Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1984, 229/S–08
Actes 8e Séminaire Lotharingien, p. 37–53

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

PAR

Alain LASCOUX (*)

1. Fonctions symétriques usuelles

1.1. Bases de fonctions symétriques. — Soient $A = \{a, b, \dots\}$ un alphabet de n lettres et $\mathbf{Z}[a, b, \dots]$ l'anneau des polynômes, à coefficients entiers, en les variables $a, b, \dots$ Le groupe symétrique $W(A)$ des permutations de A agit de façon naturelle sur l'anneau $\mathbf{Z}[a, b, \dots]$. Les polynômes qui sont invariants sous cette action sont dits *symétriques* : ce sont les polynômes invariants par permutation des variables. On note $\mathbf{Z}[a, b, \dots]^{W(A)}$ ce sous-anneau des polynômes symétriques. On sait, au moins depuis Newton, que cet anneau est engendré, en tant qu'algèbre, par les fonctions symétriques élémentaires. En fait, dans l'étude suivante, on va surtout s'intéresser aux $\mathbf{Z}$-bases de cet anneau. En d'autres termes, on va déterminer des familles de polynômes ayant la propriété que tout polynôme symétrique s'exprime, de façon unique, comme combinaison linéaire, à coefficients entiers, d'éléments de chaque famille.

Pour toute suite $J = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose $a^J = a^{j_1} b^{j_2} \dots$ Le polynôme

$$\Psi_I = \sum a^J$$

où la somme est étendue à l'ensemble de toutes les permutations *distinctes* J de la suite I, est évidemment symétrique. On l'appelle *fonction symétrique monomiale*. Lorsque I est de la forme $I = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, avec 1 répété p fois, on obtient la $p^{\text{ième}}$ *fonction symétrique élémentaire*, notée Λ_p. Ainsi

$$\Lambda_p = \Psi_I \qquad (\text{avec } I = 0^{n-p} 1^p).$$

(*) On ne trouve dans ce volume que les toutes premières leçons sur les fonctions symétriques. Elles constituent, en fait, le premier chapitre d'un traité en préparation comportant de nombreux exemples et exercices. Ce chapitre consacré à l'étude des fonctions symétriques usuelles et de leurs bases, ainsi qu'à une introduction aux λ-anneaux a été repris et complété dans un mémoire écrit conjointement par A. Lascoux et M.-P. Schützengerger, intitulé *Formulaire raisonné des fonctions symétriques*, L.I.T.P., U.E.R. Math., Univ. Paris VII, 138 p., 1984.

Pour chaque $p \geq 0$ la somme de tous les monômes de degré total p est appelée *fonction symétrique complète*. On la note S_p. On a immédiatement

$$(1-a)^{-1}(1-b)^{-1}\ldots = \sum S_p \quad \text{et} \quad (1+a)(1+b)\cdots =' \Lambda_p.$$

Par Λ^I on désigne le produit

$$\Lambda^I = \Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\ldots$$

des fonctions symétriques élémentaires Λ_{i_1}, Λ_{i_2},... De façon analogue, on pose

$$S^I = S_{i_1}S_{i_2}\ldots$$

On introduit enfin, pour chaque $i \geq 0$, les *sommes de puissances*

$$\Psi_i = \sum a^i$$

et on peut ainsi former les *produits de sommes de puissances*

$$\Psi^I = \Psi_{i_1}\Psi_{i_2}\ldots$$

1.2. Fonctions de Schur. — Étant donnée une matrice M, on indexera ses mineurs par des couples de partitions. Plus généralement, soient $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ deux suites de $\mathbf{Z}^n$. On note $M_{I,J}$ le mineur de M pris sur les lignes $i_1+1, i_2+2, \ldots$ et les colonnes $j_1+1, j_2+2, \ldots$ S'il existe h tel que $i_h + h \leq 0$ ou $j_h + h \leq 0$, on convient que le mineur $M_{I,J}$ est nul.

La matrice qui nous intéresse est la matrice infinie $\lceil S = (S_{j-i})$ $(i \geq 1, j \geq 1)$, où les S_p sont les fonctions symétriques complètes, avec la convention que S_p est nul lorsque p est (strictement) négatif.

Définition. — On appelle *fonction de Schur d'indice J*, notée S_J, le mineur

$$S_J = \lceil S_{0\ldots0,J},$$

et *fonction de Schur gauche d'indice J/I*, le mineur

$$S_{J/I} = \lceil S_{I,J}.$$

Bien évidemment, $S_{J/I} = 0$, lorsque deux lignes ou deux colonnes du mineur sont identiques. A une permutation des lignes et colonnes près, on peut supposer que l'on a $1 \leq i_1 + 1 < i_2 + 2 < \cdots$ et $1 \leq j_1 + 1 < j_2 + 2 < \cdots$, c'est-à-dire que I et J sont des suites croissantes (au sens large) d'entiers positifs, dites *partitions*. Le *poids* de J est défini par $|J| = j_1 + j_2 + \cdots$ et c'est le *degré* de S_J.

Remarque. — On prendra garde de ne pas confondre S^I qui est un produit de fonctions symétriques complètes et S_I. Toutefois, lorsque I est réduit à une seule part i, les deux fonctions coïncident : $S^i = S_i$. On a de même : $\Psi^i = \Psi_i$ et $\Lambda^i = \Lambda_i$.

Une partition est habituellement représentée dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ par un diagramme de boîtes. La symétrie échangeant lignes et colonnes est une involution, notée $I \mapsto I^{\sim}$, de l'ensemble des partitions. On dit que $I^{\sim}$ est la partition *conjuguée* de I.

1.3. Bases. — En prenant l'ordre lexicographique sur les partitions, on peut vérifier (aisément) que les S_I s'expriment en fonction des Ψ_I (resp. les S^I en fonction des S_I) à l'aide d'une matrice triangulaire ne comportant que des 1 dans la diagonale. Ceci démontre le lemme suivant :

LEMME. — *Les ensembles* $\{S^I\}$, $\{S_I\}$ *et* $\{\Psi_I\}$ *où* I *varie dans l'ensemble de toutes les partitions* $0 \leq i_I \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$, *forment trois* **Z**-*bases des polynômes symétriques en* n *variables. En revanche* $\{\Psi^I\}$ *n'est qu'une* **Q**-*base.*

I.4. Formules de Pieri. — Lorsqu'un anneau est muni d'une **Z**-base, il est naturel d'exprimer la multiplication de l'anneau dans cette **Z**-base. Le cas le plus simple est dû au géomètre italien PIERI (1873).

FORMULES DE PIERI. — *Soient* m *un entier positif et* I *une partition. Alors*

$$S_m \cdot S_I = \sum S_J,$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des partitions $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *telles que* $i_1 \leq j_1 \leq i_2 \leq j_2 \leq \cdots \leq i_n \leq j_n$ et $m + |I| = |J|$.

Cet ensemble de partitions J est noté par la suite $\{m \otimes I\}$. On obtient chaque partition J en ajoutant m boîtes au diagramme de I sans en mettre deux dans la même colonne.

1.5. Caractérisation de Giambelli. — Les formules de Pieri caractérisent, en fait, l'algèbre des fonctions symétriques, comme énoncé dans la proposition suivante due au géomètre tout aussi italien GIAMBELLI (1902). On l'attribue généralement à HODGE.

PROPOSITION. — *Soient* A *un anneau et* $\{a_I\}$ *une famille d'éléments de* A *indicés par les partitions* $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. *Si la formule de Pieri est valable dans cet anneau pour tout* m, *c'est-à-dire si*

$$\forall m \qquad a_m \cdot a_I = \sum a_J \qquad (J \in \{m \otimes I\}),$$

alors le sous-anneau $\mathbf{Z}[a_I]$ est un quotient de l'anneau des polynômes symétriques en n variables, a_I étant l'image de S_I.

Les formules de Pieri entraînent en effet que a_I est le mineur d'indice $0, I$ de la matrice (a_{j-i}) $(i, j \geq 1)$. Comme les fonctions S_0, S_1, ..., S_n sont algébriquement indépendantes, l'anneau $\mathbf{Z}[a_I]$ est un quotient de $\mathbf{Z}[S_0, S_1, \ldots, S_n]$.

Notons qu'il n'est pas nécessaire que l'anneau A soit commutatif. La proposition entraîne, en revanche, que $\mathbf{Z}[a_I]$ l'est. Ainsi, nous verrons au chapitre 3 que l'anneau des polynômes symétriques est un sous-anneau de l'anneau plaxique, qui n'est pas commutatif.

1.6. Produit scalaire. — Une propriété fondamentale de réciprocité (qui correspond, par exemple, à la formule de réciprocité de Frobenius) s'exprime par l'existence d'un produit scalaire sur l'espace des polynômes symétriques.

PROPOSITION. — *Soit (,) le produit scalaire sur l'espace des fonctions symétriques défini par*

$$(S_I, S_J) = \begin{cases} 0, & \text{si } I \neq J\,; \\ 1, & \text{si } I = J. \end{cases}$$

Alors $\{S^I\}$ et $\{\Psi_I\}$ sont des bases adjointes (c'est-à-dire $(S^I, \Psi_J) = \delta_{IJ}$) et

$$(S_{J/I}, S_H) = (S_J, S_I \cdot S_H).$$

Enfin, l'ensemble des produits de sommes de puissances Ψ^I est une $\mathbf{Q}$-base orthogonale, avec

$$(\Psi^I, \Psi^I) = 1^{m_1} 2^{m_2} \ldots m_1!\, m_2! \ldots,$$

si I est une partition ayant m_1 parts égales à 1, m_2 parts à 2, ...

1.7. Opérateurs différentiels. — On peut récrire 1.6 en termes d'opérateurs différentiels. Ce point de vue a été développé, en particulier, par le regretté FOULKES. Comme $\{S_J\}$ est une base, on peut définir un opérateur D_{S_I} sur l'espace des polynômes symétriques par

$$D_{S_I}(S_J) = S_{J/I}.$$

Plus géréralement, si S est un polynôme symétrique, $S = \sum (S, S_I) S_I$, on peut définir D_S par

$$D_S = \sum (S, S_I) D_{S_I}.$$

En termes d'opérateurs adjoints (par rapport au produit scalaire défini en 1.6), la PROPOSITION 1.6 peut se récrire :

PROPOSITION. — *L'opérateur D_{S_I} est l'adjoint de la multiplication par S_J. Plus généralement, D_S est l'adjoint de la multiplication par S, c'est-à-dire pour toute paire de polynômes symétriques (P, Q), on a*

$$(D_S P, Q) = (P, SQ).$$

En particulier,

$$D_{S^i}(\Psi_J) = \begin{cases} K, & \text{si } J = Li\,; \\ 0, & \text{si } i \text{ n'est pas une part de } J, \end{cases}$$

ou

$$D_{S^I}(\Psi_J) = \begin{cases} K, & \text{si } J = KI\,; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Enfin

$$D_{\Psi^i}(\Psi^J) = i \cdot m\Psi^H,$$

où m est la multiplicité de i comme part de J et où H est telle que $J = Hi$.

Dans la proposition précédente, on voit apparaître la notation KI, qui désigne la suite $(k_1, \ldots, k_m, i_1, \ldots, i_n)$. Le dernier énoncé dit, en fait, que D_{Ψ^i} est l'opérateur différentiel $i\partial_{\Psi^i}$ agissant sur les polynômes symétriques (exprimés comme des polynômes en les variables Ψ^i et que l'on a bien $D_{\Psi^I}(\Psi^I) = (\Psi^I, \Psi^I)$.

1.8. Identités différentielles. — On peut étendre aux fonctions symétriques les formules du calcul différentiel. Donnons deux exemples.

Dérivation d'un produit : $D_{S_J}(PQ) = \sum D_{S_I}(P) D_{S_{J/I}}(Q)$.

Formule de Taylor. — Soit $P(A \cup B)$ un polynôme symétrique sur une union disjointe de deux alphabets A et B. Alors

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \sum S_J(B) \cdot [D_{S_I}(P)](A) \\ &= \sum \Psi_J(B) \cdot [D_{S^I}(P)](A) \\ &= \sum \frac{\Psi^I(B)}{(\Psi^I, \Psi^I)} [D_{\Psi^I}(P)](A). \end{aligned}$$

En effet, par linéarité, il suffit de vérifier la formule pour $P = S_J$. Dans ce cas, la factorisation de matrices $\boxed{S(A \cup B)} = \boxed{S(A)}\,\boxed{S(B)}$ entraîne $S_J(A \cup B) = \sum S_I(A) \cdot S_{J/I}(B)$, ce qui est bien la première formule de Taylor, puisque $D_{S_I}(S_J) = S_{J/I}$, par définition.

Plus généralement, tout couple de bases adjointes $\{T_I\}$, $\{U_I\}$ donne lieu à deux formules de Taylor :

$$\begin{aligned} P(A+B) &= \sum T_I(A)\cdot[D_{U_I}P](B) \\ &= \sum U_I(A)\cdot[D_{T_I}P](B), \end{aligned}$$

comme on le voit en évaluant les produits scalaires $\big(P(A+B), U_I(A)\big)$ et $\big(P(A+B), T_I(A)\big)$. La formule de Taylor permet d'évaluer la dérivée d'un produit.

Dérivée d'un produit : $D_{S_J}(P\cdot Q) = \sum D_{S_I}(P)\cdot D_{S_{J/I}}(Q)$.

2. Changements de bases

La plupart des problèmes énumératifs liés aux fonctions symétriques peuvent s'interpréter comme des changements de base, on bien encore, comme le calcul de produit scalaires.

Ayant présent à l'esprit que le développement d'une fonction symétrique S dans une base fait intervenir les produits scalaires de S avec la base adjointe, on distinguera plus spécialement les cas suivants : (S^J, S_I), (S_I, Ψ^J), (S^I, S^J).

2.1. Nombres de Kostka. — Ce sont par définition les produits (S^J, S_I). Comme $S^{Jw} = S^J$ pour toute permutation w des parts de J, la suite J peut être considérée comme une suite non nécessairement croissante, contrairement à I. On verra au chapitre 2 que (S^J, S_I) est le nombre des tableaux de forme I, d'évaluation J. Comme la matrice (S^J, S_I) est triangulaire (pour l'ordre lexicographique sur les partitions), unipotente (éléments diagonaux égaux à 1), on peut utiliser le triangle des zéros pour y écrire son inverse. Ceci donne le carré de Kostka où figurent simultanément les matrices de changement de base de S^J en S_I, de S_I en S^J, de S_I en Ψ_J et de Ψ_J en S_I.

2.2. Caractères du groupe symétrique. — Une représentation irréductible (sur $\mathbf{C}$) d'un groupe symétrique W correspond à une partition I ; une classe de conjugaison de W se décrit par les longueurs des cycles de tout élément de cette classe, i.e., pour une partition J (*) ; on peut donc considérer le caractère de la représentation d'indice I comme une fonction χ_I : {partitions} $\to \mathbf{Z}$. On a alors :

$$\chi_I(J) = (S_I, \Psi^J),$$

(*) Par exemple, 112444 est la classe d'une permutation ayant deux points fixes, un cycle de longueur 2 et trois cycles de longueur 4.

ce qui implique :

$$\Psi^J = \sum_I \chi_I(J) S_I$$

et

$$S_I = \sum_J \chi_I(J) \frac{\Psi^J}{(\Psi^J, \Psi^J)}.$$

Remarque. — Une fonction de Schur s'exprime comme le quotient d'une fonction antisymétrique par le Vandermonde. Multipliant ce dernier par une fonction monomiale $\Psi_I(A)$, avec A de cardinal n et $I = (i_1, i_2, \ldots, i_2)$, on tire l'inégalité :

$$\Psi_I(A) = \sum S_H(A),$$

où H parcourt l'ensemble des réordonnements distincts de $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. (Notons que si $I = 0^{m_0} 1^{m_1} 2^{m_2} \ \ldots$, cet ensemble est de cardinal $m!/(m_0!\, m_1!\, m_2!\, \ldots)$ Bien entendu, pour obtenir la décomposition :

$$\Psi_I(A) = \sum (\Psi_k, S_J) S_J(A),$$

où J parcourt l'ensemble des partitions, il reste à réordonner les H et rogrouper les termes. Par exemple,

$$\begin{aligned} \Psi_n(A) &= S_n(A) + S_{n,0}(A) + S_{n,0,0} + \cdots \\ &= S_n(A) - S_{A,n-1}(A) + S_{1,1,n-2}(A) - \cdots \end{aligned}$$

2.3. Formule de Murnaghan. — Cette formule permet de calculer un caractère $\chi(J)$ par induction sur le nombre de parts de J. tant donné une suite J et un entier j, écrivons Jj pour la suite concaténée (c'est-à-dire ayant une part de plus que J, part égale à j). Alors

$$\begin{aligned} \chi_J(Jj) &= (S_I, \Psi^J \Psi^j), \\ &= (D_{\Psi^j}(S_I), \Psi^J), \\ &= \sum_H (D_{\Psi^j}(S_I), S_H)(S_H, \Psi^J), \end{aligned}$$

puisque $\{S_H\}$ est orthonormée. En remarquant que

$$(D_{\Psi^j}(S_I), S_H) = (S_I, S_H \cdot \Psi^j) = (S_{I/H}, \Psi^j),$$

on obtient la formule dite de Murnaghan (elle résulte aussi de la formule de Littlewood-Richardson, qui lui est antérieure) :

$$\chi_I(Jj) = \sum_H (S_{I/H}, \Psi^j) \chi_H(J).$$

Comme $\Psi^j = \sum(-1)iS_{1^i j-i}$, il n'est pas difficile de voir que les coefficients $(S_{I/H}, \Psi^j)$ ne peuvent prendre que les valeurs 0, ± 1.

Plus précisément, appelons *équerre gauche* I/H tout diagramme gauche ne contenant pas de carré (i.e., quatre boîtes ayant un sommet en commun) et *longueur* $l(I/H)$ de cette équerre (ou, plus généralement, d'un diagramme gauche) le nombre de lignes de I/H non vides. Alors

$$(S_{I/H}, \Psi^j) = \begin{cases} (-1)^{l(I/H)-1}, & \text{si } I/H \text{ est une équerre de poids } j\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Foulkes a montré qu'il suffisait dans la formule de Murnaghan de se limiter aux équerres gauches *connexes*.

On peut indexer les caractères, de même que les fonctions de Schur, par des suites H. On convient que

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_H &= \chi_I \\ &= -\chi_I \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{selon que} \quad \left\{ \begin{aligned} S_H &= S_I \\ &= -S_I \\ &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Alors, étant donné que

$$D_{\Psi^j}(S_{ii'\ldots i''}) = S_{i-j,i'\ldots i''} + S_{i,i'-j\ldots i''} + \cdots + S_{ii'\ldots i''-j},$$

on peut récrire plus simplement la formule de Murnaghan (*cf.* Littlewood (p. 142 et p. 70))

$$\chi_I(Jj) = \sum_k \chi_k(J),$$

la somme étant sur toutes les suites k obtenues en soustrayant j successivement à toutes les parts de I.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \chi_{355}(J2) &= \chi_{155}(J) + \chi_{335}(J) + \chi_{353}(J) \\ &= \chi_{155}(J) + \chi_{335}(J) - \chi_{344}(J), \end{aligned}$$

puisque $S_{353} = -S_{344}$.

2.4. Relations de Girard-Newton. — Par définition des fonctions de Newton Ψ_i (sommes de puissances), on a

$$\log \prod_{a\in A} (1-az)^{-1} = \sum_{i\geq 1} z^i \Psi_i(A)/i,$$

ce qui par dérivation par rapport à z, donne

$$\sum_{i\geq 1} i(-z)^{i-1}\Lambda^i(A)/\prod(1-az)^{-1} = \sum_{i\geq 1}\Psi_i(A)z^{i-1}$$

et donc les relations suivantes, dues à GIRARD* et NEWTON** (où l'on fait disparaître l'alphabet A) :

$$\begin{aligned}
\Lambda^1 &= \Psi_1\\
2\Lambda^2 &= \Lambda^1\Psi_1 - \Psi_2\\
3\Lambda^3 &= \Lambda^2\Psi_1 - \Lambda^1\Psi_2 + \Psi_3\\
\cdots\ &\ \ \cdots\\
n\Lambda^n &= \Lambda^{n-1}\Psi_1 - \Lambda^{n-2}\Psi_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\Psi_n\\
\cdots\ &\ \ \cdots
\end{aligned}$$

ou bien les relations de Brioschi (*cf.* MUIR II, p. 216), qui sont l'image des relations de Newton par la transformation $A \to -A$ (opération licite dans un Λ-anneau ainsi que nous le verrons au §3) :

$$\begin{aligned}
S^1 &= \Psi_1\\
2S^2 &= S^1\Psi_1 + \Psi_2\\
\cdots\ &\ \ \cdots\\
nS^n &= S^{n-1}\Psi_1 + S^{n-2}\Psi_2 + \cdots + \Psi_n.
\end{aligned}$$

Des relations de Newton ou de Brioschi, on tire :

$$\Psi_n = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} n\Lambda^n & \Lambda^1 & \ldots & \Lambda^n\\ (n-1)\Lambda^{n-1} & \Lambda^0 & \ldots & \Lambda^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0\Lambda^0 & . & \ldots & \Lambda^0\end{vmatrix},$$

et

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} nS^n & S^1 & \ldots & S^n\\ (n-1)S^{n-1} & S^0 & \ldots & S^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0S_0 & . & \ldots & S^0\end{vmatrix}.$$

* GIRARD, *Invention Nouvelle en Algèbre*, Amsterdam, 1629▷
** NEWTON, *Arithmetica Universalis*, Cantabrigiae, 1707▷

Inversement,

$$n!\,\Lambda^n = \begin{vmatrix} \Psi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_2 & \Psi_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{n-1} & \Psi_{n-2} & \Psi_{n-3} & \dots & n-1 \\ \Psi_n & \Psi_{n-1} & \Psi_{n-2} & \dots & \Psi_1 \end{vmatrix},$$

ou bien,

$$n!\,S^n = \begin{vmatrix} \Psi_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_2 & \Psi_1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{n-1} & \Psi_{n-2} & \Psi_{n-3} & \dots & -n+1 \\ \Psi_n & \Psi_{n-1} & \Psi_{n-2} & \dots & \Psi_1 \end{vmatrix}.$$

Noter que le développement de l'un quelconque des deux premier déterminants suivant sa première colonne donne :

$$\Psi_n = S^{n-1}\cdot\Lambda^1 - 2S^{n-2}\cdot\Lambda^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n S^0\cdot\Lambda^n,$$

ce qui par la formule de Pieri, entraîne :

$$\Psi_n = S_n - S_{1,n-1} + S_{1,1,n-2} - S_{1,1,1,n-3} + \cdots$$

2.5. La matrice Ψ. — Plus généralement, on peut considérer la matrice infinie

$$\Psi = [\Psi_{i+j-2}]_{i,j\geq 1} = \begin{array}{|cccc} \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2 & \dots \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{array}$$

Proposition (Segar 1892, Muir IV, p. 180). — *Soit A de cardinal n et deux suites $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$. Alors le mineur $\boxed{\Psi(A)}_{I,J}$, d'ordre $n \times n$ est égal à*

$$S_I(A)\cdot S_J(A)\cdot\Delta^2(A),$$

où $\Delta(A)$ est le Vandermonde.

Démonstration. — La matrice $\boxed{\Psi(A)}$ est en effet le produit de la matrice de Vandermonde

$$V(A) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots \\ 1 & b & b^2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix}$$

par sa transposée :

$$\overline{|\Psi(A)} = V(A)^t \cdot V(A).$$

Comme d'après JACOBI, un mineur d'ordre maximum de $V(A)$ est le produit d'une fonction de Schur par $\Delta(A)$, la formule exprimant les mineurs d'un produit de matrices se réduit à

$$\begin{aligned} \overline{|\Psi}_{I,J} &= V(A)^t_{I,0^n} \cdot V(A)_{0,J}, \\ &= S_I(A) \cdot \Delta(A) \cdot S_J(A) \cdot \Delta(A), \end{aligned}$$

qui est bien la formule annoncée.

Remarquons, plus particulièrement, que le mineur $\overline{|\Psi(A)}_{0^n,0^n}$ est égal à $\Delta^2(A)$.

2.6. Doubles classes. — Soient $I = (i, j, k, \dots)$ une suite de nombres positifs et W_I le produit direct des groupes symétriques associé à la coupure de l'alphabet

$$\{a_1, \dots, a_i \mid a_{i+1}, \dots, a_{i+j} \mid a_{i+j+1}, \dots, a_{i+j+k} \mid \dots\}.$$

Alors (S^I, S^J) est le nombre de doubles classes $W_I w W_J$, $w \in W_A$. C'est aussi le nombre de tabloïdes carrés d'entiers ≥ 0 tels que la somme par colonne est la suite I, et la somme par ligne, la suite J.

Par exemple, $(S^{023}, S^{113}) = 4$, puisqu'on a pour tabloïdes

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}}\,, \qquad \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}}\,, \qquad \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}}\,, \qquad \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}}\,,$$

dont les sommes par colonne sont bien 023 et par ligne 113.

Remarque. — On a

$$(S^I, S^J) = \sum (S^I, S_K)(S_K, S_J),$$

ce qui fait que (S^I, S^J) est le produit scalaire de deux colonnes de la matrice positive de Kostka.

Il faudrait, pour ce seul paragraphe, une étude systématique de l'ampleur de celle que MUIR entreprit pour les déterminants.

Par exemple, la formule

$$(\Lambda^n, \Psi_I) = (-1)^{m_2+m_4+\cdots} l(I)! \,/\, m_1\, m_2! \,\dots$$

où $I = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$, apparaît pour la première fois chez BRIOSCHI (1858 ; MUIR III, p. 208), puis chez GIAMBELLI (1902, p. 189).

La formule

$$(\Psi_I, \Psi_n) = (-1)^{l(I)-1} n \frac{(l(I)-1)!}{m_1!\, m_2!\, \ldots},$$

où $n = |I|$, se trouve chez GAMBARDELLI (1873) ; MUIR III, p. 228), dans MACMAHON (*Combinatory Analysis*, p. 7), chez les topologues algébristes (MUKOHDA (1954), ATIYAH (1960), PETERSON (1976) ; références donnés par DRAGUTIN SVRTAN dans *Prilozi teoryi simetricnih...*). Cette formule s'obtient en développant le produit scalaire et donne l'expression de Ψ_i/i dans la base S^J :

$$\Psi i/i = \sum (\Psi_i/i, \Psi_J) S^J.$$

Par exemple,

$$\Psi_2/2 = S^2 - (1!/2!) S^{11},$$
$$\Psi_3/3 = S^3 - S^{12} + (2!/3!) S^{111},$$
$$\Psi_4/4 = S^4 - S^{13} - (1/2!) S^{22} + (2!/2!) S^{112} - (3!/4!) S^{1111}.$$

Elle est, en fait, la transformée, par $A \to -A$, de la célèbre *formule de Waring**

$$\Psi_k/k = \sum (-1)^{l(I)+k} \frac{(l(I)-1)!}{m_1!\, m_2!\, \cdots} \Lambda^I.$$

* *Meditationes algebricae*, Cantabrigiae, 1770.

3. Λ-anneaux

Nous n'avons jusqu'ici effectué que des opérations élémentaires sur les fonctions symétriques et la nécessité de formaliser les propriétés de ces dernières ne s'est pas fait sentir. Cependant, dès qu'on abord l'étude du pléthysme ("plethysm" en anglais) de LITTLEWOOD, ou dès que l'on emploie des différences de deux alphabets, l'axiomatique des Λ-anneaux s'impose. Celle-ci donne toutes les propriétés des fonctions symétriques sur seulement trois d'entre elles, la linéarité et les formules de Cauchy et du pléthysme.

Définition. — Un Λ-*anneau* est un anneau K (commutatif, avec élément unité) muni d'opérateurs Λ^i ($i \in \mathbf{Z}$) vérifiant (outre les trois conditions de normalisation :

(i) $\Lambda^0(A) = 1$ pour tout $A \in K$;

(ii) $\Lambda^1(A) = A$ pour tout $A \in K$;

(iii) $\Lambda^i = 0$ pour tout $i \leq -1$;)

les trois axiomes suivants :

(iv) l'*axiome de linéarité* :

$$\Lambda^i(A+B) = \sum_j \Lambda^{i-j}(A)\Lambda^j(B) ;$$

(v) la *formule de Cauchy* :

$$\Lambda^i(AB) = \sum_{|J|=i} \Lambda_J(A)\Lambda_{J^\sim}(B),$$

où $\Lambda_J(A)$ est le mineur d'indice $0, J$ de la matrice $(\Lambda^{j-i}(A))$ $(i,j \geq 1)$;

(vi) l'*axiome du pléthysme* :

$$\Lambda^i(\Lambda^j(A)) = \sum_H n_{ijH}\Lambda_H(A),$$

où les n_{ijH} sont des entiers indépendants de A. (On peut donc les déterminer à partir des deux autres axiomes en prenant des éléments A particuliers.)

En fait, il est plus commode de travailler avec les opérateurs S^i définis par :

$$\forall A \in K, \qquad S^i(A) = (-1)^i\Lambda^i(-A).$$

L'axiome de linéarité entraîne que la matrice $(\,(-1)^{j-i}S^{j-i}(A)\,)$ $(i,j \geq 1)$ est inverse de la matrice $(\,\Lambda^{j-i}(A)\,)$ $(i,j \geq 1)$. Le mineur d'indice I, J de cette dernière matrice, noté $\Lambda_{J/I}(A)$ est égal, au signe près, au mineur de la matrice inverse d'indice $I^\sim, J^\sim$. On a donc

$$\Lambda_{J/I}(A) = S_{J^\sim/I^\sim}(A).$$

L'involution $A \mapsto -A$ dans K correspond à l'échange, au signe près, de Λ_J et S_J, ou bien encore à la conjugaison des partitions $I \mapsto I^{\sim}$.

On peut choisir de formuler les axiomes des Λ-anneaux en termes des fonctions S. Ceci donne un aspect plus agréable à la formule de Cauchy.

(iv') *axiome de linéarité* :

$$S^i(A+B) = \sum S^{i-j}(A)S^j(B),$$

(ou simplement :

$$\sum S^i(A+B) = \sum S^h(A) \sum S^j(B)\ ) \ ;$$

(v') *formule de Cauchy* :

$$S_i(AB) = \sum_{|J|=i} S_J(A)S_J(B) \ ;$$

(vi') *pléthysme* : il existe des entiers m_{ijH}, indépendants de A, tels que l'on ait :

$$S^i(S^j(A)) = \sum_H m_{ijH} S_H(A).$$

On définit le *rang* dans un Λ-anneau par

$$\Lambda^i(A) = 0 \qquad \forall i > n \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \leq n.$$

Il est spécialement intéressant de considérer des éléments de rang 1, ou des sommes finies d'éléments de rang 1. Dans ce cas, l'axiome 1, joint au fait que le produit de deux éléments de rang 1 est de rang 1, qui résulte de l'axiome 2, donne les quantités $\Lambda^i(A)$, $\Lambda^i(AB)$, $\Lambda^i(\Lambda^j(A))$ comme sommes d'éléments de rang 1.

Soient $a, b, \ldots$ des éléments de K de rang 1. L'axiome de linéarité entraîne que les $\Lambda^i(a+b+\cdots)$ sont les fonctions élémentaires en les variables $a, b, \ldots$ Par suite, les $S_J(a+b+\cdots)$ sont bien les fonctions de Schur sur l'alphabet $\{a, b, \ldots\}$ (*cf.* § 1. Si donc on se limite aux éléments qui sont sommes d'éléments de rang 1, les Λ-anneaux n'apportent rien de nouveau, si ce n'est qu'on note un alphabet comme somme de ses éléments.

Le type le plus simple de Λ-anneau est l'anneau $\mathbf{Z}[a, b, \ldots]$ des polynômes dont la structure de Λ-anneau est obtenue en imposant que $a, b, \ldots$ sont tous de rang 1.

Le second type, cher à Rota, est l'anneau dit *binomial*, défini par

$$\forall x \in K, \quad \forall i \geq 0, \quad \Lambda^i(x) = x(x-1)\ldots(x-i+1)/i!,$$

ou, de façon équivalent, par

$$\forall x \in K, \quad \forall i \geq 0, \quad S^i(x) = x(x+1)\dots(x+i-1)/i!.$$

On peut, par exemple, munir l'anneau des réels d'une structure de Λ-anneau binomial.

Nous aurons essentiellement besoin de l'anneau $\mathbf{R}[[a,b,\dots]]$ des séries formelles, à coefficients réels, qui hérite des deux types précédents d'une structure de Λ-anneau. Dans l'anneau des séries formelles, la puissance $x^{\text{ième}}$ ($x \in \mathbf{R}$) est défini par

$$(1+a)^x = \sum a^i \Lambda^i(x).$$

Le second membre est, en fait, $\sum \Lambda^i(ax)$, lorsque a est de rang 1. En effet, la formule de Cauchy donne

$$\Lambda^i(ax) = \sum_{|J|=i} \Lambda_J(x)\Lambda_{J^\sim}(a).$$

Or tous les $\Lambda_{J^\sim}(a)$ sont nuls, sauf pour $J = i$, auquel cas $\Lambda_{i^\sim}(a) = a^i$. On peut écrire :

$$(1+a)^x = \sum \Lambda^i(ax) \qquad (a \text{ de rang } 1\,;\ x \text{ réel}).$$

On en déduit la *formule du binôme* :

$$\begin{aligned}(1-a)^{-x} &= \sum a^i S^i(x),\\ &= \sum S^i(ax) \qquad (a \text{ de rang } 1\,;\ x \text{ réel}).\end{aligned}$$

En plus des expressions classiques des fonctions de Schur, on a dans le cas où x est réel une formule plus condensée pour $S_I(x)$. Marquons dans chaque boîte $\square$ de la partition I sa distance (ordonnée) $c_\square$ à la diagonale principale, comme indiqué dans le premier tableau. D'autre part, définissons l'*équerre de sommet* $\square$ comme étant l'ensemble des boîtes de I situées soit sur la même colonne que $\square$ et au-dessus de celle-ci, soit sur la même ligne et à droite de celle-ci. Le poids de cette équerre de sommet $\square$ considérée comme partition est noté $h_\square$. On peut reporter, comme dans le second tableau, le poids de chaque équerre en son sommet. Avec ces conventions, on a la formule :

$$S_I(x) = \prod_{\square \subset I} (x + c_\square)/h_\square,$$

dont on trouvera une démonstration dans Macdonald (p. 28, ex. 4).

-3			
-2	-1	0	
-1	0	-1	-2
0	-1	-2	-3

1			
4	2	1	
6	4	3	1
7	5	4	2

Le fait que pour x réel, $S^i(x)$ soit un polynôme en x, implique que $S^I(x)$, $S_I(x)$, $\Psi_I(x)$, … soient des polynômes en x. Leurs valeurs prises pour les x entiers les déterminent complètement. En particulier,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall i \geq 1, \quad \Psi_i(x) = x,$$

la formule étant triviale pour x entier. Pour toute partition I (avec $l(I)$ désignant le nombre de parts non nulles), on en déduit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Psi^I(x) = x^{l(I)}.$$

D'autre part, $\Psi_I(x)\,(= \Psi_I(1+\cdots+1)\,)$ est égal au nombre de monômes différents, de degré I, en n variables, qui est naturellement un coefficient multinomial. D'où, pour $I = 1^{m_1}2^{m_2}\ldots$, on a donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Psi_I(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-l(I)+1)}{m_1!\,m_2!\,\ldots},$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Psi_I(-x) = (-1)^{l(I)}\frac{x(x+1)\ldots(x+l(I)-1)}{m_1!\,m_2!\,\ldots}.$$

De la formule du binôme, on déduit pour a, b,…,d de rang 1 et x réel

$$\begin{aligned}
[(1-a)(1-b)\ldots(1-d)]^{-x} &= \sum S^i(ax)\sum S^j(bx)\ \ldots \sum S^k(dx),\\
&= \sum S^n((a+b+\cdots+d)x) \quad \text{(linéarité)},\\
&= \sum S_J(a+b+\cdots+d)S_J(x) \quad \text{(Cauchy)}.
\end{aligned}$$

La dernière formule peut être exprimée dans toute autre paire de bases adjointes. On a donc aussi

$$\begin{aligned}
[(1-a)(1-b)\ldots(1-d)]^{-x} &= \sum S^I(a+b+\cdots+dl)\Psi_I(x),\\
&= \sum \Psi_I(a+b+\cdots+d)S^I(x),\\
&= \sum \frac{\Psi^I(a+b+\cdots+d)\Psi^I(x)}{(\Psi^I,\Psi^I)},
\end{aligned}$$

où l'on peut même remplacer $\Psi_I(x)$, $S^I(x)$ et $\Psi^I(x)$ par leurs valeurs explicites calculées plus haut.

Remarque. — Il faut se garder de spécialiser inconsidérément les variables dans Λ-anneau : si a est à la fois réel et de rang 1, alors $a = 1$. En d'autres termes, le morphisme $\mathbf{R}[a] \to \mathbf{R}$ défini par $a \mapsto x \quad (\neq 1)$ n'est pas un morphisme de Λ-anneau.

Alain Lascoux,
L.I.T.P., U.E.R. Mathématiques,
Université Paris VII,
Tour 55–56, 1er étage,
2, Place Jussieu,
F-75221 Paris Cedex 05.