Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B09b (1983), 34 pp.
[Formerly: Publ. I. R. M. A. Strasbourg, 1984, 230/S-09, p. 39 - 83.]

PERMANENTEN - EIN KURZER ÜBERBLICK

VON

ARNOLD RICHARD KRÄUTER

ZUSAMMENFASSUNG. Der vorliegende Artikel bringt eine knappe Übersicht über zentrale Fragestellungen der Permanententheorie. Auf die Definition der Permanente einer Matrix und die Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften dieser Funktion folgt eine Behandlung des Problems der Umwandlung von Permanenten in Determinanten sowie der Vermutung von van der Waerden und ihres vor kurzem erbrachten Beweises. Eine wichtige Rolle spielen untere und obere Schranken für Permanenten, deren Präsentation für (0,1)-Matrizen, nichtnegative Matrizen und $(1,-1)$-Matrizen erfolgt. Soweit nicht bereits in den genannten Themenkreisen enthalten, werden abschließend neueste Entwicklungen in der Permanententheorie vorgestellt.

ABSTRACT. This article gives a concise survey on important problems of the theory of permanents. The definition of the permanent of a matrix and a summary of some of its basic properties are followed by a treatment of the problem of converting permanents into determinants, and a discussion of the van der Waerden conjecture that has been proved quite recently. Very important are lower and upper bounds for permanents; these are presented for (0,1)-matrices, nonnegative matrices, and $(1,-1)$-matrices. Finally, we give a brief review of a selection of other attractive topics in the theory of permanents, particularly very recent developments.

1. Grundlagen

1.1. Definition der Permanente. Einleitende Bemerkungen. Die *Permanente* per A einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit Elementen aus einem beliebigen kommutativen Ring ist definiert durch

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}, \tag{1.1}$$

wobei S_n die symmetrische Gruppe der Ordnung n bezeichnet. Für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ heiße die Folge $(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)})$ *Diagonale* von A und das Produkt $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ *Diagonalprodukt* von A. Die Permanente von A kann also aufgefaßt werden als Summe der Diagonalprodukte von A.
Der Name *Permanente* wird in der heute gebräuchlichen Bedeutung 1882 von Muir [51, p. 410] eingeführt, doch treten Permanenten sinngemäß bereits 1813/15

in den Arbeiten [5] und [10] von Binet und Cauchy auf. Seitdem sind über vierhundert Veröffentlichungen zum Thema Permanenten erschienen, darunter 1978 die hervorragende Monografie [46] von Minc. Die Entwicklungen zwischen 1978 und 1981 (unter Einschluß des Beweises für die Vermutung von van der Waerden) behandelt Minc im Übersichtsartikel [50].
Die zwei zuletzt genannten Publikationen stellen die wichtigste Grundlage für Gliederung und Auswahl des Stoffes im vorliegenden Aufsatz dar, doch fanden auch neueste Ergebnisse Berücksichtigung (dies gilt insbesondere für den letzten Abschnitt). Dem Überblickscharakter Rechnung tragend wird auf Beweise weitgehend verzichtet und diesbezüglich auf die zitierte Originalliteratur verwiesen. Überdies wurde in der Darstellung weder Vollständigkeit noch größte Allgemeinheit angestrebt. Anwendungen von Permanenten auf Probleme der Kombinatorik und anderer Bereiche behandelt der in diesem Band enthaltene Aufsatz von Herrn Seifter.

1.2. Eigenschaften der Permanente. Entwicklungssätze. Der bequemeren Formulierung halber werden wir uns der folgenden Bezeichnungen bedienen. Für $r \leq n$ sei $Q_{r,n}$ definiert durch

$$Q_{r,n} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbf{N}^r : 1 \leq \omega_1 < \ldots < \omega_r \leq n\}. \tag{1.2}$$

Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ sowie für Vektoren $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in Q_{r,n}$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in Q_{r,n}$ bezeichne $A[\alpha|\beta]$ jene $r \times r$-Untermatrix von A, deren (i,j)-tes Element $a_{\alpha_i\beta_j}$ ist. Ferner bezeichne $A(\alpha|\beta)$ die zu $A[\alpha|\beta]$ komplementäre $(n-r) \times (n-r)$-Untermatrix von A. (Man erhält also $A(\alpha|\beta)$ durch Streichung der Zeilen mit den Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und der Spalten mit den Indizes $\beta_1, \ldots, \beta_r$ von A.)

Satz 1.1. *Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix.*
(a) *Die Funktion* per A *ist multilinear in den Zeilen und Spalten von A.*
(b) *Für $n \times n$-Permutationsmatrizen P und Q gilt*

$$\operatorname{per} PAQ = \operatorname{per} A. \tag{1.3}$$

(c) *Für die transponierte Matrix A^T von A gilt*

$$\operatorname{per} A^T = \operatorname{per} A. \tag{1.4}$$

(d) *Für einen beliebigen Vektor $\alpha \in Q_{r,n}$ gilt*

$$\text{per}\, A = \sum_{\omega \in Q_{r,n}} \text{per}\, A[\alpha|\omega]\ \text{per}\, A(\alpha|\omega) \tag{1.5}$$

(Laplacescher Entwicklungssatz für die Entwicklung der Permanente nach den Zeilen mit den Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$). Insbesondere gilt für $r = 1$

$$\text{per}\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \text{per}\, A(i|j). \tag{1.6}$$

(Analoge Formeln gelten für die Entwicklung nach Spalten.)

Zur Illustration von Satz 1.1 wollen wir die Permanente der Matrix

$$K_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

berechnen. (1.6) liefert für $i = 1$

$$\text{per}\, K_n = \sum_{j=2}^{n} \text{per}\, K_n(1|j). \tag{1.8}$$

Da jede der $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen $K_n(1|j)$ insgesamt $n-2$ Nullen enthält, welche in paarweise verschiedenen Zeilen und Spalten stehen, gilt ferner bei Verwendung von (1.3) sowie der Multilinearität in der ersten Spalte

$$\text{per}\, K_n(1|j) = \text{per}\, K_{n-1} + \text{per}\, K_{n-2}, \tag{1.9}$$

woraus mit (1.8)

$$\text{per}\, K_n = (n-1)(\text{per}\, K_{n-1} + \text{per}\, K_{n-2}) \tag{1.10}$$

folgt und weiter induktiv

$$\text{per}\, K_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, (-1)^k. \tag{1.11}$$

Dies ist die n-te *Dérangement-Zahl* d_n (siehe etwa Comtet [12, p. 180]) aus dem bekannten *problème des rencontres*. Wie die Matrix K_n mit diesem Problem

zusammenhängt, geht aus den Bemerkungen über Inzidenzmatrizen im bereits erwähnten Aufsatz von Herrn Seifter hervor, weshalb wir hier auf Details nicht eingehen.
Im Anschluß an Satz 1.1 ist zu bemerken, daß zwei für das Rechnen mit Determinanten außerordentlich wichtige Eigenschaften auf die Permanente bedauerlicherweise nicht zutreffen:
(a) *Die Permanentenfunktion ist nicht invariant gegenüber beliebigen elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen.*
(b) *Für Permanenten gibt es kein Analogon zum Determinanten-Produktsatz.*
Die erste dieser Bemerkungen hat zur Folge, daß die Berechnung der Permanente mithilfe einer derart effizienten Methode, wie sie der Gaußsche Algorithmus für Determinanten darstellt, unmöglich ist. Andererseits würde man bei Verwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes $n!(n-1)$ Multiplikationen benötigen. Es ist daher naheliegend, nach Methoden zu suchen, welche erheblich weniger Multiplikationen erfordern. Dies ist der Fall bei den folgenden zwei Entwicklungssätzen, welche ursprünglich für beliebige $m\times n$-Matrizen, $m \le n$, formuliert worden sind.

SATZ 1.2 (Ryser [58, p. 26]). *Es sei A eine $n \times n$-Matrix, es sei Λ_k die Menge aller $n \times k$-Untermatrizen X von A und es bezeichne $r_i(X)$ die i-te Zeilensumme von X $(i = 1,\dots,n)$. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A = \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \sum_{X\in\Lambda_{n-t}} r_1(X)\cdot\ldots\cdot r_n(X). \tag{1.12}$$

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n\times n$-Matrix. $r_{i_1*\ldots*i_s}$ bezeichne die Summe der Elemente im Hadamard-Produkt der Zeilen mit den Indizes $i_1,\dots,i_s$ von A, das heißt

$$r_{i_1*\ldots*i_s} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j}\cdot\ldots\cdot a_{i_s j}. \tag{1.13}$$

Weiters bezeichne $D(n)$ die Menge

$$\begin{aligned} D(n) = \; &\big\{(\omega_1,\dots,\omega_k)\in \mathbf{N}^k :\ 1\le\omega_1\le\ldots\le\omega_k\le n; \\ &\qquad \omega_1+\ldots+\omega_k = n;\ k=1,\dots,n\big\} \end{aligned} \tag{1.14}$$

und $R(\omega)$ für $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_k)\in D(n)$ die symmetrisierte Summe aller verschiedenen Produkte der $r_{i_1*\ldots*i_s}$ $(s=\omega_1,\dots,\omega_k)$, so daß in jedem Produkt die Folgen $(i_1,\dots,i_s)\in Q_{s,n}$ $(s=\omega_1,\dots,\omega_k)$ eine Partition der Menge $\{1,\dots,n\}$ bilden.

SATZ 1.3 (Minc [47, p. 31]). *Es sei A eine $n\times n$-Matrix. Dann gilt*

$$\text{per}\, A = \sum_{\omega \in D(n)} (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^{k} (\omega_i - 1)!\, R(\omega). \tag{1.15}$$

Während in (1.15) mehr als $(\frac{n}{2})^{n/2}(n-1)$ Multiplikationen erforderlich sind, reichen in (1.12) $(2^n - 1)(n-1)$ Multiplikationen aus. Damit ist die Formel von Ryser das momentan brauchbarste Hilfsmittel für die Entwicklung von Permanenten. Abschließend sei noch die vor kurzem erschienene Arbeit [4] von Bebiano erwähnt, die mithilfe einer Identität, in welcher Permanenten als Koeffizienten von Polynomen auftreten, die Formeln (1.12) und (1.15) gewinnt.

2. Permanenten und Determinanten

2.1. Das Problem von Pólya. Wir haben im vorigen Abschnitt bemerkt, daß die Berechnung der Permanente gegenüber der Determinante sehr schwierig ist. Die Ähnlichkeit der Definitionen beider Funktionen legt jedoch den Gedanken nahe, Permanenten mithilfe linearer Transformationen des Arguments auf Determinanten zurückzuführen. Präzise formuliert lautet das Problem: Gibt es zu einer beliebigen Menge S von $n \times n$-Matrizen stets eine lineare Abbildung T, so daß

$$\text{per}\, A = \det\, T(A) \tag{2.1}$$

für alle $A \in S$ gilt? Wählt man beispielsweise für S die Menge aller 2×2-Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

und für T die Abbildung

$$T(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

dann gilt (2.1) tatsächlich für alle $A \in S$. Dies ist für $n \geq 3$ nicht mehr der Fall. 1913 stellte nämlich Pólya [55] die folgende, von Szegő [64] gelöste Aufgabe: *Es sei S die Menge aller $n \times n$-Matrizen. Man zeige, daß es für $n \geq 3$ im allgemeinen keine Abbildung T gibt, welche in ihrem Argument einen einheitlichen Vorzeichenwechsel bewirkt, so daß* (2.1) *für alle $A \in S$ gilt.*

Rund fünfzig Jahre später wurde dieses Problem wieder aufgegriffen. Dabei konnte die folgende wesentliche Verbesserung erzielt werden:

SATZ 2.1 (Marcus-Minc [38, p. 381]). *Es sei S die Menge aller $n \times n$-Matrizen, $n \geq 3$. Dann gibt es im allgemeinen keine lineare Abbildung T, so daß* (2.1) *für alle $A \in S$ gilt.*

Mit diesem Ergebnis war nun endgültig klar, daß es keine allgemeine Möglichkeit gibt, Permanenten auf Determinanten zurückzuführen.

2.2. Konvertible Matrizen. Im Anschluß an Satz 2.1 haben einige Forscher versucht, hinreichende Bedingungen für Matrizen herzuleiten, so daß (2.1) gilt. Wir wollen Matrizen mit dieser Eigenschaft *konvertibel* nennen. Wir vereinbaren überdies, daß alle folgenden Abbildungen T lediglich Vorzeichenänderungen in ihrem Argument bewirken mögen. $\nu(A)$ bezeichne die Anzahl der Nullen in A, $\mu(T(A))$ bezeichne die Anzahl der von T in A hervorgerufenen Vorzeichenwechsel und N_n sei die Zahl

$$N_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2). \tag{2.4}$$

SATZ 2.2 (Gibson [20, p. 474]). *Es sei A eine konvertible $n \times n$-(0,1)-Matrix mit positiver Permanente. Dann gilt*

$$\nu(A) \geq N_n. \tag{2.5}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (2.5) *genau dann, wenn A durch Zeilen- oder Spaltenvertauschungen auf die Gestalt*

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

gebracht werden kann.

Die Charakterisierung der Matrizen A mit $\nu(A) = N_n$ gestattet es, für diese Klasse detaillierte Aussagen über die Abbildungen T zu machen, so daß (2.1) gilt.

SATZ 2.3 (Kräuter-Seifter [28, *passim*]). *Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit positiver Permanente, ferner sei $\nu(A) = N_n$, $n \geq 4$, und es gelte* $\operatorname{per} A = \det T(A)$. *Dann gilt*

$$n-1 \leq \mu(T(A)) \leq \binom{n+1}{2}, \tag{2.7}$$

wobei jeder ganzzahlige Wert in diesem Intervall für ein geeignetes T tatsächlich angenommen wird. Auf der linken beziehungsweise rechten Seite von (2.7) *gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die Matrix $T(A)$ bis auf Zeilen- oder Spaltenvertauschungen mit der Matrix*

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

beziehungsweise $-U_n$ übereinstimmt.

3. Die Vermutung von van der Waerden

3.1. Von Marcus und Newman bis Friedland und Bang. 1926 stellte van der Waerden [67] (in moderner Terminologie formuliert) die folgende Frage: *Wie groß ist das Minimum der Permanente auf der Menge Ω_n aller doppeltstochastischen $n \times n$-Matrizen*? (Eine quadratische Matrix heißt *doppeltstochastisch*, wenn ihre Elemente nichtnegativ sind und überdies ihre Zeilen- und Spaltensummen 1 sind.) Die Anregung zu dieser Aufgabe geht zurück auf den

SATZ 3.1 (Kőnig [26, p. 458]). *Es sei A eine nichtnegative $n \times n$-Matrix, deren Zeilen- und Spaltensummen denselben positiven Wert besitzen. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A > 0. \tag{3.1}$$

Marcus und Newman sind die ersten Autoren, die sich mit dem genannten Problem beschäftigt haben. Ihre Arbeit [37] stellt ein sorgfältiges Studium der Eigenschaften von Matrizen aus Ω_n mit minimaler Permanente dar mit dem Ziel nachzuweisen, daß all diese Eigenschaften von genau einer Matrix erfüllt werden, nämlich

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Dieses (von den erwähnten Autoren nur teilweise erreichte) Ziel ist der Inhalt der „Vermutung von van der Waerden": *Für alle* $A \in \Omega_n$ *gilt*

$$\text{per}\, A \geq \frac{n!}{n^n}. \tag{3.3}$$

Die verschärfte Fassung enthält überdies folgende Charakterisierung des Gleichheitsfalles: *In* (3.3) *tritt Gleichheit genau dann ein, wenn* $A = J_n$ *ist.*
Der Arbeit von Marcus und Newman kommt das große Verdienst zu, mit ihrer Vermutung und mit ihren Ergebnissen das innerhalb der darauffolgenden zweieinhalb Jahrzehnte stark gestiegene Interesse an der Permanententheorie geweckt und wichtige Ideen zur vollständigen Lösung des genannten Problems beigetragen zu haben. In bezug auf die Geschichte der Vermutung von van der Waerden verweisen wir auf Minc [46, pp. 95 - 99], [49, pp. 25 - 28]. Aus der Fülle von Teilresultaten, welche vor dem Beweis von (3.3) erschienen sind, sollen lediglich zwei angeführt werden (beide sind 1979 erschienen):

Satz 3.2 (Friedland [17, p. 175]). *Für alle* $A \in \Omega_n$ *gilt*

$$\text{per}\, A \geq e^{-n}. \tag{3.4}$$

Satz 3.3 (Bang [3, p. 3]). *Für alle* $A \in \Omega_n$ *gilt*

$$\text{per}\, A \geq e^{1-n}. \tag{3.5}$$

Man beachte, daß die Schranken in (3.3), (3.4) und (3.5) von nahezu gleicher Größenordnung sind; es folgt nämlich aus der Stirlingschen Formel

$$\frac{n!}{n^n} \approx \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}. \tag{3.6}$$

3.2. Falikman und Egoryčev. Nach zahlreichen vergeblichen Versuchen mehrerer Mathematiker gelang es schließlich den sowjetischen Forschern Falikman [15] und Egoryčev [14], unabhängig voneinander den Nachweis für die Richtigkeit der Vermutung von van der Waerden zu erbringen. (Falikman reichte seinen Beweis 1979 ein, Egoryčev 1980.) Beide erhielten für ihre Leistung den Fulkerson-Preis 1982. Beide Beweise beruhen im Grunde genommen auf einem Spezialfall einer Ungleichung für gemischte Diskriminanten quadratischer Formen von Aleksandrov [2, pp. 231 - 232], welche in der hier benötigten Form folgendermaßen lautet:

Satz 3.4. *Es sei A eine nichtnegative $n \times (n-2)$-Matrix, es seien x und y Spaltenvektoren mit n Komponenten und es sei überdies x nichtnegativ. Dann gilt*

$$[\operatorname{per}(A, x, y)]^2 \geq \operatorname{per}(A, x, x) \operatorname{per}(A, y, y). \tag{3.7}$$

Sind A und x positiv, dann gilt in (3.7) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn x und y kollinear sind.

Ein expliziter Beweis dieses Satzes findet sich bei Knuth [25, p. 735] und van Lint [34, pp. 3 - 4]. (Egoryčev hat die Ungleichung von Aleksandrov unmittelbar verwendet und konnte daher auf einen Beweis verzichten. Falikman hingegen bewies (3.7) für den Fall $\operatorname{per}(A, x, y) = 0$.) Während Falikman keine weiteren Hilfsmittel benötigt, benützt Egoryčev überdies den

Satz 3.5 (London [36, p. 156]). *Es sei $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ eine Matrix mit minimaler Permanente. Dann gilt für alle i und j*

$$\operatorname{per} A(i|j) \geq \operatorname{per} A. \tag{3.8}$$

Ist $a_{ij} > 0$, dann gilt in (3.8) das Gleichheitszeichen.

Eine Gegenüberstellung beider Beweise enthalten die schönen Übersichtsartikel von Lagarias [31], van Lint [35] und Minc [49]. Wir begnügen uns hier mit einer modifizierten Fassung des Beweises von Egoryčev (siehe Schrijver [60, pp. 117 - 118]).

Satz 3.6 (Falikman [15, p. 932]; Egoryčev [14, p. 66]). *Für alle $A \in \Omega_n$ gilt*

$$\operatorname{per} A \geq \frac{n!}{n^n}. \tag{3.9}$$

Beweis: Es sei im folgenden $A = (B, x, y) \in \Omega_n$ stets eine Matrix mit minimaler Permanente, wobei B eine $n \times (n-2)$-Matrix ist und $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ sowie $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ Spaltenvektoren sind. Entwickelt man $\operatorname{per}(B, x, x)$ nach der letzten Spalte, dann erhält man mit Satz 3.5

$$\begin{aligned} \operatorname{per}(B, x, x) &= \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \operatorname{per}(B, x, e^{(i)}) \geq \\ &\geq \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \operatorname{per}(B, x, y) = \\ &= \operatorname{per}(B, x, y) \end{aligned}$$

aufgrund der Doppeltstochastizität, wobei $e^{(i)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ ist mit 1 an der i-ten Stelle. Analog erhält man

$$\mathrm{per}\,(B, y, y) \geq \mathrm{per}\,(B, x, y),$$

also

$$[\mathrm{per}\,(B, x, y)]^2 \leq \mathrm{per}\,(B, x, x)\,\mathrm{per}\,(B, y, y). \tag{3.10}$$

Andererseits folgt aus Satz 3.4

$$[\mathrm{per}\,(B, x, y)]^2 \geq \mathrm{per}\,(B, x, x)\,\mathrm{per}\,(B, y, y). \tag{3.11}$$

Nach Satz 3.1 ist nun $\mathrm{per}\,(B, x, y) > 0$, und somit folgt aus (3.10) und (3.11)

$$\mathrm{per}\,(B, x, x) = \mathrm{per}\,(B, y, y) = \mathrm{per}\,(B, x, y). \tag{3.12}$$

Daraus folgt wiederum

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{per}\,(B, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) & = & \frac{1}{4}\,\mathrm{per}\,(B, x, x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{per}\,(B, x, y) + \\ & & + \frac{1}{4}\,\mathrm{per}\,(B, y, y) \; = \\ & = & \mathrm{per}\,(B, x, y). \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Da die Matrix $(B, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ doppeltstochastisch ist, besitzt sie somit ebenfalls minimale Permanente. Es sei nun die Matrix $A = (a_{ij})$ so gewählt, daß

$$\Phi(A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

möglichst klein ist. (Dies ist stets möglich, da die Menge Ω_n aufgrund des Satzes von Birkhoff [6, p. 147] kompakt ist.) Angenommen, es sei $A \neq J_n$. Dann sind ohne Beschränkung der Allgemeinheit die letzten zwei Spalten von $A = (B, x, y)$ verschieden. Da A minimale Permanente besitzt, ist dies nach der obigen Rechnung auch bei $\tilde{A} = (B, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ der Fall, jedoch gilt (wie man leicht nachprüft) wegen $x \neq y \quad \Phi(\tilde{A}) < \Phi(A)$ im Widerspruch zur Minimalität von $\Phi(A)$. Somit ist $A = J_n$ und $\mathrm{per}\,(A) = \frac{n!}{n^n}$. □

Egoryčev konnte darüber hinaus die Eindeutigkeit der Matrix J_n zeigen:

Satz 3.7 (Egoryčev [14, p. 66]). *In (3.9) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $A = J_n$ ist.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Bedingung notwendig ist. Wir nehmen an, es gäbe eine Matrix $A \in \Omega_n$ mit $\mathrm{per}(A) = n!\,n^{-n}$, jedoch $A \neq J_n$. Ferner sei A so gewählt, daß die Anzahl der verschwindenden Matrizenelemente von A möglichst klein ist. Sind mindestens $n-1$ Spalten von A positiv, dann dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A = (B, x, y)$ mit B und x positiv und $x \neq y$ ist. Dann folgt aus (3.12) die Gleichheit in (3.7). Nach der Gleichheitsbedingung in Satz 3.4 ist dies äquivalent dazu, daß $y = \lambda x$ für ein geeignetes λ gilt. Aufgrund der Doppeltstochastizität von A muß $\lambda = 1$ gelten, also $x = y$ sein im Widerspruch zur Annahme. Somit ist $A = J_n$.
Besitzt A höchstens $n-2$ positive Spalten, dann dürfen wir A in der Gestalt $A = (B, x, y)$ annehmen, so daß nicht alle Spalten von B positiv sind und ferner y mindestens eine verschwindende Komponente besitzt, wo die entsprechende Komponente von x positiv ist. Gemäß (3.13) ist $(B, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ wiederum eine Matrix mit minimaler Permanente, welche zwar von J_n verschieden ist, aber mindestens eine Null weniger enthält als A , womit wiederum ein Widerspruch vorliegt. Also ist auch hier $A = J_n$. □

Mithilfe des entscheidenden Satzes 3.4 konnte mittlerweile ein weiteres Problem erfolgreich behandelt werden:

Satz 3.8 (Friedland [18, p. 120]). *Es sei $A \in \Omega_n$ und es bezeichne $\sigma_k(A)$ die Summe aller k-reihigen Unterpermanenten von A. Dann gilt für alle $2 \leq k \leq n$ und $A \neq J_n$*

$$\sigma_k(A) > \sigma_k(J_n). \tag{3.14}$$

Dies bestätigt eine Vermutung von Tverberg [65, p. 26] (Tverberg bewies (3.14) für $k = 2$ und $k = 3$). Offensichtlich handelt es sich dabei um eine Verallgemeinerung der Vermutung von van der Waerden, welche man für $k = n$ erhält.

4. Untere Schranken für Permanenten

Es wurde bereits erwähnt, daß die explizite Berechnung von Permanenten im allgemeinen ein schwieriges Problem darstellt. Daher sind Schranken für Permanenten, ausgedrückt durch leicht zu berechnende Funktionen (beispielsweise Zeilensummen), von großer Wichtigkeit. Da für beliebige Matrizen keine scharfen Abschätzungen zu erwarten sind, werden wir uns hier auf einige wichtige Klassen von Matrizen beschränken. Im vorliegenden Abschnitt soll die Frage nach unteren Schranken für Permanenten dieser Matrizen behandelt werden.

4.1. (0,1)-Matrizen. Die große kombinatorische Bedeutung von Permanenten auf der Menge der $(0,1)$-Matrizen wird in der Arbeit von Herrn Seifter gebührend herausgestellt. Wir beginnen mit dem

SATZ 4.1 (Hall [21, p. 923]). *Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit mindestens $k \leq n$ Einsen je Zeile und es sei* $\operatorname{per} A > 0$. *Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \geq k!. \tag{4.1}$$

Man beachte in Satz 4.1 die Zusatzbedingung $\operatorname{per} A > 0$. Ohne sie blieben die unteren Schranken unscharf, da der Wert der Permanente wesentlich von der Anordnung der Nullen abhängt und erst in zweiter Linie von der Anzahl der Einsen je Zeile. In der Tat kann die Permanente einer $n \times n$-(0,1)-Matrix mit $n(n-1)$ positiven Elementen verschwinden (Vorliegen einer Nullspalte).
Für die Behandlung weiterer Ergebnisse ist es nützlich, folgende Bezeichnungen einzuführen. Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein n-Tupel reeller Zahlen. Dann bezeichne $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ jenes n-Tupel, welches man durch Anordnung der Komponenten von α in der Reihenfolge $\alpha_1^* \geq \ldots \geq \alpha_n^*$ erhält, und es bezeichne $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ jenes n-Tupel, welches man durch Anordnung der Komponenten von α in der Reihenfolge $\alpha_1' \leq \ldots \leq \alpha_n'$ erhält. Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$. Dann bezeichne $\overline{A}$ jene $n \times n$-(0,1)-Matrix, in deren i-ter Zeile die ersten r_i Elemente 1 sind und die restlichen $n - r_i$ Elemente 0 $\quad (i = 1, \ldots, n)$. Beispielsweise hat für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

$\overline{A}$ die Gestalt

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

SATZ 4.2 (Jurkat-Ryser [22, p. 26]; Minc [43, pp. 1129 - 1130]). *Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} \max(0, r_i + i - n). \tag{4.4}$$

Für $\operatorname{per} A > 0$ *tritt Gleichheit in* (4.4) *genau dann auf, wenn es eine* $n \times n$-(0,1)-*Permutationsmatrix* P *gibt mit* $AP = \overline{A}$.

Leider liefert Satz 4.2 keine guten Schranken. Treten nämlich in der i-ten Zeile mindestens i Nullen auf, dann verschwindet das Produkt auf der rechten Seite der Ungleichung (4.4) und die Aussage wird trivial. Jedoch ist eine Verbesserung mithilfe einer einfachen Überlegung möglich. Da die Permanentenfunktion unverändert gegenüber Zeilenvertauschungen bleibt, kann man diese gerade so vornehmen, daß die Zeilensummen in nichtaufsteigender Reihenfolge angeordnet sind.

Satz 4.3 (Minc [45, p. 503]). *Es sei* A *eine* $n \times n$-(0,1)-*Matrix mit den Zeilensummen* $r_1, \ldots, r_n$. *Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} \max(0, r_i^* + i - n). \tag{4.5}$$

(Gleichheitsbedingung wie in Satz 4.2.)

Daß die Abschätzung (4.5) besser als (4.4) ist, geht hervor aus dem folgenden

Hilfssatz (Minc [45, p. 503]). *Es seien* $r_1, \ldots, r_n$ *nichtnegative ganze Zahlen* $\leq n$. *Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^{n} \max(0, r_i^* + i - n) \geq \prod_{i=1}^{n} \max(0, r_i + i - n). \tag{4.6}$$

In (4.6) *tritt Gleichheit genau dann auf, wenn entweder die linke Seite verschwindet oder* $r_i^* = r_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$ *gilt.*

Jene $n \times n$-(0,1)-Matrizen, welche genau k Einsen je Zeile und Spalte besitzen, verdienen besonderes Interesse; wir bezeichnen die Menge dieser Matrizen mit Λ_n^k. Für $A \in \Lambda_n^k$ ist offenbar $\frac{1}{k}A \in \Omega_n$; somit gilt nach Satz 3.6

$$\operatorname{per} A \geq n! \left(\frac{k}{n}\right)^n \tag{4.7}$$

aufgrund der Multilinearität der Permanente. Da die Matrizen in Λ_n^k in jeder Zeile und Spalte $n - k$ Nullen enthalten, ist eine Verbesserung der Abschätzung

(4.7) zu erwarten. In der Tat folgt aus Minc [46, p. 72, Problem 19] für alle $A \in \Lambda_n^2$

$$\operatorname{per} A \geq 2. \tag{4.8}$$

Im Fall $k = 3$ ist es gelungen, eine wesentlich bessere Schranke zu finden:

Satz 4.4 (Voorhoeve [66, p. 85]). *Für alle $A \in \Lambda_n^3$ gilt*

$$\operatorname{per} A \geq 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}. \tag{4.9}$$

Leider läßt sich die von Voorhoeve benützte Beweismethode nicht auf $n > 3$ ausdehnen. Wir definieren nun $\mu_k(n)$ durch

$$\mu_k(n) = \min_{A \in \Lambda_n^k} (\operatorname{per} A). \tag{4.10}$$

Satz 4.5 (Schrijver-Valiant [59, p. 426]).

$$\mu_k(n) \leq k^{2n} \binom{nk}{n}^{-1}. \tag{4.11}$$

Eine Folgerung aus diesem Satz betrifft die bei der Behandlung des n-dimensionalen Dimerenproblems wichtige Größe

$$\theta_k = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\mu_k(n)}. \tag{4.12}$$

Mithilfe der Stirlingschen Formel erhält man aus (4.11) unmittelbar

$$\theta_k \leq \frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}. \tag{4.13}$$

Die Tatsache, daß für $k = 1, 2, 3$ (in letzterem Fall unter Verwendung von Satz 4.4) die Gleichheit in (4.13) bewiesen werden kann, veranlaßte Schrijver und Valiant zu der folgenden

Vermutung.

$$\theta_k = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}. \tag{4.14}$$

4.2. Beliebige nichtnegative Matrizen. Von grundlegender Bedeutung für die kombinatorische Matrizentheorie ist der

Satz 4.6 (Frobenius [19, p. 274]; Kőnig [27, p. 169]). *Es sei A eine nichtnegative $n \times n$-Matrix. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A > 0 \tag{4.15}$$

genau dann, wenn A keine $s \times (n-s+1)$-Null-Untermatrix enthält $(s = 1, \dots, n-1)$.

Nähere Informationen über die Matrix A erlauben es, Verbesserungen von (4.15) anzugeben. Für eine positive $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ definieren wir $a = \min_{i,j}(a_{ij})$. Wegen $a_{ij} > 0$ für alle i und j ist dann $a > 0$ und es gilt offensichtlich

$$\operatorname{per} A \geq n!\, a^n. \tag{4.16}$$

Gleichheit gilt in (4.16) genau dann, wenn $a_{ij} = a$ ist für alle i und j. Da bei der Bildung der Diagonalprodukte stets Matrizenelemente aus verschiedenen Zeilen und Spalten genommen werden, genügt es für unseren Zweck, das jeweils kleinste Element in jeder Zeile zu wählen, wodurch sich (4.16) verbessert zu

$$\operatorname{per} A \geq n! \prod_{i=1}^{n} a^*_{in}. \tag{4.17}$$

Gleichheit gilt in (4.17) genau dann, wenn alle Zeilen kollinear zum Vektor $(1, \dots, 1)$ sind. Eine weitere, wesentliche Verbesserung von (4.17) enthält der

Satz 4.7 (Jurkat-Ryser [22, p. 26]; Minc [44, p. 234]). *Es sei $A = (a_{ij})$ eine nichtnegative $n \times n$-Matrix. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{i} a'_{it}. \tag{4.18}$$

Ist A positiv, dann tritt in (4.18) *Gleichheit genau dann auf, wenn die ersten $n-1$ Zeilen von A kollinear zum Vektor* $(1, \dots, 1)$ *sind.*

Satz 4.7 besagt also, daß per A nicht übertroffen wird vom Produkt des kleinsten Elements in der ersten Zeile mit der Summe der zwei kleinsten Elemente in der zweiten Zeile und so fort. Macht man sich wiederum die Invarianz der Permanente gegenüber Zeilenvertauschungen zunutze, dann kann man die rechte Seite von (4.18) ersetzen durch das Maximum dieser Ausdrücke über alle Permutationen der Zeilenindizes. Auf die Erwähnung weiterer möglicher Verschärfungen sei hier verzichtet. Wir verweisen diesbezüglich auf Minc [44].

4.3. (1,-1)-Matrizen. Als einzige Klasse von Matrizen, in welchen auch negative Elemente auftreten können, wollen wir jene der $n \times n$-$(1,-1)$-Matrizen näher betrachten. Die Menge dieser Matrizen werde mit Γ_n bezeichnet. Eine wichtige Teilmenge von Γ_n bilden die Hadamard-Matrizen H $(HH^T = nI)$. Beim Studium von Permanenten auf Γ_n kann man sich auf den Absolutbetrag beschränken. Ist nämlich die Permanente einer Matrix $A \in \Gamma_n$ negativ, dann erhält man durch Multiplikation einer Zeile von A mit dem Faktor -1 eine Matrix $A' \in \Gamma_n$ mit

$$\operatorname{per} A' = -\operatorname{per} A > 0 \tag{4.19}$$

aufgrund der Multilinearität. Als erster befaßte sich Wang [68] mit der Frage, wann $|\operatorname{per} A|$ für $A \in \Gamma_n$ den Minimalwert 0 tatsächlich annimmt.

Satz 4.8 (Wang [68, p. 257]). *Es sei $n \geq 2$ von der Form $n = 2k$ oder $n = 4k+1$ für $k \in \mathbf{N}$. Dann gibt es stets eine Matrix $A \in \Gamma_n$ mit*

$$\operatorname{per} A = 0. \tag{4.20}$$

Wang konstruiert in seinem Beweis folgende Beispiele:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ \hline 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & J^{(n-1)} & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}\right] \tag{4.21}$$

für $n = 2k$ und

$$(4.22) \qquad A = \begin{array}{r} \\ k\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ 3k\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \left[\begin{array}{c|c} 1 & \overbrace{1\ \dots\ 1}^{2k+1}\quad \overbrace{-1\ \dots\ -1}^{2k-1} \\ \hline 1 & \\ \vdots & \\ 1 & \\ -1 & J^{(n-1)} \\ \vdots & \\ -1 & \end{array}\right]$$

für $n = 4k+1$, wobei $J^{(n)} \in \Gamma_n$ jene Matrix ist, deren Elemente alle 1 sind. Für $n = 4k+3$, $k \in \mathbf{N}_0$, konnte Wang keine Antwort auf das zur Diskussion stehende Problem geben (ausgenommen $n = 3$). Mittlerweile ist es aber gelungen, für spezielle n von dieser Bauart ein Teilresultat zu erzielen.

Satz 4.9 (Simion-Schmidt [62, p. 107]; Kräuter-Seifter [29, p. 59]). *Es sei $n = 2^k - 1$ für $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt für alle Matrizen $A \in \Gamma_n$*

$$|\mathrm{per}\, A| > 0. \tag{4.23}$$

Der erste offene Fall wäre demnach $n = 11$. Satz 4.9 legt unmittelbar die Frage nach dem Minimum von $|\mathrm{per}\, A|$ für die dort betrachteten n nahe. Eine allgemeine Antwort ist noch ausständig, doch gestatten die bisher untersuchten Fälle $k = 1, 2, 3$ die (unveröffentlichte)

Vermutung. *Es sei $n = 2^k - 1$ für $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt*

$$\min_{A \in \Gamma_n} |\mathrm{per}\, A| = 2^{n - [\log_2 n] - 1}. \tag{4.24}$$

5. Obere Schranken für Permanenten

5.1. (0,1)-Matrizen.

Satz 5.1 (Minc [42, p. 790]). *Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \dots, r_n$. Dann gilt*

$$\mathrm{per}\, A \le \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i + 1}{2}. \tag{5.1}$$

Gleichheit gilt in (5.1) genau dann, wenn A eine Permutationsmatrix ist.

Minc äußerte überdies eine Vermutung, deren Beweis zehn Jahre später von Brègman erbracht wurde und welche wir aus diesem Grund gleich als Satz formulieren:

SATZ 5.2 (Brègman [8, p. 30]). *Es sei A eine $n \times n$-(0,1)-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} (r_i!)^{1/r_i}. \tag{5.2}$$

Gleichheit tritt in (5.2) genau dann ein, wenn es $n \times n$-Permutationsmatrizen P und Q gibt, so daß PAQ direkte Summe von Matrizen $J^{(\nu_k)}$ $(k = 1, \ldots, t;\ \nu_1 + \ldots + \nu_t = n)$ ist.

Die Verschärfung gegenüber (5.1) folgt aus der Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel für die ersten r_i natürlichen Zahlen.
Auch in diesem Unterabschnitt wollen wir einen Blick auf die Menge Λ_n^k werfen. Aus Satz 5.2 folgt für $A \in \Lambda_{kt}^k$ unmittelbar

$$\operatorname{per} A \leq (k!)^t. \tag{5.3}$$

Damit ist auch eine Vermutung von Ryser [57, p. 458] gezeigt. In den Fällen $n \not\equiv 0 \pmod{k}$ konnte eine Verschärfung von (5.2) für $k = 2$ und $k = 3$ erzielt werden.

SATZ 5.3 (Merriell [41, *passim*]). *Für alle $A \in \Lambda_{2t+1}^2$ gilt*

$$\operatorname{per} A \leq 2^t \tag{5.4}$$

und für alle $A \in \Lambda_{3t+i}^3$ gilt

$$\operatorname{per} A \leq \begin{cases} 6^{t-1} \cdot 9, & \text{falls } i = 1, \\ [6^{t-2} \cdot 9^2], & \text{falls } i = 2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Die in Satz 5.3 angegebenen Schranken sind bestmöglich. Ist nämlich $J^{(n)}$ die $n \times n$-Matrix, deren Elemente sämtlich 1 sind, und ist K_n wie in (1.7) erklärt, dann gilt Gleichheit in (5.4) und (5.5) für die Matrizen $J^{(2)} \oplus \ldots \oplus J^{(2)} \oplus K_3$ $(J^{(2)}$ $(t-1)$-mal) beziehungsweise $J^{(3)} \oplus \ldots \oplus J^{(3)} \oplus K_4$ $(J^{(3)}$ $(t-1)$-mal) beziehungsweise $J^{(3)} \oplus \ldots \oplus J^{(3)} \oplus K_4 \oplus K_4$ $(J^{(3)}$ $(t-2)$-mal). Für $n > 3$ gibt es lediglich vermutete Schranken.

5.2. Beliebige nichtnegative Matrizen. In Abschnitt 3 wurde das Minimum der Permanente auf der Menge der doppeltstochastischen Matrizen bestimmt. Im Gegensatz zu diesem läßt sich das Maximum sehr leicht bestimmen.

Satz 5.4 (Marcus-Newman [37, pp. 61 - 62]). *Für alle $A \in \Omega_n$ gilt*

$$\operatorname{per} A \leq 1. \tag{5.6}$$

Gleichheit tritt in (5.6) *genau dann auf, wenn A eine Permutationsmatrix ist.*

Eine Verallgemeinerung auf beliebige nichtnegative Matrizen bietet das folgende Analogon zu Satz 4.7.

Satz 5.5 (Jurkat-Ryser [22, p. 26]; Minc [44, p. 234]). Es sei $A = (a_{ij})$ *eine nichtnegative $n \times n$-Matrix. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{i} a_{it}^{*}. \tag{5.7}$$

Ist A positiv, dann besteht in (5.7) *Gleichheit genau dann, wenn die ersten $n-1$ Zeilen von A kollinear zum Vektor* $(1, \ldots, 1)$ *sind.*

Mit der gleichen Begründung wie in der Bemerkung nach Satz 4.7 kann man die rechte Seite von (5.7) ersetzen durch das Minimum dieser Ausdrücke über alle Permutationen der Zeilenindizes.
Es sei $A = (a_{ij})$ wiederum eine nichtnegative $n \times n$-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$ und den Spaltensummen $s_1, \ldots, s_n$. Dann gilt

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i \tag{5.8}$$

und

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} s_i, \tag{5.9}$$

da auf der rechten Seite von (5.8) und (5.9) im allgemeinen überflüssige Terme auftreten. Aus diesen Ungleichungen folgt schließlich

$$\operatorname{per} A \leq \min\left(\prod_{i=1}^{n} r_i, \prod_{i=1}^{n} s_i\right), \tag{5.10}$$

was sich in folgender Weise verbessern läßt:

SATZ 5.6 (Jurkat-Ryser [23, p. 354]). *Es sei A eine nichtnegative $n \times n$-Matrix mit den Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$ und den Spaltensummen $s_1, \ldots, s_n$. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} \min(r_i', s_i'). \tag{5.11}$$

Diese Abschätzung ist bestmöglich: Es sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix, die den Voraussetzungen von Satz 5.6 genügt. Ferner enthalte jede (rechteckige) Untermatrix von A eine Zeile oder Spalte mit höchstens einem positiven Element und es gelte $a_{ii} = \min(r_i', s_i')$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann tritt in (5.11) Gleichheit auf.

5.3. (1,–1)-Matrizen. Auf der Menge Γ_n der $n \times n$-$(1, -1)$-Matrizen ist das Maximum des Absolutbetrages der Permanente klarerweise durch $n!$ gegeben; diese Schranke wird beispielsweise für die Matrix $J^{(n)}$ erreicht. Wang [68, p. 360] stellte unter anderem die Frage nach scharfen oberen Schranken für den Fall, daß die betrachteten Matrizen in Γ_n nichtsingulär sind. Diesem Problem werden wir uns nun widmen. Dabei spielen drei spezielle Matrizen aus Γ_n eine wichtige Rolle:

$$D_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

$$S_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.14}$$

Satz 5.7.

$$\omega_n := \operatorname{per} D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-2)^k. \tag{5.15}$$

$$\vartheta_n := \operatorname{per} C_n = (n+2)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!}(-2)^k + (-2)^n. \tag{5.16}$$

Die Beziehungen (5.15) und (5.16) folgen unmittelbar aus einem Satz von Perfect [54, p. 236] über die Anzahl positiver Diagonalprodukte in Matrizen der zur Diskussion stehenden Gestalt.

Satz 5.8 (Kräuter-Seifter [29, p. 57]).

$$\begin{cases} \operatorname{per} S_{2n-1} &= 2^{2n-1}(2^n-1)B_{2n}/n, \\ \operatorname{per} S_{2n} &= 0, \end{cases} \tag{5.17}$$

wobei B_n die n-te Bernoulli-Zahl bezeichnet.

Die Herleitung dieses Ergebnisses erfordert die Kenntnis des *Hit-Polynoms* (Riordan [56, p. 165]) und der exponentiell erzeugenden Funktion für Euler-Polynome (Abramowitz-Stegun [1, p. 804]). Bemerkenswert ist, daß die Folge $\langle \tau_n \rangle$ mit $\tau_n = |\operatorname{per} S_n|$ gerade die Tangensfunktion als exponentiell erzeugende Funktion besitzt, das heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \frac{x^n}{n!} = \tan x, \tag{5.18}$$

wenn man noch $\tau_0 = 0$ definiert (Abramowitz-Stegun [1, p. 75]). Die τ_n werden aufgrund dieses Zusammenhangs in der einschlägigen Literatur *Tangens-Zahlen* genannt (Comtet [12, p. 259]).
Zwei Matrizen $A, B \in \Gamma_n$ mögen zueinander *äquivalent* heißen ($A \sim B$), falls B aus A durch Hintereinanderausführung von Transformationen der folgenden Art hervorgeht:
(a) Vertauschen von Zeilen und Spalten;
(b) Transponieren;
(c) Multiplizieren von Zeilen oder Spalten mit dem Faktor -1.
Insbesondere gilt für zwei zueinander äquivalente Matrizen $A, B \in \Gamma_n$

$$|\operatorname{per} A| = |\operatorname{per} B|. \tag{5.19}$$

Eine detaillierte Betrachtung der eingangs erwähnten Fragestellung für $n \leq 5$ liefert zunächst die Beziehung

$$|\operatorname{per} A| \leq \vartheta_5 = 24 \tag{5.20}$$

für alle nichtsingulären $A \in \Gamma_5$. Gleichheit tritt in (5.20) genau dann auf, wenn $A \sim C_5$ gilt. Ferner haben wir

$$|\operatorname{per} A| \leq \omega_5 = 8 \tag{5.21}$$

für alle nichtsingulären $A \in \Gamma_5$ mit $A \not\sim C_5$ und $A \not\sim S_5$. Entgegen

$$16 = \tau_5 > \omega_5 = 8 \tag{5.22}$$

kann mithilfe von Satz 5.8 gezeigt werden, daß für alle $n \geq 6$

$$\tau_n < \omega_n \tag{5.23}$$

gilt, sodaß die für $n = 5$ erforderliche Zusatzbedingung $A \not\sim S_5$ für den Nachweis der Gültigkeit von (5.21) entfallen kann. Schließlich gelangt man zu zwei Vermutungen (Kräuter-Seifter [30]).

Vermutung 1. *Es sei $A \in \Gamma_n$ nichtsingulär, $n \geq 5$. Dann gilt*

$$|\operatorname{per} A| \leq \vartheta_n, \tag{5.24}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann zutrifft, wenn $A \sim C_n$ gilt.

Vermutung 2. *Es sei $A \in \Gamma_n$ nichtsingulär mit $A \not\sim C_n, n \geq 6$. Dann gilt*

$$|\operatorname{per} A| \leq \omega_n. \tag{5.25}$$

Eine Charakterisierung des Gleichheitsfalles in (5.25) ist nicht bekannt. Ein allgemeiner Beweis dieser Vermutungen dürfte ziemlich schwierig sein, da die Nichtsingularität (eine über die Determinante definierte Eigenschaft!) zuwenig Informationen über die Struktur der Matrix liefert, deren Permanente berechnet werden soll. Im Rahmen eines allgemeinen Satzes konnte aber folgendes gezeigt werden:

Satz 5.9 (Kräuter-Seifter [30]). *Die Vermutungen 1 und 2 sind richtig für alle in Frage kommenden Matrizen mit höchstens zwei negativen Elementen je Zeile und Spalte sowie für alle dazu äquivalenten Matrizen.*

6. Andere Problemkreise

In diesem Abschnitt werden neuere Ergebnisse der Permanententheorie besprochen, welche sich nicht unmittelbar in die bereits behandelten Themen einordnen lassen.

In [46, p. 155] führt Minc als älteste unbewiesene Permanenten-Vermutung jene von Scott [61] aus dem Jahr 1881 an. Nach rund einhundert Jahren haben drei Autoren unabhängig voneinander einen Beweis dafür gefunden.

Satz 6.1 (Minc [48, p. 145]; Kittappa [24, p. 75]; Svrtan [63, p. 204]). *Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} = (x_i - y_j)^{-1}$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ die verschiedenen Lösungen der Gleichungen $x^n - 1 = 0$ beziehungsweise $y^n + 1 = 0$ sind. Dann gilt*

$$(6.1) \qquad |\mathrm{per}\, A| = \begin{cases} n \cdot 2^{-n}[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2)]^2 & \textit{für ungerades} \quad n, \\ 0 & \textit{für gerades} \quad n. \end{cases}$$

Die entscheidende Grundlage aller drei Beweise ist der

Satz 6.2 (Borchardt [7, p. 194]). *Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} = (x_i - y_j)^{-1}$, wobei $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ komplexe Zahlen bezeichnen. Dann gilt*

$$(6.2) \qquad \det\, A\, \mathrm{per}\, A = \det\,(A * A),$$

wobei $*$ das Hadamard-Produkt zweier Matrizen bezeichnet.

Den kürzesten Beweis erbrachte Svrtan. Da er zudem den Vorteil besitzt, mit elementaren algebraischen Hilfsmitteln auszukommen, soll er hier skizziert werden. Es seien G und H die Mengen der n-ten Wurzeln von $+1$ beziehungsweise -1 und es sei $\varepsilon \in H$ beliebig, aber fest gewählt. Aufgrund der vollständigen Symmetrie der Permanente in den Zeilen und Spalten des Arguments darf man annehmen, daß die Elemente aus G aund H von der Gestalt

$$(6.3) \qquad \begin{cases} x_i &= \alpha^i \quad (i = 1, \ldots, n), \\ y_j &= \varepsilon\alpha^j \quad (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

sind, wobei α eine beliebige primitive n-te Einheitswurzel ist. Führt man nun die Bezeichnungen $D_1 = \det A$ und $D_2 = \det(A * A)$ ein, dann kann man unter Betrachtung spezieller, aus den Termen $(1-\varepsilon\alpha^k)^{-\nu}$ zusammengesetzter zirkulanter Matrizen zeigen, daß

$$D_\nu = (-1)^{(n-1)\nu} \prod_{k=1}^{n} f_\nu(x_k) \tag{6.4}$$

mit

$$f_\nu(x_k) = \varepsilon^{-k} \sum_{h\in H} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (1-h)^{j-\nu} \tag{6.5}$$

für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ gilt. Spaltet man die innere Summe in (6.5) entsprechend $j \leq \nu - 1$ und $j \geq \nu$ in zwei Teile auf und berücksichtigt man die Tatsache, daß

$$\sum_{h\in H} h^t = \begin{cases} n & \text{für} \quad t = 0, \\ 0 & \text{für} \quad 0 < t < n \end{cases} \tag{6.6}$$

ist, dann erhält man aus (6.5)

$$f_\nu(x_k) = \varepsilon^{-k} \sum_{j=0}^{\nu-1} (-1)^j \binom{k}{j} \left\{ \sum_{h\in H} (1-h)^{j-\nu} - n \right\}. \tag{6.7}$$

Damit sowie mit

$$\sum_{h\in H} (1-h)^{-1} = \frac{n}{2}, \qquad \sum_{h\in H} (1-h)^{-2} = \frac{n(2-n)}{4} \tag{6.8}$$

folgt über (6.4) die Darstellung

$$D_\nu = \begin{cases} -(\frac{n}{2})^n \prod_{k=1}^n \varepsilon^{-k} & \text{für} \quad \nu = 1, \\ \\ (-\frac{n}{4})^n \prod_{k=1}^n \varepsilon^{-k}(n-2k+2) & \text{für} \quad \nu = 2. \end{cases} \tag{6.9}$$

Wegen $D_1 \neq 0$ folgt schließlich aus Satz 6.2 $(D_1 \operatorname{per} A = D_2)$

$$\operatorname{per} A = (-1)^{n-1} 2^{-n} \prod_{k=1}^{n} (n-2k+2) \tag{6.10}$$

und daraus (6.1).

1967 äußerten Marcus und Minc [40, p. 306] die folgende

VERMUTUNG. *Es sei $n \geq 2$. Dann gilt für alle $S \in \Omega_n$*

$$\operatorname{per} S \geq \operatorname{per}\left(\frac{nJ_n - S}{n-1}\right). \tag{6.11}$$

Ist $n \geq 4$, dann gilt in (6.11) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $S = J_n$ gilt.[1]

Wie die erwähnten Autoren zeigten, folgt aus dieser Vermutung jene von van der Waerden. Während letztere mittlerweile bewiesen werden konnte (siehe Abschnitt 3), konnten in bezug auf die obige Behauptung bisher nur Teilresultate hergeleitet werden. Marcus und Minc [40, pp. 307 - 308] gaben Beweise für hinreichend nahe bei J_n liegende sowie für positiv semidefinite symmetrische $S \in \Omega_n$, Wang [69, p. 147] für $n = 3$ und Foregger [16, p. 125] für $n = 4$. In seiner vor kurzem erschienenen Arbeit [11] wies Chang die Gültigkeit von (6.11) im Komplement einer Umgebung von J_n nach.

SATZ 6.3 (Chang [11, p. 116]). *Es sei $f(S) = \operatorname{per}((nJ_n - S)/(n-1))$ für $S \in \Omega_n$ und es sei $k_n = d_n(n-1)^{-n}$, wobei d_n die n-te Dérangement-Zahl bezeichnet. Dann gilt*

$$\max_{S \in \Omega_n}(f(S)) = f(I) = k_n. \tag{6.12}$$

Ist $n \geq 2$ und ist $\operatorname{per} S \geq k_n$ für $S \in \Omega_n$, dann gilt (6.11).

Nach Satz 6.3 ist $h_n := \min_{S \in \Omega_n}(\operatorname{per} S) = n!\, n^{-n}$; die Gültigkeit der Vermutung ist also nur mehr für $h_n \leq \operatorname{per} S < k_n$ ungeklärt. Diese Lücke wird für wachsendes n stets kleiner: aus (1.11) folgt nämlich $d_n \sim n!/e$ und damit $|k_n - h_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Es sei $U = (nJ_n - I)/(n-1)$; dann gilt für alle $S \in \Omega_n$ $(nJ_n - S)/(n-1) = SU$ und (6.11) läßt sich schreiben in der Form

$$\operatorname{per} S \geq \operatorname{per} SU. \tag{6.13}$$

Chang verwendet im Beweis von Satz 6.3 eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der Permanente einer doppeltstochastischen Matrix nach H. L. Harper (siehe Wilf [70, pp. 249 - 250]): Wir betrachten n Kugeln und n Schachteln. Der Vektor $(r_1, \ldots, r_n)$ bezeichne das Ereignis, daß sich in der Schachtel m_j gerade r_j Kugeln befinden $(j = 1, \ldots, n)$, wobei $(m_1, \ldots, m_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ ist. Bezeichnet man bei einem simultanen Übergang T_A aller n

[1] Die in [40] ursprünglich für $n \geq 3$ formulierte Gleichheitsbedingung wurde für $n = 3$ von Wang [69] als falsch erkannt.

Kugeln die Wahrscheinlichkeit, daß eine Kugel von der Schachtel i zur Schachtel j wechselt, mit a_{ij}, dann ist $A = (a_{ij})$ eine doppeltstochastische Matrix. Ist nun $p_A(r_1, \ldots, r_n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis $(r_1, \ldots, r_n)$ nach dem Übergang T_A auftritt, wobei der Anfangszustand $(1, \ldots, 1)$ war, dann gilt

$$p_A(1, \ldots, 1) = \operatorname{per} A. \tag{6.14}$$

Bezeichnet ferner $q_A(r_1, \ldots, r_n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis $(1, \ldots, 1)$ nach dem Übergang T_A auftritt, wobei der Anfangszustand $(r_1, \ldots, r_n)$ war, dann erhält man mithilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen bei Summation über alle möglichen Zustände $(r_1, \ldots, r_n)$

$$\operatorname{per} SU = \sum p_S(r_1, \ldots, r_n)\, q_U(r_1, \ldots, r_n) \tag{6.15}$$

und

$$q_U(r_1, \ldots, r_n) \leq q_U(1, \ldots, 1) = k_n, \tag{6.16}$$

woraus

$$\operatorname{per} SU \leq q_U(1, \ldots, 1) \sum p_S(r_1, \ldots, r_n) = k_n \tag{6.17}$$

folgt. Damit ergibt sich wegen $\operatorname{per} SU = f(S)$

$$f(S) \leq k_n = f(I). \tag{6.18}$$

Für $\operatorname{per} S \geq k_n$ folgt aus (6.13) und (6.18) sofort (6.11).

Abgesehen von verschiedenen Verallgemeinerungen der Vermutung von van der Waerden (siehe auch Satz 3.8) und den Bemühungen, sie zu beweisen, bietet das Studium der Permanente auf der Menge Ω_n auch anderweitig ein interessantes Betätigungsfeld (siehe [50, pp. 237 - 239]), aus welchem hier ein Teilaspekt herausgegriffen werden soll.
Der Satz von Birkhoff [6, p. 147] besagt, daß Ω_n ein konvexes Polyeder bildet, dessen $n!$ Ecken die $n \times n$-Permutationsmatrizen sind. Es liegt nahe zu fragen, ob die Permanente eine konvexe Funktion auf Ω_n ist. Für $n = 2$ kann man in der Tat direkt zeigen, daß

$$\operatorname{per}\,(\alpha B + (1-\alpha)\,A) \leq \alpha \operatorname{per} B + (1-\alpha) \operatorname{per} A \tag{6.19}$$

für alle $A, B \in \Omega_2$ und für alle α, $0 \le \alpha \le 1$, gilt. Für $n = 3$ hingegen konnte Marcus ein Gegenbeispiel angeben (siehe auch Perfect [53]). In der Folge wurde versucht, entsprechende Aussagen durch geeignete Einschränkungen von B zu bekommen. Perfect [53] bewies (6.19) für $B = I$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ sowie für beliebiges $A \in \Omega_n$. Eine Verbesserung erzielten Brualdi und Newman [9] für $B = I$ und alle α mit $0 \le \alpha \le 1$ sowie für beliebiges $A \in \Omega_n$. Angeregt durch ein weiteres Resultat dieser Autoren beschäftigten sich Lih und Wang [33] mit der folgenden

Vermutung. *Für alle $A \in \Omega_n$ und für alle α mit $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ gilt*

$$\operatorname{per}\,(\alpha J_n + (1-\alpha)A) \le \alpha \operatorname{per} J_n + (1-\alpha)\operatorname{per} A. \tag{6.20}$$

Ein Beweis von (6.20) ist bisher nur für $n = 3$ geglückt; im Fall $n = 4$ hat man bereits mit erheblichen Schwierigkeiten zu rechnen.

Satz 6.4 (Lih-Wang [33]). *Obige Vermutung ist richtig für $n = 3$. Das Gleichheitszeichen tritt genau dann auf, wenn entweder $\alpha = 1$ ist oder $A = J_3$ oder $\alpha = \frac{1}{2}$ und $A = \frac{1}{2}(3J_3 - I)$ bis auf Zeilen- oder Spaltenvertauschungen.*

Da nach Satz 3.6 $\operatorname{per} B \ge \operatorname{per} J_3$ für alle $B \in \Omega_3$ gilt, erhält man aus Satz 6.4 unmittelbar die Beziehung

$$\operatorname{per} J_3 \le \operatorname{per}\,(\alpha J_3 + (1-\alpha)A) \le \operatorname{per} A \tag{6.21}$$

für alle $A \in \Omega_3$ und für alle α mit $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$.

Von hermiteschen Matrizen handelt eine auf Marcus [46, p. 156] zurückgehende

Vermutung. *Es sei A eine positiv semidefinite hermitesche $nk \times nk$-Matrix, zusammengesetzt aus k^2 Blöcken A_{ij}, welche $n \times n$-Matrizen sind. Ferner sei $B = (b_{ij})$ die $k \times k$-Matrix mit $b_{ij} = \operatorname{per} A_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$. Dann gilt*

$$\operatorname{per} A \ge \operatorname{per} B. \tag{6.22}$$

Sind alle A_{ii} positiv definit, dann gilt in (6.22) Gleichheit genau dann, wenn A die Form $A = A_{11} \oplus \ldots \oplus A_{kk}$ besitzt.

Lieb [32] bestätigte diese Vermutung für $k = 2$. Vor kurzem gelang es dann Pate, für symmetrische Matrizen und für hinreichend große n (bei beliebigem k) eine Ungleichung zu beweisen, welche (6.22) verschärft.

Satz 6.5 (Pate [52, p. 14]). *Es sei A eine positiv semidefinite symmetrische $nk \times nk$-Matrix von der in der obigen Vermutung angegebenen Struktur. Ferner sei $C = (c_{ij})$ die $k \times k$-Matrix mit $c_{ij} = |\operatorname{per} A_{ij}|$ $(i, j = 1, \dots, k)$. Dann gibt es für jedes k eine natürliche Zahl n_k, so daß für alle $n \geq n_k$ gilt:*

$$\operatorname{per} A \geq \operatorname{per} C. \tag{6.23}$$

Im Beweis dieses Satzes benützt Pate die Tatsache, daß eine positiv semidefinite symmetrische $m \times m$-Matrix stets darstellbar ist als Gramsche Matrix $((x_i, x_j))$ geeigneter Vektoren $x_1, \dots x_m$ aus dem $\mathbf{R}^m$, wobei $(.,.)$ das innere Produkt im $\mathbf{R}^m$ bezeichnet. Aufgrund eines von Marcus und Newman [39, pp. 48 - 49] entdeckten fundamentalen Zusammenhangs läßt sich die Permanente einer Gramschen Matrix zurückführen auf ein inneres Produkt in der Symmetrieklasse der vollständig symmetrischen Tensoren. Auf die ziemlich komplizierten Details soll hier nicht eingegangen werden.

Wir schließen mit einigen Betrachtungen über zirkulante Matrizen. Solche Matrizen treten beispielsweise bei der Behandlung klassischer kombinatorischer Fragestellungen, wie etwa beim *problème des rencontres* oder beim *problème des ménages,* auf. P_n bezeichne die $n \times n$-Permutationsmatrix mit Einsen an den Stellen $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)$. Dann nennen wir eine Matrix der Form

$$Z = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_n^i \tag{6.24}$$

mit $\lambda_i \in \{0, 1\}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ und $P_n^0 = I$ eine *zirkulante* $(0,1)$-*Matrix* oder (wie im folgenden stets bezeichnet) *Zirkulante.* Der Übersicht in Minc [46, pp. 44 - 48] kann man entnehmen, daß bis vor kurzem lediglich Zirkulanten mit $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{k-1} = 1$ und $\lambda_k = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ betrachtet worden sind. Eades, Praeger und Seberry [13] haben sich mit Zirkulanten allgemeinerer Bauart beschäftigt, wobei vor allem die verschiedenen Methoden, die zur Berechnung ihrer Permanente herangezogen wurden, Beachtung verdienen. Um die Notation einfacher zu gestalten, genügt es, eine Zirkulante mit den Positionen der Einsen in ihrer ersten Zeile zu identifizieren. Ist also $A = (a_{ij})$ $(i, j = 0, 1, \dots, n-1)$ und gilt $a_{0j_0} = \ldots = a_{0j_r} = 1$ $(0 \leq r \leq n-1)$, dann schreiben wir $A = (j_0, \dots, j_r)$. Zwei Zirkulanten $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ mögen zueinander *äquivalent* heißen, wenn es Zahlen $x, y \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ gibt, so daß $\operatorname{ggT}(x, n) = 1$ und für jedes $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ $a_{0,xj+y} = b_{0j}$ gilt. Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix und B eine $k \times k$-Matrix. Unter dem *Kronecker-Produkt* $A \otimes B$ von A und B verstehen wir die $nk \times nk$-Matrix, die aus den n^2 Blöcken $a_{ij}B$ $(i, j = 0, 1, \dots, n-1)$ zusammengesetzt ist.

Satz 6.6 (Eades-Praeger-Seberry [13, pp. 148 - 149]). *Es sei A eine beliebige $(0,1)$-Matrix und es bezeichne I_ν die $\nu\times\nu$-Einheitsmatrix. Dann gilt*

$$\operatorname{per}(A\otimes I_k) = (\operatorname{per} A)^k \tag{6.25}$$

und

$$\operatorname{per}\left((I_k+P_k)\otimes J^{(m)}\right) = (m!)^k \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}^k. \tag{6.26}$$

Während man (6.25) unmittelbar durch geeignete Zeilen- und Spaltenvertauschungen erhält, ist für die Herleitung von (6.26) explizites Abzählen der positiven Diagonalprodukte erforderlich. Natürlich sind die in Satz 6.6 betrachteten Matrizen im allgemeinen keine Zirkulanten, doch kann man mit den dortigen Formeln folgendes herleiten. Wir betrachten eine $n\times n$-Zirkulante mit zwei positiven Elementen je Zeile, also eine Matrix (a,b). Ist dann $\operatorname{ggT}(n,a-b)=g$, dann sind (a,b) und $(0,g)$ zueinander äquivalent und wegen $(0,g)=(I_{n/g}+P_{n/g})\otimes I_g$ folgt

$$\operatorname{per}(a,b) = (\operatorname{per}(I_{n/g}+P_{n/g}))^g = 2^g. \tag{6.27}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die $2k\times 2k$-Zirkulanten $(0,1,k,k+1)$ sowie für die $3k\times 3k$-Zirkulanten $(0,1,k,k+1,2k,2k+1)$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{per}(0,1,k,k+1) & = & 2^{k+1}+2^{2k}, \\ \operatorname{per}(0,1,k,k+1,2k,2k+1) & = & 2^{k+1}3^k(1+3^k). \end{array}\right. \tag{6.28}$$

Neben dem in Satz 6.6 benützten Beweisverfahren und neben der Herleitung von Rekursionsformeln für schwach besetzte Zirkulanten mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes wird noch die Methode der sogenannten komplementären Entwicklung vorgestellt, bei welcher es sich um eine besonders einfache Variante des Inklusions-Exklusions-Prinzips handelt. Es sei $A=(a_{ij})$ eine $(0,1)$-Matrix mit $a_{km}=1$; die Matrizen B und C mögen aus A hervorgehen, indem man $a_{km}=0$ setzt beziehungsweise die k-te Zeile und m-te Spalte von A streicht. Aufgrund der Multilinearität der Permanente folgt dann $\operatorname{per} A = \operatorname{per} B + \operatorname{per} C$. Damit wurden beispielsweise die Dérangement-Zahlen $d_n = \operatorname{per}(1,2,\ldots,n-1)$ in Abschnitt 1 berechnet. Auf ähnliche Weise gelangt man zu den n-ten *Ménage-Zahlen* $M_n = \operatorname{per}(2,3,\ldots,n-1)$ (siehe Ryser [58, p. 32]).

Satz 6.7 (Eades-Praeger-Seberry [13, p. 157]). *Es sei n gerade und es bezeichne R_n die Zirkulante $(1,3,4,\ldots,n-1)$. Dann gilt*

$$\text{per}\, R_n = M_n + 2. \tag{6.29}$$

Aus dem im Anschluß an Satz 6.6 Gesagten folgt für $\text{ggT}(n, x) = 2$

$$\text{per}\,(0, 1, 2, \ldots, x-1, x+1, \ldots, n-1) = M_n + 2. \tag{6.30}$$

LITERATUR[2]

[1] Milton ABRAMOWITZ and Irene A. STEGUN (editors), *Handbook of Mathematical Functions.* Ninth printing. New York: Dover, 1972.

[2] Aleksandr Danilovič ALEKSANDROV, K teorii smešannych ob-emov vypuklych tel IV. Smešannye diskriminanty i smešannye ob-emy. [Zur Theorie der gemischten Volumina konvexer Körper IV. Gemischte Diskriminanten und gemischte Volumina.] *Matematičeskij Sbornik (N. S.)* **3,** 227 - 251 (1938).

[3] Thøger BANG, On matrix-functions giving a good approximation to the v. d. Waerden permanent conjecture. *Preprint, Københavns Universitet,* 1979.

[4] Natália BEBIANO, On the evaluation of permanents. *Pacific Journal of Mathematics* **101,** 1 - 9 (1982).

[5] Jacques BINET, Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques. *Journal de l'École Polytechnique* **9,** Cah. 16, 280 - 354 (1813).

[6] Garrett BIRKHOFF, Tres observaciones sobre el algebra lineal. *Revista de la Universidad Nacional de Tucumán (A)* **5,** 147 - 151 (1946).

[7] Carl Wilhelm BORCHARDT, Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **53,** 193 - 198 (1855).

[8] L. M. BRĖGMAN, Nekotorye svojstva neotricatel'nych matric i ich permanentov. [Einige Eigenschaften nichtnegativer Matrizen und ihrer Permanenten.] *Doklady Akademii Nauk SSSR* **211,** 27 - 30 (1973). Englische Übersetzung in: *Soviet Mathematics Doklady* **14,** 945 - 949 (1973).

[9] Richard Anthony BRUALDI and Morris NEWMAN, Inequalities for permanents and permanental minors. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **61,** 741 - 746 (1965).

[10] Augustin Louis CAUCHY, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *Journal de l'École Polytechnique* **10,** Cah. 17, 29 - 112 (1815).

[11] Derek K. CHANG, A note on a conjecture of M. Marcus and H. Minc. *Linear and Multilinear Algebra* **13,** 115 - 117 (1983).

[2] Hier ist nur die zitierte Literatur angegeben. Ausführliche Bibliographien, versehen mit Kurzreferaten (!), findet man in Minc [46, pp. 161 - 199], [50, pp. 250 - 262].

[12] Louis COMTET, *Advanced Combinatorics.* Revised and enlarged edition. Translated from the French by J. W. NIENHUYS. Dordrecht: Reidel, 1974.

[13] Peter EADES, Cheryl Elisabeth PRAEGER, and Jennifer Roma SEBERRY, Some remarks on the permanents of circulant (0,1) matrices. *Utilitas Mathematica* **23**, 145 - 159 (1983).

[14] Grigorij Petrovič EGORYČEV, Dokazatel'stvo gipotezy van der Vardena dlja permanentov. [Beweis der Vermutung von van der Waerden für Permanenten.] *Sibirskij Matematičeskij Žurnal* **22**, Nom. 6, 65 - 71 (1981). Englische Übersetzung in: *Advances in Mathematics* **42**, 299 - 305 (1981).

[15] D. I. FALIKMAN, Dokazatel'stvo gipotezy van der Vardena o permanente dvaždy stochastičeskoj matricy. [Beweis der Vermutung von van der Waerden über die Permanente einer doppeltstochastischen Matrix.] *Matematičeskie Zametki* **29**, 931 - 938 (1981). Englische Übersetzung in: *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* **29**, 475 - 479 (1981).

[16] Thomas Hustad FOREGGER, Remarks on a conjecture of M. Marcus and H. Minc. *Linear and Multilinear Algebra* **7**, 123 - 126 (1979).

[17] Shmuel FRIEDLAND, A lower bound for the permanent of a doubly stochastic matrix. *Annals of Mathematics (2)* **110**, 167 - 176 (1979).

[18] Shmuel FRIEDLAND, A proof of a generalized van der Waerden conjecture on permanents. *Linear and Multilinear Algebra* **11**, 107 - 120 (1982).

[19] Georg FROBENIUS, Über zerlegbare Determinanten. *Sitzungsberichte der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Physikalisch-Mathematische Klasse* **1917**, 274 - 277 (1917).

[20] Peter Murray GIBSON, Conversion of the permanent into the determinant. *Proceedings of the American Mathematical Society* **27**, 471 - 476 (1971).

[21] Marshall HALL, jr., Distinct representatives of subsets. *Bulletin of the American Mathematical Society* **54**, 922 - 926 (1948).

[22] Wolfgang B. JURKAT and Herbert John RYSER, Matrix factorizations of determinants and permanents. *Journal of Algebra* **3**, 1 - 27 (1966).

[23] Wolfgang B. JURKAT and Herbert John RYSER, Term ranks and permanents of nonnegative matrices. *Journal of Algebra* **5**, 342 - 357 (1967).

[24] Rethinasamy KITTAPPA, Proof of a conjecture of 1881 on permanents. *Linear and Multilinear Algebra* **10**, 75 - 82 (1981).

[25] Donald Ervin KNUTH, A permanent inequality. *The American Mathematical Monthly* **88**, 731 - 740 (1981).

[26] Dénes KŐNIG, Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Mathematische Annalen* **77**, 453 - 465 (1916).

[27] Dénes KŐNIG, Über trennende Knotenpunkte in Graphen (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen). *Acta Litterarum ac Scientiarum Szeged* **6**, 155 - 179 (1933).

[28] Arnold Richard KRÄUTER and Norbert SEIFTER, On convertible (0,1)-matrices. *Linear and Multilinear Algebra* **13**, 311 - 322 (1983).

[29] Arnold Richard KRÄUTER and Norbert SEIFTER, On some questions concerning permanents of $(1,-1)$-matrices. *Israel Journal of Mathematics* **45**, 53 - 62 (1983).

[30] Arnold Richard KRÄUTER and Norbert SEIFTER, Some properties of the permanent of $(1,-1)$-matrices. *Linear and Multilinear Algebra* **15,** 207 - 223 (1984).

[31] Jeffrey Clark LAGARIAS, The van der Waerden conjecture: Two Soviet solutions. *Notices of the American Mathematical Society* **29,** 130 - 133 (1982).

[32] Elliott Hershel LIEB, Proofs of some conjectures on permanents. *Journal of Mathematics and Mechanics* **16,** 127 - 134 (1966).

[33] Ko-Wei LIH and Edward Tzu-Hsia WANG, A convexity inequality on the permanent of doubly stochastic matrices. *Congressus Numerantium* **36,** 189 - 198 (1982).

[34] Jacobus Hendricus van LINT, Notes on Egoritsjev's proof of the van der Waerden conjecture. *Linear Algebra and Its Applications* **39,** 1 - 8 (1981).

[35] Jacobus Hendricus van LINT, The van der Waerden conjecture: Two proofs in one year. *The Mathematical Intelligencer* **4,** 72 - 77 (1982).

[36] David LONDON, Some notes on the van der Waerden conjecture. *Linear Algebra and Its Applications* **4,** 155 - 160 (1971).

[37] Marvin MARCUS and Morris NEWMAN, On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix. *Duke Mathematical Journal* **26,** 61 - 72 (1959).

[38] Marvin MARCUS and Henryk MINC, On the relation between the determinant and the permanent. *Illinois Journal of Mathematics* **5,** 376 - 381 (1961).

[39] Marvin MARCUS and Morris NEWMAN, Inequalities for the permanent function. *Annals of Mathematics (2)* **75,** 47 - 62 (1962).

[40] Marvin MARCUS and Henryk MINC, On a conjecture of B. L. van der Waerden. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **63,** 305 - 309 (1967).

[41] David MERRIELL, The maximum permanent in Λ_n^k. *Linear and Multilinear Algebra* **9,** 81 - 91 (1980).

[42] Henryk MINC, Upper bounds for permanents of (0,1)-matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society* **69,** 789 - 791 (1963).

[43] Henryk MINC, A lower bound for permanents of (0,1)-matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society* **18,** 1128 - 1132 (1967).

[44] Henryk MINC, Bounds for permanents of nonnegative matrices. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2)* **16,** 233 - 237 (1969).

[45] Henryk MINC, Rearrangements. *Transactions of the American Mathematical Society* **159,** 497 - 504 (1971).

[46] Henryk MINC, *Permanents.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 6. Reading: Addison-Wesley, 1978.

[47] Henryk MINC, Evaluation of permanents. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2)* **22,** 27 - 32 (1979).

[48] Henryk MINC, On a conjecture of R. F. Scott (1881). *Linear Algebra and Its Applications* **28,** 141 - 153 (1979).

[49] Henryk MINC, The van der Waerden permanent conjecture; pp. 23 - 40 in: *General Inequalities 3,* edited by E. F. BECKENBACH and W. WALTER. International Series of Numerical Mathematics, Volume 64. Basel: Birkhäuser, 1983.

[50] Henryk MINC, Theory of permanents 1978 - 1981. *Linear and Multilinear Algebra* **12,** 227 - 263 (1983).

[51] Thomas MUIR, On a class of permanent symmetric functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **11,** 409 - 418 (1882).

[52] Thomas Head PATE, Inequalities relating groups of diagonal products in a Gram matrix. *Linear and Multilinear Algebra* **11,** 1 - 17 (1982).

[53] Hazel PERFECT, An inequality for the permanent function. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **60,** 1030 - 1031 (1964).

[54] Hazel PERFECT, Positive diagonals of ± 1-matrices. *Monatshefte für Mathematik* **77,** 225 - 240 (1973).

[55] György PÓLYA, Aufgabe 424. *Archiv der Mathematik und Physik (3)* **20,** 271 (1913).

[56] John RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Fourth printing. New York: Wiley, 1967.

[57] Herbert John RYSER, Matrices of zeros and ones. *Bulletin of the American Mathematical Society* **66,** 442 - 464 (1960).

[58] Herbert John RYSER, *Combinatorial Mathematics.* The Carus Mathematical Monographs, Volume 14. Washington: The Mathematical Association of America, 1963.

[59] Alexander SCHRIJVER and W. G. VALIANT, On lower bounds for permanents. *Indagationes Mathematicae* **42,** 425 - 427 (1980).

[60] Alexander SCHRIJVER, Bounds on permanents, and the number of 1-factors and 1-factorizations of bipartite graphs; pp. 107 - 134 in: *Surveys in Combinatorics,* edited by E. K. LLOYD. London Mathematical Society Lecture Note Series, Volume 82. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

[61] Robert Forsyth SCOTT, Mathematical notes. *The Messenger of Mathematics (N. S.)* **10,** 142 - 149 (1881).

[62] Rodica SIMION and Frank W. SCHMIDT, On $(+1, -1)$-matrices with vanishing permanent. *Discrete Mathematics* **46,** 107 - 108 (1983).

[63] Dragutin SVRTAN, Proof of Scott's conjecture. *Proceedings of the American Mathematical Society* **87,** 203 - 207 (1983).

[64] Gábor SZEGŐ, Lösung zu Aufgabe 424. *Archiv der Mathematik und Physik (3)* **21,** 291 - 292 (1913).

[65] Helge TVERBERG, On the permanent of a bistochastic matrix. *Mathematica Scandinavica* **12,** 25 - 35 (1963).

[66] Marc VOORHOEVE, A lower bound for the permanents of certain (0,1)-matrices. *Indagationes Mathematicae* **41,** 83 - 86 (1979).

[67] Bartel Leendert van der WAERDEN, Aufgabe 45. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **35,** 117 (1926).

[68] Edward Tzu-Hsia WANG, On permanents of $(1, -1)$-matrices. *Israel Journal of Mathematics* **18,** 353 - 361 (1974).

[69] Edward Tzu-Hsia WANG, On a conjecture of M. Marcus and H. Minc. *Linear and Multilinear Algebra* **5,** 145 - 148 (1977).

[70] Herbert S. WILF, A mechanical counting method and combinatorial applications. *Journal of Combinatorial Theory* **4**, 246 - 258 (1968).

Arnold Richard KRÄUTER
Institut für Mathematik und
Angewandte Geometrie
Montanuniversität Leoben
Franz-Josef-Straße 18
A-8700 Leoben, Österreich
E-mail: kraeuter@unileoben.ac.at