = \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{q^{m+2i-1} - 1}{q^{2i-1} - 1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{2(m+i+j-1)} - 1}{q^{2(i+j-1)} - 1} \qquad (\textit{MacMahon}).$$

Lorsqu'on fait $q = 1$ dans les identités précédentes, on obtient une formule unique, donnant le nombre de tableaux semi-standard contenus dans le rectangle m^n; si T_λ désigne le nombre de tableaux semi-standard de forme λ, on a :

$$\sum_{\lambda \subset m^n} T_\lambda = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{m + i + j - 1}{i + j - 1}.$$

Nous dirons que la forme (ou partition) λ est *paire* lorsque chaque part λ_i est un nombre pair. La formule conjecturée par Desainte-Catherine et démontrée par Desainte-Catherine et Viennot est l'analogue de la formule précédente lorsqu'on se restreint aux partitions paires :

$$\sum_{\lambda \subset (2m)^n} T_\lambda = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2m + i + j}{i + j} \qquad (\lambda \text{ paire}).$$

Les deux identités nouvelles annoncées sont des équivalens des identités de Gordon et de MacMahon pour les partitions paires, et elles donnent la formule de Desainte-Catherine et Viennot lorsque $q = 1$. La seconde peut d'ailleurs s'interpréter comme fonction génératrice de certaines partitions planes.

Théorème 1.2. — *On a les identités suivantes :*

$$\sum_{\lambda\subset(2m)^n} S_\lambda(q^n, q^{n-1}, \ldots, q) = \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{q^{2m+i+j}-1}{q^{i+j}-1};$$

$$\sum_{\lambda\subset(2m)^n} S_\lambda(q^{2n-1}, q^{2n-3}, \ldots, q)$$

$$= \prod_{1\le i\le n} \frac{q^{2m+2i}-1}{q^{2i}-1} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{q^{2(2m+i+j)}-1}{q^{2(i+j)}-1};$$

où la somme est limitée aux partitions λ paires.

2. Séries génératrices de fonctions de Schur

Deux identités dues à Littlewood [5] sont à la base de la démonstration.

Théorème 2.1. — *On a les identités suivantes :*

$$\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\lambda S_\lambda(x_1, \ldots, x_n),$$
$$= \prod_{1\le i\le n} (1-x_i)^{-1} \prod_{1\le i<j\le n} (1-x_ix_j)^{-1};$$
$$\Phi_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\lambda S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\lambda \textit{ paire}),$$
$$= \prod_{1\le i\le n} (1-x_i^2)^{-1} \prod_{1\le i<j\le n} (1-x_ix_j)^{-1}.$$

La hauteur de la partition λ étant limitée par le nombre n de variables qui figurent dans la fonction S_λ, il faut trouver des fonctions génératrices semblables, dans lesquelles la longueur de λ est majorée :

$$S_1(u) = \sum_{\lambda_0,\lambda} S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)u^{\lambda_0} \qquad (\lambda = \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots,\ \lambda_0 \ge \lambda_1);$$

$$S_2(u) = \sum_{\lambda_0,\lambda} S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)u^{\lambda_0} \qquad (\textit{idem},\ \lambda_0,\ \lambda \text{ pairs}).$$

Récrivons $\lambda = \mu_1^{r_1}\mu_2^{r_2}\ldots\mu_k^{r_k}$, où l'on suppose que les μ_i sont strictement décroissants, que $\mu_k \ge 0$ et que les r_i sont strictement positifs de somme n. Si l'on note $\mathcal{S}_n^\lambda = \mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{r_k}$ le groupe des permutations laissant λ invariante, la fonction de Schur S_λ vaut [6, p. 104] :

$$S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w\in\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_n^\lambda} w\Bigl(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{\lambda_i>\lambda_j} \frac{x_i}{x_i-x_j}\Bigr),$$

où la permutation w agit sur les indices des indéterminées.

Pour $Y \subset X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, posons $p(Y) = \prod\{x_i \in Y\}$. La donnée de $w \in \mathcal{S}_n/\mathcal{S}_n^\lambda$ est équivalente à la donnée d'une surjection $f : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$ telle que $|f^{-1}(i)| = r_i$.

Avec ces nouvelles notations, on peut écrire :

$$S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_f p(f^{-1}(1))^{\mu_1} \cdots p(f^{-1}(k))^{\mu_k} \prod_{f(x_i)<f(x_j)} \frac{x_i}{x_i - x_j}.$$

La fonction f est à son tour en bijection avec la *filtration* $\mathcal{F}$ définie par :

$$\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = X, \qquad x_i \in F_l \Leftrightarrow f(x_i) \leq l.$$

On dit que cette filtration est de longueur k, et on remarque que $|F_l| = r_1 + r_2 + \cdots + r_l$ et que toutes les inclusions sont strictes, ce qui équivaut à la surjectivité de f. Une telle filtration est dite *compatible* avec λ. Posons de plus $\nu_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k-1$ et $\nu_k = \mu_k$ de sorte que $\nu_i > 0$ si $i < k$ et $\nu_k \geq 0$. Si $\mathcal{F}$ est une filtration, notons :

$$\pi_\mathcal{F} = \prod_{f(x_i)<f(x_j)} \frac{x_i}{x_i - x_j}.$$

On peut donc écrire :

$$(*) \qquad S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\mathcal{F} \pi_\mathcal{F} \prod_{1 \leq i \leq k} p(F_i)^{\nu_i},$$

où la sommation est étendue à toutes les filtrations compatibles avec λ.

On est alors en mesure de démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.2. — *Les séries $S_1(u)$ et $S_2(u)$ sont des fractions rationnelles en u de la forme :*

$$S_1(u) = \sum_{Y \subset X} \frac{a(Y)}{1 - p(Y)u};$$
$$S_2(u) = \sum_{Y \subset X} \frac{b(Y)}{1 - p(Y)^2 u^2}.$$

En particulier, tous les pôles sont simples.

Démontrons-le pour $S_1(u)$. En posant $\mu_0 = \lambda_0$ et $\nu_0 = \mu_0 - \mu_1$ dans la définition de $S_1(u)$, de sorte que $\lambda_0 \geq \lambda_1$ se traduit par $\nu_0 \geq 0$, et en utilisant l'expression $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}
S_1(u) &= \sum_{\lambda_0,\lambda} S_\lambda(x_1,\dots,x_n)u^{\lambda_0},\\
&= \sum_k \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \sum_{\mu_0,\mu} u^{\mu_0} \prod_{1\le i\le k} p(F_i)^{\nu_i}, \qquad (\mu_0 \ge \mu_1),\\
&= \sum_k \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \sum_{\nu} u^{\nu_0+\cdots+\nu_k} \prod_{1\le i\le k} p(F_i)^{\nu_i}.
\end{aligned}$$

La dernière somme est étendue aux $(k+1)$-uplets $\nu = (\nu_0,\dots,\nu_k)$ satisfaisant $\nu_0, \nu_k \ge 0$ et $\nu_i > 0$ pour $1 \le i \le k-1$.

En sommant les séries géométriques en $p(F_i)u$, on trouve :

$$(**) \qquad S_1(u) = (1-u)^{-1} \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} A_{\mathcal{F}}(u),$$

où

$$A_{\mathcal{F}}(u) = \frac{1}{1-p(X)u} \prod_{1\le i\le k-1} \frac{p(F_i)u}{1-p(F_i)u}.$$

Chacun des $A_{\mathcal{F}}(u)$ étant une fraction rationnelle de la forme requise, le lemme s'ensuit.

Pour la fonction S_2 le calcul est semblable. Les exposants ν_i, différences de nombres pairs, sont tous pairs, ce qui explique que $S_2(u)$ est en fait une fraction rationnelle en u^2.

Il s'agit maintenant d'expliciter les résidus $a(Y)$ et $b(Y)$, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.3. — *Les séries génératrices $S_1(u)$ et $S_2(u)$ valent :*

$$S_1(u) = \sum_{\zeta} \frac{\Phi_1(x_1^{\zeta_1},\dots,x_n^{\zeta_n})}{1-u\prod_i x_i^{(1-\zeta_i)/2}};$$

$$S_2(u) = \sum_{\zeta} \frac{\Phi_2(x_1^{\zeta_1},\dots,x_n^{\zeta_n})}{1-u^2\prod_i x_i^{(1-\zeta_i)}};$$

dans les deux cas, la somme est sur $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n) \in \{\pm 1\}^n$.

Le calcul des résidus se fait de la manière habituelle. Détaillons-le pour S_1. Tout d'abord, calculons $a(\emptyset)$. Pour cela, observons que :

$$S_1(u)(1-u) = \sum_{\lambda} S_\lambda(x_1,\dots,x_n)u^{\lambda_1},$$

la multiplication par $(1-u)$ remplaçant la condition $\lambda_0 \geq \lambda_1$ par $\lambda_0 = \lambda_1$. Il s'ensuit que :

$$a(\emptyset) = S_1(u)(1-u)\Big|_{u=0} = \Phi_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Pour les autres sous-ensembles Y, introduisons quelques notations. Posons $Y' = X \backslash Y$ et $-Y = \{x_i^{-1} : x_i \in Y\}$. Les notations $\Phi_1(Y')$ et $\Phi_1(-Y)$ désignent la fonction Φ_1 lorsque les indéterminées sont respectivement les éléments de Y' et les inverses de ceux de Y. Enfin, si $\mathcal{F}$ est une filtration de Z de longueur k, on note :

$$A_{\mathcal{F}}(Z; u) = \frac{1}{1-p(Z)u} \prod_{1 \leq i \leq k-1} \frac{p(F_i)u}{1-p(F_i)u}.$$

De la même manière, f étant l'application de Z dans $\{1, \ldots, k\}$ associée à $\mathcal{F}$, on note :

$$\pi_{\mathcal{F}}(Z) = \prod \frac{x_i}{x_i - x_j},$$

où le produit est étendue aux couples (x_i, x_j) d'éléments de Z satisfaisant $f(x_i) < f(x_j)$.

Soit donc à calculer $a(Y)$ pour $Y \subset X$. En vertu de l'expression $(**)$, on a :

$$a(Y) = (1-p(-Y))^{-1} \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} A_{\mathcal{F}}(X; u)(1-p(Y)u)\Big|_{u=p(-Y)}.$$

Si la filtration $\mathcal{F}$ ne contient pas Y, le terme correspondant dans la sommation précédente est nul. On se limite donc aux filtrations

$$\mathcal{F} :\ \emptyset = F_0 \subset \cdots \subset F_t = Y \subset \cdots \subset F_k = X.$$

Pour une telle filtration,

$$\begin{aligned}
&(1-u)^{-1} A_{\mathcal{F}}(X; u)(1-p(Y)u) \\
&\quad = \frac{1}{1-u} \prod_{1 \leq i \leq t-1} \frac{p(F_i)}{1-p(F_i)u} p(Y)u \prod_{t+1 \leq i \leq k-1} \frac{p(F_i)u}{1-p(F_i)u} \times \frac{1}{1-p(X)u}, \\
&\quad = \frac{1}{p(-Y)v} \prod_{1 \leq i \leq t-1} \frac{p(-(Y \setminus F_i))v}{1-p(-(Y \setminus F_i))v} \\
&\qquad\qquad \times v \prod_{t+1 \leq i \leq k-1} \frac{p(F_i \setminus Y)v}{1-p(F_i \setminus Y)v} \times \frac{1}{1-p(X \setminus Y)v},
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue en posant $v = p(Y)u$.

Appelons $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les filtrations de $-Y$ et de $Y' = X \setminus Y$ définies par :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 :\ \emptyset \subset -(Y \setminus F_{t-1}) \subset \cdots \subset -(Y \setminus F_1) \subset -Y, \\
&\mathcal{F}_2 :\ \emptyset \subset F_{t+1} \setminus Y \subset \cdots \subset F_{k-1} \setminus Y \subset X \setminus Y.
\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$(1-u)^{-1}a_{\mathcal{F}}(X;u)(1-p(Y)u) = vA_{\mathcal{F}_1}(-Y;v)A_{\mathcal{F}_2}(Y';v).$$

De plus, on vérifie que :

$$\pi_{\mathcal{F}}(X) = \pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)\pi_{\mathcal{F}_2}(Y')r(Y),$$

où $r(Y) = \prod(1-x_i^{-1}x_j)^{-1}$, le produit étant sur les couples $x_i \in Y, x_j \in Y'$.

On a donc :

$$\begin{aligned} a(Y) &= (1-u)^{-1}\sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}}(X)A_{\mathcal{F}}(X;u)(1-p(Y)u)\Big|_{u=p(-Y)}, \\ &= vr(Y)\sum_{\mathcal{F}_1} \pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)A_{\mathcal{F}_1}(-Y;v) \times \sum_{\mathcal{F}_2} \pi_{\mathcal{F}_2}(Y')A_{\mathcal{F}_2}(Y';v)\Big|_{v=1}. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat obtenu pour $a(\emptyset)$, qu'on peut aussi écrire :

$$\Phi_1(X) = \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}}(X)A_{\mathcal{F}}(X;u)\Big|_{u=1},$$

on trouve :

$$a(Y) = r(Y)\Phi_1(-Y)\Phi_1(Y').$$

En reportant l'expression de Φ_1 donnée par le théorème 2.1, on obtient bien :

$$a(Y) = \Phi_1(x_1^{\zeta_1}, \ldots, x_n^{\zeta_n}),$$

où $\zeta_i = 1$ si $x_i \notin Y$ et $\zeta_i = -1$ si $x_i \in Y$. Avec cette écriture, on a aussi :

$$p(Y) = \prod_i x_i^{(1-\zeta_i)/2}.$$

Ceci démontre la proposition pour $S_1(u)$.

Le calcul est exactement le même pour $S_2(u)$.

3. Les systèmes de racines

La proposition 2.3 précédente va maintenant être récrite en utilisant le formalisme des systèmes de racines (*cf.* [2]). Nous aurons besoin des systèmes de type A_{n-1}, B_n et C_n. L'ensemble des racines est noté R_i, celui des racines positives R_i^+, la demi-somme de ces dernières ρ_i; l'indice i est 0 pour A_{n-1}, 1 pour B_n et 2 pour C_n.

Système de type A_{n-1} :

$$
\begin{aligned}
R_0 : \quad & v_i - v_j, \quad 1 \le i \ne j \le n; \\
R_0^+ : \quad & v_i - v_j, \quad 1 \le i < j \le n; \\
2\rho_0 = {} & (n-1)v_1 + \cdots + (n-2i+1)v_i + \cdots + (-n+1)v_n.
\end{aligned}
$$

Système de type B_n :

$$
\begin{aligned}
R_1 : \quad & \pm v_i, \quad 1 \le i \le n; \quad \pm v_i \pm v_j, \quad 1 \le i < j \le n; \\
R_1^+ : \quad & v_i, \quad 1 \le i \le n; \quad v_i \pm v_j, \quad 1 \le i < j \le n; \\
2\rho_1 = {} & (2n-1)v_1 + \cdots + (2n-2i+1)v_i + \cdots + v_n.
\end{aligned}
$$

Système de type C_n :

$$
\begin{aligned}
R_2 : \quad & \pm 2v_i, \quad 1 \le i \le n; \quad \pm v_i \pm v_j, \quad 1 \le i < j \le n; \\
R_2^+ : \quad & 2v_i, \quad 1 \le i \le n; \quad v_i \pm v_j, \quad 1 \le i < j \le n; \\
2\rho_2 = {} & 2nv_1 + \cdots + (2n-2i+2)v_i + \cdots + 2v_n.
\end{aligned}
$$

On note aussi $2\theta = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Les groupes de Weyl sont respectivement $W_0 = \mathcal{S}_n$ agissant par permutation des vecteurs v_i pour A_{n-1} et $W_* = \{\pm 1\}^n \times \mathcal{S}_n$ (produit semi-direct) agissant par permutation et changement de signe des vecteurs v_i pour B_n et C_n.

On utilisera essentiellement la *formule de Weyl.*

THÉORÈME 3.1. (Formule de Weyl). — *Les racines positives d'un système de racines réduit irréductible vérifient :*

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho} = e^{\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}),$$

où $\epsilon(w)$ est la signature de w.

En remplaçant x_i par l'exponentielle formelle e^{-v_i}, on peut écrire, partant du théorème 2.1 :

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(e^{-v_1}, \ldots, e^{-v_n}) &= \frac{\prod_{i<j}(1 - e^{-(v_i - v_j)})}{\prod_i (1 - e^{-v_i}) \prod_{i<j}(1 - e^{-(v_i - v_j)}) \prod_{i<j}(1 - e^{-(v_i + v_j)})}, \\
&= \prod_{\alpha \in R_0^+} (1 - e^{-\alpha}) \Big/ \prod_{\alpha \in R_1^+} (1 - e^{-\alpha}), \\
&= e^{\rho_1 - \rho_0} \sum_{w \in W_0} \epsilon(w) e^{w\rho_0} \Big/ \sum_{w \in W_*} \epsilon(w) e^{w\rho_1},
\end{aligned}
$$

ce qui, compte tenu de $\rho_1 - \rho_0 = n\theta = w(n\theta)$ pour tout $w \in W_0$, fournit la proposition suivante, qui contient le résultat analogue pour Φ_2 faisant intervenir le système C_n.

Proposition 3.2. — *On a les identités :*

$$\Phi_1(e^{-v_1},\ldots,e^{-v_n}) = \sum_{w\in W_0}\epsilon(w)e^{w\rho_1}\Big/\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w\rho_1};$$
$$\Phi_2(e^{-v_1},\ldots,e^{-v_n}) = \sum_{w\in W_0}\epsilon(w)e^{w\rho_2}\Big/\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w\rho_2}.$$

Le coefficient de u^m dans $S_1(u)$ est, avec le formalisme précédent et compte-tenu de la proposition 2.3 :

$$\sum_{\lambda\in m^n} S_\lambda(e^{-v_1},\ldots,e^{-v_n}) = \sum_{\zeta\in\{\pm1\}^n}\Phi_1(e^{-\zeta v_1},\ldots,e^{-\zeta v_n})\prod_i e^{(-mv_i+m\zeta v_i)/2},$$
$$= e^{-m\theta}\sum_{\zeta\in\{\pm1\}^n} e^{m\zeta\theta}\Phi_1(e^{-\zeta v_1},\ldots,e^{-\zeta v_n}).$$

Puisque le groupe W_* est produit semi-direct de W_0 et de $\{\pm1\}^n$, en utilisant la proposition 3.2, on a :

$$\Phi_1(e^{-\zeta v_1},\ldots,e^{-\zeta v_n}) = \sum_{w\in W_0}\epsilon(w)e^{\zeta w\rho_1}\Big/\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{\zeta w\rho_1},$$
$$= \sum_{\zeta^{-1}w\in W_0}\epsilon(\zeta^{-1}w)e^{w\rho_1}\Big/\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w\rho_1}.$$

En écrivant que θ est invariant sous l'action de W_0, et donc que $\zeta\theta = \zeta\zeta^{-1}w\theta = w\theta$, le coefficient de u^m dans $S_1(u)$ se transforme en quotient de deux sommes. Le calcul est analogue pour le coefficient de u^{2m} dans $S_2(u)$.

Lemme 3.3. — *Les sommes de fonctions de Schur de forme contenue dans un rectangle donné valent :*

$$\sum_{\lambda\in m^n} S_\lambda(e^{-v_1},\ldots,e^{-v_n}) = e^{-m\theta}\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w(m\theta+\rho_1)}\Big/\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w\rho_1};$$
$$\sum_{\lambda\in (2m)^n} S_\lambda(e^{-v_1},\ldots,e^{-v_n}) = e^{-2m\theta}\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w(2m\theta+\rho_2)}\Big/\sum_{w\in W_*}\epsilon(w)e^{w\rho_2},$$

la seconde somme ne portant que sur les partitions paires.

On va maintenant spécialiser les variables. Soit $f=\sum_i f_i v_i$, on va remplacer dans le lemme précédent e^{-v_i} par $q^{f_i} = q^{\langle v_i,f\rangle}$. Le terme $e^{w(m\theta+\rho_1)}$ est donc remplacé par $q^{-\langle w(m\theta+\rho_1),f\rangle}$ qui, puisque w est une isométrie, vaut $q^{-\langle m\theta+\rho_1,w^{-1}f\rangle}$, d'où découle le lemme suivant.

Lemme 3.4.

$$\sum_{\lambda\in m^n} S_\lambda(q^{f_1},\ldots,q^{f_n})$$
$$= q^{m\langle\theta,f\rangle} \sum_{w\in W_*} \epsilon(w) q^{-\langle m\theta+\rho_1,wf\rangle} \Big/ \sum_{w\in W_*} \epsilon(w) q^{-\langle\rho_1,wf\rangle};$$

$$\sum_{\lambda\in(2m)^n} S_\lambda(q^{f_1},\ldots,q^{f_n})$$
$$= q^{2m\langle\theta,f\rangle} \sum_{w\in W_*} \epsilon(w) q^{-\langle 2m\theta+\rho_2,wf\rangle} \Big/ \sum_{w\in W_*} \epsilon(w) q^{-\langle\rho_2,wf\rangle},$$

la seconde somme ne portant que sur les partitions paires.

Dans le lemme précédent, on va remplacer f par ρ_2, puis par $2\rho_1$, ce qui nous donnera les deux théorèmes 1.1 et 1.2. Nous n'allons en fait détailler que la démonstration de la formule de Gordon, les trois autres s'obtenant sans difficulté de la même manière.

Faisons donc $f=\rho_2$ dans lqa première identité du lemme 3.4. Pour évaluer les sommes qui apparaissent alors, on peut de nouveau utiliser la formule de Weyl :

$$\sum_{w\in W_*} \epsilon(w) q^{-\langle m\theta+\rho_1,w\rho_2\rangle} = q^{-\langle m\theta+\rho_1,\rho_2\rangle} \prod_{\alpha\in R_2^+} (1-q^{\langle m\theta+\rho_1,\alpha\rangle}).$$

Pour terminer, il reste à évaluer les produits scalaires $\langle m\theta+\rho_1,\alpha\rangle$. Compte tenu des valeurs de θ, ρ_1 et des possibilités pour α, trois cas se présentent :

$$\begin{aligned}
\langle m\theta+\rho_1, 2v_i\rangle &= m+2n-2i+1, \quad 1\le i\le n;\\
\langle m\theta+\rho_1, v_i+v_j\rangle &= m+n-i+n-j+1, \quad 1\le i<j\le n;\\
\langle m\theta+\rho_1, v_i-v_j\rangle &= j-i, \quad 1\le i<j\le n.
\end{aligned}$$

Après simplifications, il vient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in m^n} S_\lambda(q^n,\ldots,q) &= \prod_{\alpha\in R_2^+} \frac{1-q^{\langle m\theta+\rho_1,\alpha\rangle}}{1-q^{\langle\rho_1,\alpha\rangle}},\\
&= \prod_i \frac{1-q^{m+2n-2i+1}}{1-q^{2n-2i+1}} \prod_{i<j} \frac{1-q^{m+n-i+n-j+1}}{1-q^{n-i+n-j+1}}.
\end{aligned}$$

Le changement d'indices $j\leftarrow n-i+1$ et $i\leftarrow n-j+1$ donne exactement la formule de Gordon.

Bibliographie

[1] ANDREWS, G.E. — MacMahon's conjecture on symmetric plane partitions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. **74**, 1977, p. 426–429.

[2] BOURBAKI, N. — *Groupes et algébres de Lie, ch. IV, V, VI* [Éléments de Mathématiques, Fasc. 34]. — Paris, Hermann, 1968.

[3] DESAINTE-CATHERINE, M. ET VIENNOT, G. — Enumeration of certain Young tableaux with bounded height, [Colloque de combinatoire énumérative, U.Q.A.M., Montréal, 1985], G. Labelle, P. Leroux, eds., Lecture Notes in Math., vol. 1234, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986, pp. 58–67.

[4] DÉSARMÉNIEN, J. — The analogs of the Gordon and MacMahon identities for even partitions, en préparation.

[5] LITTLEWOOD, D.E. — *The theory of group characters, 2nd ed.* — Oxford University Press, 1950.

[6] MACDONALD, I.G. — *Symmetric functions and Hall polynomials.* — Oxford, Clarendon Press, 1979.

[7] MACMAHON, P.A. — *Combinatorial Analysis I, II.* — Cambridge University Press, 1915, 1916 [=New York, Chelsea, 1960].

[8] STANLEY, R.P. — Theory and applications of plane partitions I, II, *Studies Appl. Math.*, t. **50**, 1971, p. 167–188, 259–279.