Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1984, 229/S–08
Actes 8^e Séminaire Lotharingien, p. 75–78

# SUR UN THÉORÈME DE LANDAU

PAR

P.-A. PICON

Dans tout cet article, $[x]$ désigne la partie entière d'un nombre réel $x$. Soient $(u_i)$ et $(v_j)$ deux suites finies d'entiers naturels. Pour que $\prod_i u_i!/\prod_j v_j!$ soit entier, il faut et il suffit que

$$\sum_i \sum_{m\geq 1}\left[\frac{u_i}{p^m}\right] - \sum_j \sum_{m\geq 1}\left[\frac{v_j}{p^m}\right] \geq 0, \tag{1}$$

pour chaque premier $p$. Ce résultat provient essentiellement du fait que la valuation $p$-adique $|n!|_p$ de $n!$ est égale à $\sum_{m\geq 1}[n/p^m]$. Evidemment, pour que la condition (1) soit vérifiée, il suffit que l'on ait

$$\sum_i \left[\frac{u_i}{a}\right] - \sum_j \left[\frac{v_j}{a}\right] \geq 0$$

pour tout $a > 0$. LANDAU montre dans [1] que cette condition suffisante est aussi nécessaire quand les $u_i$ et les $v_j$ sont des formes linéaires. De façon précise, on a le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soient $(u_i)$ et $(v_j)$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Pour que $A(x) = \prod_i u_i(x)!/\prod_j v_j(x)!$ soit entier pour chaque $x$ de $\mathbf{Z}^n$ rendant $u_i(x)$ et $v_j(x)$ positifs, il faut et il suffit que l'on ait*

$$B(x) = \sum_i [u_i(x)] - \sum_j [v_j(x)] \geq 0$$

*pour chaque $x$ de $\mathbf{R}^n$ rendant $u_i(x)$ et $v_j(x)$ positifs.*

L'idée de la preuve est de montrer qu'on peut associer à chaque $x$ de $\mathbf{R}^n$ rendant les $u_i$ et $v_j$ positifs un élément $y$ de $\mathbf{Z}^n$ et un nombre premier $p$ tels que $[u(x)] = [u(y)/p]$ et $[u(y)/p^m] = 0$ pour $m \geq 2$, uniformément pour tous les $u_i$ et les $v_j$. Ainsi $B(x) = |A(y)|_p$, qui ne peut être négatif si $|A(y)|_p$ ne l'est pas.

Nous avons étendu ce résultat à des polynômes homogènes et montré que cette bi-implication avait lieu dans un cône (ensemble de dimension $n$

invariant par homothétie positive) ; ce qui montre qu'il y a un plus grand cône (à intérieur éventuellement vide) où $A(x) \in \mathbf{N}$.

Revenant à des formes linéaires, nous avons montré que l'on peut se ramener à ce qu'elles aient leurs coefficients dans $\mathbf{N}$ et que $B(e_k) = 0$ pour tout $k$, où $e_k$ est le $k^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Dans cette situation, $B$ admet la période 1 pour chacune des variables. Il suffit donc de l'étudier dans $[0,1[^n$, ce qui revient à regarder un nombre fini de cas. On constate alors que soit $B(x)$ est positive ou nulle dans tout $\mathbf{R}^n$, soit qu'il n'existe aucun cône (à intérieur non vide) où elle le soit. De plus, appelant $d$ la différence entre le nombre de $v_j$ et le nombre de $u_i$, on montre que $B(x) + B(\vec{1} - x) = d$ si $B$ est continue en $x$, ce qui entraîne les équivalences

$$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow B(x) \leq d \Rightarrow 0 \leq B(x) \leq d,$$

et qui montre que les fonctions $B$ correspondant aux quotients-produits $A(x)$ entiers sont celles dont la différence des valeurs extrêmes est minimum et vaut $d$. On a donc $d \geq 1$ pour $A(x)$ entier et $A(x) \not\equiv 1$.

En second lieu, on a considéré la $q$-factorielle

$$(n!)_q = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^k}{1-q}$$

de $n$, qui est un polynôme de $\mathbf{Z}[q]$, et montré que $\prod_i (u_i!)_q / \prod_j (v_j!)_q$ est un polynôme si et seulement si

$$\sum_i \left[\frac{u_i}{a}\right] - \sum_j \left[\frac{v_j}{a}\right] \geq 0$$

pour chaque entier naturel $a \geq 2$. Ceci est immédiat, car

$$\frac{1-q^k}{1-q} = \prod_{a|k} C_a,$$

où $C_a$ est le $a^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique, qui sont tous premiers deux à deux. On en déduit, d'après le théorème de Landau, que $A_q(x)$ est un polynôme pour tout $x$ si et seulement si $A(x)$ est un entier pour tout $x$, quand les $u_i$ et les $v_j$ sont des polynômes homogènes.

Dans son article LANDAU cite trois quotients-produits de formes linéaires qui sont des entiers : le coefficient du binôme

$$\frac{(x+y)!}{x!\,y!},$$

le nombre de Catalan

$$\frac{(2x)!\,(2y)!}{(x+y)!\,x!\,y!},$$

le nombre de Bourguet

$$\frac{(kx_1)!\,\ldots\,(kx_k)!}{(x_1+\cdots+x_k)!\,x_1!\,\ldots\,x_k!}\ ;$$

il en donne deux nouveaux :

$$\frac{(5x+y)!\,(3y)!}{(x+2y)!\,(2x+y)!\,x!\,y!}$$

et

$$\frac{(4x)!\,(4y)!}{(x+2y)!\,(2x+y)!\,x!\,y!}.$$

Nous en avons trouvé un certain nombre d'autres parmi lesquels :

$$\frac{(2(x+y))!\,x!}{(x+y)!\,(2x)!\,y!}\ ;$$

$$\frac{(3x+y)!\,(x+3y)!}{(2(x+y))!\,(x+y)!\,x!\,y!}\ ;$$

$$\frac{(4x)!\,(x+5y)!}{(x+2y)!\,(2x+y)!\,(x+y)!\,x!\,y!}\ ;$$

$$\frac{(nx)!\,(ny)!}{((n-2)x+y)!\,(x+(n-2)y)!}\qquad \text{pour}\quad n=2,3,4,5\quad \text{et pas ensuite ;}$$

$$\frac{(nkx)!\,(nky)!}{(kx)!\,(ky)!\,((k(x+y))!)^{n-1}}\ ;$$

$$\frac{(lx)!\,(ly)!}{(kx)!\,(ky)!\,((x+y)!)^{l-k-1}x!\,y!}\ ;$$

$$\frac{(kx_1)!\,\ldots\,(kx_p)!}{((x_1+\cdots+x_p)!)^{k-p+1}(x_1!)^{p-1}\,\ldots\,(x_p!)^{p-1}}\ ;$$

ce qui généralise le résultat de Bourguet. Auparavant, nous avions montré l'intégrité d'un “gros” quotient-produit dans [2].

Tous ces résultats se transposent tels quels (en changeant “entier” en “polynôme”) à la $q$-factorielle, à laquelle nous avons étendu aussi certains quotients-produits de formes non homogènes comme :

$$\delta\frac{(x_1+\cdots+x_{n-1})!}{x_1!\,\ldots\,x_n!}\in \mathbf{N}$$

(*cf.* Schönemann). On obtient alors :

$$\frac{1-q^\delta}{1-q}\,\frac{(x_1+\cdots+x_n-1)!_q}{x_1!_q\,\ldots\,x_n!_q}\in \mathbf{Z}[q],$$

le symbole $\delta$ désignant le p.g.c.d. des $x_i$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Landau (E.). — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. **3** (19), 1900, p. 344–362.
[2] Picon (P.-A.). — *Discrete Mathematics*, t. **38**, 1982, p. 227–241.

P.-A. Picon,
U.E.R. de Mathématiques,
Université de Paris VII,
2, place Jussieu,
75005 Paris.