ÜBER DIE INVERSIONSSTATISTIKEN VON MACMAHON UND GOULDEN–JACKSON

PETER PAULE*

Einleitung

Gegeben sei eine geordnete Partition $\Pi = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ von n (das heißt $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$). Die *q-Multinomialkoeffizienten* seien definiert durch

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n_1]!\,[n_2]! \cdots [n_k]!},$$

wobei $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdots [1]$, $[0]! = 1$, mit $[n] = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

Diese Polynome interpretierte *MacMahon* [4] unter anderem folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{bmatrix} = \sum_{m \in M_\Pi} q^{\mathrm{inv}(m)}, \tag{1}$$

dabei ist M_Π die Menge aller Permutationen der Multimenge $\{1^{n_1}, 2^{n_2}, \ldots, k^{n_k}\}$ und $\mathrm{inv}(m)$ die Anzahl der Inversionen von $m \in M_\Pi$.

Zum Beispiel: Für $\Pi = (1, 2, 1)$ hat $m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_\Pi$ die Inversionen $\binom{1}{2}\binom{4}{1}$, $\binom{2}{3}\binom{3}{2}$, $\binom{2}{3}\binom{4}{1}$ und $\binom{3}{2}\binom{4}{1}$; also $\mathrm{inv}(m) = 4$.

Der Inversionsstatistik von MacMahon sei die von *Goulden* und *Jackson* [1] gegenübergestellt:

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{bmatrix} = \sum_{\rho \in R_\Pi} q^{\mathrm{inv}(\rho)}. \tag{2}$$

Hier ist R_Π die Menge aller Permutationen von $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$, das heißt aller Elemente aus $S_{\mathbf{n}}$, welche auf den Blöcken Π_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$,

$$\Pi_j = \{(\textstyle\sum_{l=1}^{j-1} n_l) + 1, (\sum_{l=1}^{j-1} n_l) + 2, \ldots, \sum_{l=1}^{j} n_l\},$$

monoton steigende Funktionen darstellen.

*Unterstützt durch die Alexander von Humboldt–Stiftung.

Zum Beispiel: Für $\Pi = (1,2,1)$ hat $\rho = 4132 \in R_\Pi$ die Inversionen $(4,1)$, $(4,3)$, $(4,2)$ und $(3,2)$; also $\operatorname{inv}(\rho) = 4$.

Wir werden nun sehen, daß diese beiden Statistiken ganz eng zusammenhängen. Es existiert nämlich eine natürliche Bijektion φ,

$$\begin{aligned} &\varphi : M_\Pi \to R_\Pi \quad \text{mit} \\ &\operatorname{inv}(m) = \operatorname{inv}(\varphi(m)) \quad \text{für alle } m \in M_\Pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Damit erhält man einen äußerst einfachen Beweis der klassischen MacMahon–Statistik (1), denn die Goulden–Jacksonsche Interpretation läßt sich leicht wie folgt einsehen:

Beweis von (2). R_Π ist eine Transversale der Linksnebenklassen von der Younguntergruppe S_Π in $S_\mathbf{n}$ (vgl. zum Beispiel [3]). Dabei ist

$$S_\Pi = \{\sigma \in S_\mathbf{n} : \sigma[\Pi_j] = \Pi_j \text{ für } j = 1,2,\ldots,k\}$$

kanonisch isomorph zum direkten Produkt

$$S_{\mathbf{n}_1} \times S_{\mathbf{n}_2} \times \cdots \times S_{\mathbf{n}_k}.$$

Benützt man dazu noch die wohlbekannte Tatsache, daß

$$[n]! = \sum_{\gamma \in S_\mathbf{n}} q^{\operatorname{inv}(\gamma)} \tag{4}$$

(Beweis zum Beispiel durch vollständige Induktion nach n), so erhält man

$$\begin{aligned} [n]! &= \sum_{\gamma \in S_\mathbf{n}} q^{\operatorname{inv}(\gamma)} = \sum_{\substack{\rho \in R_\Pi \\ \sigma \in S_\Pi}} q^{\operatorname{inv}(\rho\sigma)} = \sum_{\substack{\rho \in R_\Pi \\ \sigma \in S_\Pi}} q^{\operatorname{inv}(\rho)+\operatorname{inv}(\sigma)} \\ &= \Bigg(\sum_{\rho \in R_\Pi} q^{\operatorname{inv}(\rho)}\Bigg)\Bigg(\sum_{\sigma_1 \in S_{\mathbf{n}_1}} q^{\operatorname{inv}(\sigma_1)}\Bigg) \cdots \Bigg(\sum_{\sigma_k \in S_{\mathbf{n}_k}} q^{\operatorname{inv}(\sigma_k)}\Bigg) \\ &= [n_1]!\,[n_2]! \cdots [n_k]! \Bigg(\sum_{\rho \in R_\Pi} q^{\operatorname{inv}(\rho)}\Bigg) \qquad \text{(nach (4))}, \end{aligned}$$

und damit die Gültigkeit von (2).

Die Bijektion $\varphi : M_\Pi \to R_\Pi$

Wir schreiben $m \in M_\Pi$ als $m = s(1)s(2)\ldots s(n)$ mit $s : \mathbf{n} \to \mathbf{k}$, wobei $|s^{-1}[\{j\}]| = |\{x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n_j}\}| = n_j$ und $x_{j,1} < x_{j,2} < \cdots < x_{j,n_j}$ für $j = 1,2,\ldots,k$. In der Zweizeilenschreibweise

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & n \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(j) & \ldots & s(n) \end{pmatrix}$$

denken wir uns die Spalten $\binom{j}{s(j)}$ als fest.

Eine *Transposition* sei das Vertauschen *benachbarter* Spalten $\binom{y}{b}\binom{x}{a}$ mit $b > a$ in $\binom{x}{a}\binom{y}{b}$. Wegen $y < x$ *verringert* jede Transposition die Anzahl der Inversionen in der zweiten Zeile und erhöht die Anzahl der Inversionen in der ersten Zeile jeweils um genau 1.

Nach Ausführung aller möglichen Transpositionen in (5) erreicht man

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n_1} & x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n_2} & \dots & x_{k,1} & x_{k,2} & \dots & x_{k,n_k} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & \dots & k & k & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir

$$\varphi(m) := x_{1,1}x_{1,2}\dots x_{1,n_1}\dots x_{k,1}x_{k,2}\dots x_{k,n_k} \in R_\Pi.$$

Die Bijektivität und die inversionserhaltende Eigenschaft (3) von φ sind wegen der Konstruktion klarerweise erfüllt.

Zum Beispiel: $\Pi = (1, 2, 1)$, $m = 2321 \in M_\Pi$ mit $\mathrm{inv}(m) = 4$:

$$\begin{aligned} m = \binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{2}\binom{4}{1} &\to \binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2} \to \binom{1}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{3}\binom{3}{2} \\ &\to \binom{4}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{2} \to \binom{4}{1}\binom{1}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{3} = \varphi(m). \end{aligned}$$

Also ist $\varphi(m) = 4132 \in R_\Pi$ mit $\mathrm{inv}(\varphi(m)) = 4$.

Bemerkung. Im Falle $k = n$ und $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$ ist $\varphi(m) = m^{-1}$ die *inverse* Permutation zu $m \in M_\Pi = S_{\mathbf{n}}$. Das heißt, unsere Bijektion verallgemeinert die Beobachtung von *Rothe* in [2]: *Für alle* $\sigma \in S_{\mathbf{n}}$ gilt: $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma^{-1})$.

Literatur

[1] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[2] K. F. Hindenburg (Ed.), *Sammlung combinatorisch–analytischer Abhandlungen 2*, Leipzig, 1800.

[3] A. Kerber and K.–J. Thürlings, *Symmetrieklassen von Funktionen und ihre Abzähltheorie, Teil II*, Bayreuther Math. Schriften, Heft 15, 1983.

[4] P. A. MacMahon, *Two applications of general theorems in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. (2) **15** (1916), 314–321.

Derzeitige Adresse des Autors:
Lehrstuhl II für Mathematik, Universität Bayreuth,
Postfach 3008, D-8580 Bayreuth.