Les q-analogues des polynômes d'Hermite

Jacques Désarménien

0. Introduction

L'un des problèmes auxquels on se heurte lorsqu'on s'intéresse aux q-analogues est qu'en général il n'existe pas *un* mais *plusieurs* q-analogues possibles d'un objet donné. Les propriétés de ce dernier se généralisent tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ses q-analogues. Il n'existe donc pas de q-analogue "naturel".

Une illustration de ce principe est fournie par les polynômes d'Hermite. Ceux-ci ont essentiellement deux classes de q-analogues. La première, dérivée des polynômes de Rogers-Szegö, apparut chez Rogers [10] dans sa démonstration des célèbres identités de Rogers-Ramanujan (*cf.* [4, 5]). La seconde a été étudiée plus particulièrement par Al-Salam et Carlitz [1], Askey [3] et, d'un point de vue différent, par Cigler [8].

L'article qui suit donne un certain nombre de formules concernant ces divers polynômes, avec parfois une démonstration succincte. On donne une interprétation combinatoire pour chacune de ces deux classes de polynômes. Enfin, conformément au principe de Riordan, des tables des premières valeurs des polynômes concernés se trouvent à la fin de l'article.

Les notations utilisées sont les suivantes ; on pose $(a;q)_0 = 1$ et $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ si $n \geq 1$. On appelle polynôme gaussien ou q-binomial le polynôme suivant :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}.$$

La q-exponentielle de base q est définie par

$$e(t,q) = \prod_{k\geq 0} (1-tq^k)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(q;q)_n}.$$

Enfin, lorsque seule la base q est utilisée, on omet de l'écrire dans les arguments : on note alors $e(t)$ pour $e(t,q)$, ou encore $H_n(x)$ pour $H_n(x,q)$ lorsqu'il sera question des polynômes d'Hermite.

1. Les polynômes d'Hermite

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des polynômes d'Hermite ordinaires. Elles figurent dans tous les ouvrages consacrés aux polynômes orthogonaux.

Notons $h_n(x)$ le n-ième polynôme d'Hermite. Il est de degré n et ses coefficients sont entiers.

Fonction génératrice

$$\sum_{n\ge 0} \frac{h_n(x)\, t^n}{n!} = \exp(tx - t^2/2). \tag{1.1}$$

Relation de récurrence linéaire

$$h_0(x) = 1,\ h_1(x) = x,\ h_{n+1}(x) = xh_n(x) - nh_{n-1}(x),\ n \ge 1. \tag{1.2}$$

Formules explicites

$$\begin{aligned} h_n(x) &= e^{-D^2/2}\cdot x^n, \qquad \text{où } D \text{ est l'opérateur } \tfrac{d}{dx} \\ &= \sum_{0\le 2j\le n} (-1)^j \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, x^{n-2j}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $(2j-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2j-1)$.

Formule multiplicative

$$h_m(x)h_n(x) = \sum_{0\le k\le m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{k} k!\, h_{m+n-2k}(x). \tag{1.4}$$

Récurrence quadratique

$$h_{m+n}(x) = \sum_{0\le k\le m,n} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{n}{k} k!\, h_{m-k}(x)h_{n-k}(x). \tag{1.5}$$

Formule de Mehler

$$\sum_{n\ge 0} \frac{h_n(x)h_n(y)\, t^n}{n!} = (1-t^2)^{-1/2} \exp\Bigl(\frac{xyt - t^2(x^2+y^2)}{1-t^2}\Bigr). \tag{1.6}$$

Terminons ces rappels par l'interprétation combinatoire classique des polynômes d'Hermite : soit $a_{n,k}$ le nombre de permutations involutives sur n éléments qui laissent k points fixes ; on remarque que k et n ont même parité ; alors

$$h_n(x) = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{(n-k)/2} a_{n,k}\, x^k.$$

2. Les polynômes de Rogers-Szegö

La formule de multiplication des exponentielles, qui n'est pas vraie pour les q-exponenetielles, est curieusement à la base des définitions des q-polynômes d'Hermite. Les polynômes de Rogers-Szegö, étudiés par Rogers [10] puis par Szegö [14] jouent un rôle essentiel dans la théorie des q-analogues.

Ils sont définis par la fonction génératrice

$$\sum_{n\geq 0} \frac{r_n(a,b)\,t^n}{(q;q)_n} = e(at)e(bt). \tag{2.1}$$

Par q-dérivation on obtient immédiatement la récurrence linéaire

$$\begin{aligned} &r_0(a,b)=1,\ r_1(a,b)=a+b,\\ &r_{n+1}(a,b)=(a+b)r_n(a,b)-(1-q^n)ab\,r_{n-1}(a,b),\ n\geq 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Du développement de la fonction génératrice 2.1 résulte la formule explicite

$$r_n(a,b)=\sum_{0\leq k\leq n} \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} a^k b^{n-k}. \tag{2.3}$$

On vérifie également la formule multiplicative

$$r_m(a,b)r_n(a,b)=\sum_{0\leq k\leq m,n} \begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}(q;q)_k a^k b^k\, r_{m+n-2k}(a,b), \tag{2.4}$$

d'où se déduit

$$\sum_{m,n\geq 0} \frac{r_{m+n}(a,b)\,t^m u^n}{(q;q)_m (q;q)_n} = \frac{e(at)\,e(au)\,e(bt)\,e(bu)}{e(abtu)}, \tag{2.5}$$

et finalement une formule de type Mehler :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{r_n(a,b)r_n(c,d)\,t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(act)\,e(adt)\,e(bct)\,e(bdt)}{e(abcdt^2)}. \tag{2.6}$$

3. Les q-polynômes d'Hermite de 1e espèce

La similitude entre ces formules et les formules analogues pour les polynômes d'Hermite ont parfois conduit à qualifier les polynômes de Rogers-Szegö de q-polynômes d'Hermite. En fait, une légère modification des arguments permet d'obtenir un q-analogue bien plus satisfaisant. De plus cette modification apparaît dans l'article original de Rogers. Posons donc $A_n(\cos\theta)=r_n(e^{i\theta},e^{-i\theta})$.

La définition de la q-exponentielle et la fonction génératrice 2.1 fournissent presque immédiatement

$$\sum_{n\geq 0} \frac{A_n(x)\,t^n}{(q;q)_n} = \prod_{k\geq 0}(1-2xtq^k+t^2q^{2k})^{-1}. \tag{3.1}$$

La relation de récurrence 2.2 devient

$$(3.2)\qquad A_0(x)=1,\ A_1(x)=2x,\quad A_{n+1}(x)=2xA_n(x)-(1-q^n)A_{n-1}(x),\ n\geq 1.$$

La formule explicite 2.3 donne le développement de Fourier

$$(3.3)\qquad A_n(\cos\theta)=\sum_{0\leq k\leq m,n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}e^{i(n-2k)\theta}.$$

Les formules 2.4, 2.5 et 2.6 ont comme conséquences les trois formules suivantes :

$$(3.4)\qquad A_m(x)A_n(x)=\sum_{0\leq k\leq m,n}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q;q)_k\,A_{m+n-2k}(x),$$

$$(3.5)\qquad A_{m+n}(x)=\sum_{0\leq k\leq m,n}(-1)^k\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q;q)_k q^{k(k-1)/2}A_{m-k}(x)A_{n-k}(x),$$

$$(3.6)\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{A_n(x)A_n(y)t^n}{(q;q)_n}=\prod_{k\geq 0}\frac{1-t^2q^k}{1-4tq^kxy+2t^2q^{2k}(2x^2+2y^2-1)-4t^3q^{3k}xy+t^4q^{4k}}.$$

Il n'est pas possible de faire $q=1$ dans les formules précédentes. Il faut pour cela une normalisation différente ; on peut en profiter pour faire disparaître le coefficient 2 dans la récurrence 3.2 en posant

$$H_n(x)=(1-q)^{-n/2}A_n\Big(\frac{\sqrt{1-q}}{2}x\Big).$$

Les polynômes ainsi obtenus sont de “vrais” q-analogues des polynômes d'Hermite, donnés par la récurrence linéaire

$$(3.7)\qquad H_0(x)=0,\ H_1(x)=x,\ H_{n+1}(x)=xH_n(x)-\frac{1-q^n}{1-q}H_{n-1}(x),\ n\geq 1.$$

Ces polynômes figurent dans Cigler [8].

Leur fonction génératrice et leur formule de Mehler ne semblent pas présenter d'intérêt particulier. On ne retrouve pas les formules correspondantes pour les polynômes d'Hermite lorsque $q=1$. En revanche, les formules 3.4 et 3.5 apparaissent, après changement d'argument, comme des q-analogues des formules 1.4 et 1.5. Ce sont respectivement :

$$(3.8)\qquad H_m(x)H_n(x)=\sum_{0\leq k\leq m,n}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}H_{m+n-2k}(x),$$

$$(3.9)\qquad H_{m+n}(x)=\sum_{0\leq k\leq m,n}(-1)^k\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}q^{k(k-1)/2}H_{m-k}(x)H_{n-k}(x).$$

Ces q-analogues, enfin, possèdent une interprétation en termes d'inversions. Soit $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ l'image d'une involution de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ ayant k points fixes et $(n-k)/2$ transpositions. Soit $a_{n,k,j}$ le nombre de celles de ces involutions présentant j inversions (au sens usuel, sur le mot w). Appelons

$$I_n(x,q) = \sum_{k,q} a_{n,k,j}\, q^j x^k$$

le polynôme générateur du couple inversions-points fixes sur les involutions des n premiers entiers. On vérifie aisément que ces polynômes satisfont la récurrence

$$\begin{aligned} &I_0(x,q) = 1,\ I_1(x,q) = x,\\ &I_{n+1}(x,q) = xI_n(x,q) - \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} qI_{n-1}(x,q),\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour rappeler la base q, notons $H_n(x,q)$ le q-polynôme d'Hermite précédemment défini. Le polynôme I_n est alors donné par

$$I_n(x,q) = i^n q^{n/2} H_n\Bigl(-i\frac{x}{\sqrt{q}}, q^2\Bigr). \tag{3.11}$$

Les coefficients des deux polynômes sont identiques, au signe et à un changement d'indice près.

4. Les polynômes d'Al-Salam-Carlitz

Al-Salam et Carlitz [1] étudient diverses généralisations des polynômes de Rogers-Szegö, parmi lesquelles la famille suivante de polynômes en deux indéterminées a et x, en plus de la base q :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{U_n^{(a)}(x)\, t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(xt)}{e(t)\, e(at)}. \tag{4.1}$$

La q-dérivation fournit la récurrence linéaire

$$\begin{aligned} &U_0^{(a)}(x) = 1,\ U_1^{(a)}(x) = x - (1+a),\\ &U_{n+1}^{(a)}(x) = (x-(1+a)q^n)U_n^{(a)}(x) + a(1-q^n)q^{n-1}U_{n-1}^{(a)}(x),\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

L'identité qui suit est une conséquence du théorème q-binomial :

$$\frac{e(xt)}{e(t)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(x-1)(x-q)(x-q^2)\cdots(x-q^n)\, t^n}{(q;q)_n}\ ;$$

en faisant $x=0$ et en remplaçant t par at, on en déduit

$$\frac{1}{e(at)} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{n(n-1)/2} \frac{a^n t^n}{(q;q)_n}\ ;$$

de ces deux identités résulte la formule explicite
(4.3)

$$U_n^{(a)}(x) = \sum_{0\le k\le n} \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} q^{k(k-1)/2}(-a)^k(x-1)(x-q)(x-q^2)\cdots(x-q^{n-k-1}).$$

Il ne semble pas que des formules aussi simples que 2.4 ou 2.5 soient connues pour ces polynômes. En revanche, Al-Salam et Carlitz établissent une formule de type Mehler :

$$(4.4)\quad \sum_{n\ge 0} \frac{U_n^{(a)}(x)U_n^{(b)}(y)\,t^n}{q^{n(n-1)/2}(q;q)_n}$$
$$= \frac{e(-xt)\,e(-yt)}{e(-t)\,e(-at)\,e(-bt)} \sum_{r\ge 0} \frac{(a/x;q)_r(b/y;q)_r(-q/t;q)_r}{(q;q)_r(-q/xt;q)_r(-q/yt;q)_r} q^r$$
$$= \frac{e(-xt)\,e(-yt)}{e(-t)\,e(-at)\,e(-bt)}\, {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} a/x, b/y, -q/t\\ -q/xt, -q/yt\end{matrix}; q; q\right],$$

en utilisant le formalisme des fonctions hypergéométriques basiques.

5. Les q-polynômes d'Hermite de 2$^{\text{e}}$ espèce

De la même manière qu'avec les polynômes de Rogers-Szegö, une particularisation des arguments va conduire à de nouveaux q-analogues des polynômes d'Hermite. Posons

$$F_n(x) = U_n^{(-1)}(x).$$

Ces polynômes vérifient les identités suivantes :

$$(5.1)\qquad \sum_{n\ge 0} \frac{F_n(x)\,t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(xt)}{e(t)\,e(-t)}.$$

La q-dérivation fournit la récurrence linéaire

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &F_0(x) = 1,\ \ F_1(x) = x,\\ &F_{n+1}(x) = xF_n(x) - (1-q^n)q^{n-1}F_{n-1}(x),\ \ n\ge 1. \end{aligned}$$

Al-Salam et Carlitz donnent pour ces polynômes des formules explicites voisines de 1.3. Soit δ l'opérateur q-différentiel $\delta f(x) = (f(x) - f(qx))/x$. On a alors, en rappelant que $e(t,q^2)$ désigne la q-exponentielle de base q^2,

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{e(\delta^2, q^2)}\cdot x^n,\\ &= \sum_{0\le 2j\le n} (-1)^j \begin{bmatrix} n\\ 2j\end{bmatrix} \frac{(q;q)_{2j}}{(q^2;q^2)_j} q^{j(j-1)} x^{n-2j}. \end{aligned}$$

L'identité 4.4 ne se simplifie pas notablement. Elle donne la formule de type Mehler suivante :

(5.4)
$$\sum_{n\geq 0} \frac{F_n(x)F_n(y)\,t^n}{q^{n(n-1)/2}(q;q)_n} = \frac{e(-xt)\,e(-yt)}{e(-t)\,e(t)^2}\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix}-1/x,-1/y,-q/t\\ -q/xt,-q/yt\end{matrix};q;q\right].$$

Askey [3] et Cigler [8] ont étudié des polynômes liés aux polynômes F_n. Les polynômes que définit Askey sont donnés par

(5.5)
$$H'_n(x) = q^n\,F_n(x/q).$$

Ces polynômes vérifient la récurrence linéaire

(5.6)
$$\begin{aligned}&H'_0(x)=1,\ H'_1(x)=x,\\ &H'_{n+1}(x)=xH'_n(x)-(1-q^n)q^{n+1}H'_{n-1}(x),\ n\geq 1.\end{aligned}$$

Askey démontre, pour ces polynômes, la formule multiplicative

(5.7)
$$\begin{aligned}H'_m(x)H'_n(x) = \sum_{0\leq k\leq m,n} &\begin{bmatrix}m\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}(q;q)_k\,q^{(m+n)k-3k(k-1)/2}\\ &\times {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix}q^{-k},q^{-m+k},q^{-n+k}\\ -q,0\end{matrix};q;q\right]H'_{m+n-2k}(x).\end{aligned}$$

6. Les q-polynômes d'Hermite de 2e espèce, d'après Cigler

Par des manipulations d'opérateurs, Cigler [8] est amené à étudier des polynômes $K_n(x)$ (notés $H_n(x)$ par Cigler). Ces polynômes, comme nous le verrons plus loin, sont reliés aux F_n. Nous nous proposons d'utiliser ce lien pour retrouver une partie des résultats de Cigler.

Nous allons tout de suite donner les notations qu'utilise Cigler. Il note
$$[n]=\frac{1-q^n}{1-q},\quad [n]_2=\frac{1-q^{2n}}{1-q^2},\quad \text{et}\quad [n]!=[1][2]\ldots[n].$$
Avec ces notations, la q-exponentielle qui apparaît naturellement est la suivante (notée $e(t)$ ou $e_2(t)$ selon qu'elle est de base q ou q^2 dans l'article de Cigler) :
$$E(t,q)=\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{[n]!}=e(t(1-q),q).$$
L'un des avantages de cette notation est qu'il est possible de prendre directement $q=1$.

Avec ces notations, les polynômes $K_n(x)$ sont définis par la fonction génératrice

(6.1)
$$\sum_{n\geq 0}\frac{K_n(x)\,t^n}{[n]!}=\frac{E(xt,q)}{E(qt^2/[2],q^2)},$$

d'où l'on tire la récurrence linéaire

(6.2) $K_0(x)=1,\ K_1(x)=x,\ K_{n+1}(x)=xK_n(x)-[n]q^nK_{n-1}(x),\ n\geq 1.$

A partir de la relation précédente, on obtient la valeur de K_n en fonction de F_n :

$$K_n(x) = \Big(\frac{q}{1-q}\Big)^{n/2} F_n\Big(x\sqrt{\frac{1-q}{q}}\Big).$$

Le passage de la fonction génératrice 5.1 à la fonction 6.1 est alors le suivant : on vérifie d'abord l'identité

$$e(t,q)\,e(-t,q) = e(t^2,q^2),$$

par exemple en calculant $r_n(1,-1)$ avec la récurrence 2.2. Écrivons maintenant la fonction génératrice 5.1 pour les polynômes K_n :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{K_n(x)\,t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(xt,q)}{e(\frac{qt^2}{1-q},q^2)}.$$

En remplaçant t par $t(1-q)$, on obtient le premier membre de 6.1 ; le second membre devient alors

$$\frac{e(xt(1-q),q)}{e(qt^2(1-q),q^2)} = \frac{e(xt(1-q),q)}{e(qt^2\frac{1-q^2}{1+q},q^2)} = \frac{E(xt,q)}{E(qt^2/[2],q^2)},$$

ce qui donne 6.1.

De même, la formule explicite 5.3 permet d'obtenir une formule explicite que donne Cigler. Posons $X = x\sqrt{(1-q)/q}$; soient δ et D les opérateurs q-différentiels définis par

$$\delta\cdot X^n = (1-q^n)X^{n-1} \quad \text{et} \quad D\cdot x^n = [n]x^{n-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\delta^k\cdot X^n &= (1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-k+1})X^{n-k},\\ &= \Big(\frac{1-q}{q}\Big)^{n/2}\sqrt{q(1-q)}^{\,k}D^k\cdot x^n.\end{aligned}$$

La formule 5.3 donne

$$\begin{aligned}K_n(x) &= \Big(\frac{q}{1-q}\Big)^{n/2}\frac{1}{e(\delta^2,q^2)}\cdot X^n,\\ &= \frac{1}{e(q(1-q)D^2,q^2)}\cdot x^n,\end{aligned}$$

qui peut être transformée en la première partie de la formule suivante ; la seconde partie de celle-ci est la simple réécriture de la seconde partie de 5.3, avec quelques simplifications.

$$\begin{aligned}(6.3)\qquad K_n(x) &= \frac{1}{E(qD^2/[2],q^2)}\cdot x^n,\\ &= \sum_{0\leq 2j\leq n}(-1)^j\begin{bmatrix}n\\2j\end{bmatrix}[2j-1]!!\,q^{j^2}x^{n-2j},\end{aligned}$$

où l'on a posé $[2j-1]!! = (1-q)(1-q^3)\ldots(1-q^{2j-1})/(1-q)^j$.

Cette formule explicite se trouve aussi dans Cigler, ainsi qu'une formule de Mehler :

$$(6.4)\qquad \sum_{n\geq 0} \frac{K_n(x)K_n(y)\,t^n}{q^{n(n+1)/2}[n]!} = \sum_{m\geq 0} \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\Big(\frac{t^2}{q}\Big)^m$$
$$\times\, E(xy\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}, q)E(\frac{x^2}{2}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}, q^2)E(\frac{y^2}{2}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}, q^2)\cdot 1,$$

où η est l'opérateur $\eta\cdot f(t) = f(qt)$.

Au changement de variables près, le premier membre de 5.4 et celui de 6.4 sont identiques. Néanmoins, le second membre de 6.4 ne semble pas se déduire immédiatement de 5.4.

Nous allons terminer par une interprétation combinatoire des polynômes K_n, liée aux involutions des n premiers entiers.

Si w est une telle involution, elle peut être codée par une permutation w' de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ de la façon suivante :

$$w' = w'_1 w'_2 \ldots w'_{n-k-1} w'_{n-k} w'_{n-k+1} \cdots w'_n,$$

où les k points fixes de w sont $w'_{n-k+1}, \ldots, w'_n$ arrangés par ordre *croissant* : $w'_{n-k+1} < \cdots < w'_n$, et où les $(n-k)/2$ cycles de w sont $(w'_1 w'_2), \ldots, (w'_{n-k-1} w'_{n-k})$ arrangés par ordre *décroissant* dans chaque cycle, puis par ordre *décroissant* de leur premier élément :

$$\begin{array}{ccccccc} w'_1 & > & w'_3 & > & \cdots & > & w'_{n-k-1} \\ \vee & & \vee & & & & \vee \\ w'_2 & > & w'_4 & > & \cdots & > & w'_{n-k} \end{array}.$$

Si, par exemple,

$$w = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{array},$$

son codage w' est

$$w' = 9\quad 7\quad 5\quad 1\quad 4\quad 3\quad 2\quad 6\quad 8\,.$$

L'algorithme de décodage est clair : les points fixes de w se trouvent en plus longue dernière séquence croissante de même parité que n dans w' ; on en déduit les cycles.

On remarque que n est toujours le dernier ou le premier élément de w'. Soit

$$K'_n = \sum_w q^{\mathrm{INV}(w')} x^k$$

le polynôme générateur des inversions de w' et des points fixes de w. La remarque précédente fournit immédiatement pour K'_n une récurrence linéaire ; on constate qu'elle est identique à 6.2 et, par conséquent, $K'_n(x) = K_n(x)$.

7. Remarques

Dans tout ce qui précède, il n'a pas été question d'orthogonalité. Tous les polynômes cités sont orthogonaux. Cependant, seuls les polynômes d'Hermite de 2^{e} espèce semblent conduire à des résultats intéressants. Ils ont été étudiés sous cet angle par Al-Salam et Carlitz [1], Askey [2] et Cigler [8].

Il serait intéressant d'obtenir les formules mentionnées pour les q-polynômes d'Hermite à partir de leur interprétation combinatoire. Celles qui sont données ne sont d'ailleurs peut-être pas les plus appropriées pour de telles démonstrations combinatoires.

8. Tables

Polynômes de Rogers-Szegö $r_n = r_n(1,x)$; $r_n(a,b) = a^n r_n(1, b/a)$.

$$r_0 = 1 \quad r_1 = x+1 \quad r_2 = x^2 + (q+1)x + 1$$
$$r_3 = x^3 + (q^2+q+1)x^2 + (q^2+q+1)x + 1$$
$$r_4 = x^4 + (q^3+q^2+q+1)x^3 + (q^4+q^3+2q^2+q+1)x^2 + (q^3+q^2+q+1)x + 1$$
$$\begin{aligned} r_5 = x^5 &+ (q^4+q^3+q^2+q+1)x^4 + (q^6+q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1)x^3 \\ &+ (q^6+q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1)x^2 + (q^4+q^3+q^2+q+1)x + 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} r_6 = x^6 &+ (q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)x^5 \\ &+ (q^8+q^7+2q^6+2q^5+3q^4+2q^3+2q^2+q+1)x^4 \\ &+ (q^9+q^8+2q^7+3q^6+3q^5+3q^4+3q^3+2q^2+q+1)x^3 \\ &+ (q^8+q^7+2q^6+2q^5+3q^4+2q^3+2q^2+q+1)x^2 \\ &+ (q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)x + 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} r_7 = x^7 &+ (q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)x^6 \\ &+ (q^{10}+q^9+2q^8+2q^7+3q^6+3q^5+3q^4+2q^3+2q^2+q+1)x^5 \\ &+ (q^{12}+q^{11}+2q^{10}+3q^9+4q^8+4q^7+5q^6+4q^5+4q^4+3q^3+2q^2+q+1)x^4 \\ &+ (q^{12}+q^{11}+2q^{10}+3q^9+4q^8+4q^7+5q^6+4q^5+4q^4+3q^3+2q^2+q+1)x^3 \\ &+ (q^{10}+q^9+2q^8+2q^7+3q^6+3q^5+3q^4+2q^3+2q^2+q+1)x^2 \\ &+ (q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)x + 1 \end{aligned}$$

Polynômes de Rogers $A_n = A_n(1,x)$.

$$A_0 = 1 \quad A_1 = 2x \quad A_2 = 4x^2 + q - 1 \quad A_3 = 8x^3 + (2q^2+2q-4)x$$
$$A_4 = 16x^4 + (4q^3+4q^2+4q-12)x^2 + q^4 - q^3 - q + 1$$
$$\begin{aligned} A_5 = 32x^5 &+ (8q^4+8q^3+8q^2+8q-32)x^3 \\ &+ (2q^6+2q^5-2q^4-2q^3-2q^2-4q+6)x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} A_6 = 64x^6 &+ (16q^5+16q^4+16q^3+16q^2+16q-80)x^4 \\ &+ (4q^8+4q^7+8q^6-8q^5-4q^4-8q^3-8q^2-12q+24)x^2 \\ &+ q^9 - q^8 - q^6 + q^5 - q^4 + q^3 + q - 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} A_7 = 128x^7 &+ (32q^6+32q^5+32q^4+32q^3+32q^2+32q-192)x^5 \\ &+ (8q^{10}+8q^9+16q^8+16q^7-16q^6-16q^5-16q^4-24q^3-24q^2-32q+80)x^3 \\ &+ (2q^{12}+2q^{11}-2q^{10}-4q^8-4q^7+2q^6+4q^3+2q^2+6q-8)x \end{aligned}$$

q-polynômes d'Hermite de 1ᵉ espèce $H_n = H_n(x)$.

$$
\begin{aligned}
&H_0 = 1 \quad H_1 = x \quad H_2 = x^2 - 1 \quad H_3 = x^3 + (-q-2)x \\
&H_4 = x^4 + (-q^2 - 2q - 3)x^2 + q^2 + q + 1 \\
&H_5 = x^5 + (-q^3 - 2q^2 - 3q - 4)x^3 + (q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 4q + 3)x \\
&H_6 = x^6 + (-q^4 - 2q^3 - 3q^2 - 4q - 5)x^4 + (q^6 + 3q^5 + 7q^4 + 9q^3 + 10q^2 + 9q + 6)x^2 \\
&\quad - q^6 - 2q^5 - 3q^4 - 3q^3 - 3q^2 - 2q - 1 \\
&H_7 = x^7 + (-q^5 - 2q^4 - 3q^3 - 4q^2 - 5q - 6)x^5 \\
&\quad + (q^8 + 3q^7 + 7q^6 + 13q^5 + 17q^4 + 19q^3 + 19q^2 + 16q + 10)x^3 \\
&\quad + (-q^9 - 4q^8 - 8q^7 - 13q^6 - 17q^5 - 18q^4 - 17q^3 - 14q^2 - 9q - 4)x
\end{aligned}
$$

Polynômes d'Al-Salam-Carlitz $F_n = F_n(x)$.

$$
\begin{aligned}
&F_0 = 1 \quad F_1 = x \quad F_2 = x^2 + q - 1 \quad F_3 = x^3 + (q^3 - 1)x \\
&F_4 = x^4 + (q^5 + q^3 - q^2 - 1)x^2 + q^6 - q^5 - q^3 + q^2 \\
&F_5 = x^5 + (q^7 + q^5 - q^2 - 1)x^3 + (q^{10} - q^7 - q^5 + q^2)x \\
&F_6 = x^6 + (q^9 + q^7 + q^5 - q^4 - q^2 - 1)x^4 \\
&\quad + (q^{14} + q^{12} - q^{11} + q^{10} - 2q^9 - 2q^7 + q^6 - q^5 + q^4 + q^2)x^2 \\
&\quad + q^{15} - q^{14} - q^{12} + q^{11} - q^{10} + q^9 + q^7 - q^6 \\
&F_7 = x^7 + (q^{11} + q^9 + q^7 - q^4 - q^2 - 1)x^5 \\
&\quad + (q^{18} + q^{16} + q^{14} - q^{13} - 2q^{11} - 2q^9 - q^7 + q^6 + q^4 + q^2)x^3 \\
&\quad + (q^{21} - q^{18} - q^{16} - q^{14} + q^{13} + q^{11} + q^9 - q^6)x
\end{aligned}
$$

Polynômes d'Hermite de 2ᵉ espèce $K_n = K_n(x)$.

$$
\begin{aligned}
&K_0 = 1 \quad K_1 = x \quad K_2 = x^2 - q \quad K_3 = x^3 + (-q^3 - q^2 - q)x \\
&K_4 = x^4 + (-q^5 - q^4 - 2q^3 - q^2 - q)x^2 + q^6 + q^5 + q^4 \\
&K_5 = x^5 + (-q^7 - q^6 - 2q^5 - 2q^4 - 2q^3 - q^2 - q)x^3 \\
&\quad + (q^{10} + 2q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 3q^6 + 2q^5 + q^4)x \\
&K_6 = x^6 + (-q^9 - q^8 - 2q^7 - 2q^6 - 3q^5 - 2q^4 - 2q^3 - q^2 - q)x^4 \\
&\quad + (q^{14} + 2q^{13} + 4q^{12} + 5q^{11} + 7q^{10} + 7q^9 + 7q^8 + 5q^7 + 4q^6 + 2q^5 + q^4)x^2 \\
&\quad - q^{15} - 2q^{14} - 3q^{13} - 3q^{12} - 3q^{11} - 2q^{10} - q^9 \\
&K_7 = x^7 + (-q^{11} - q^{10} - 2q^9 - 2q^8 - 3q^7 - 3q^6 - 3q^5 - 2q^4 - 2q^3 - q^2 - q)x^5 \\
&\quad + (q^{18} + 2q^{17} + 4q^{16} + 6q^{15} + 9q^{14} + 11q^{13} + 13q^{12} + 13q^{11} + 13q^{10} + 11q^9 \\
&\qquad + 9q^8 + 6q^7 + 4q^6 + 2q^5 + q^4)x^3 \\
&\quad + (-q^{21} - 3q^{20} - 6q^{19} - 9q^{18} - 12q^{17} - 14q^{16} - 15q^{15} - 14q^{14} - 12q^{13} \\
&\qquad - 9q^{12} - 6q^{11} - 3q^{10} - q^9)x
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Al-Salam (W. A.) et Carlitz (L.). — Some orthogonal q-polynomials, *Math. Nachr.*, vol. **30**, 1965, p. 47-61.

[2] Askey (R.) et Ismail (M.). — A generalization of ultraspherical polynomials, MRC Technical Summary Report #1851, Math. Research Center, Madison, Wisconsin, 1978.

[3] Askey (R.). — manuscrit.

[4] Bressoud (D.). — A simple proof of Mehler's formula for q-Hermite polynomials, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. **29**, 1980, p. 577-580.

[5] Bressoud (D.). — On partitions, orthogonal polynomials and the expansion of certain infinite products, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **42**, 1981, p. 478-500.

[6] Carlitz (L.). — Some polynomials related to theta functions, *Ann. Math. Pura Appl.* ser. 4, vol. **41**, 1956, p. 359-373.

[7] Carlitz (L.). — Some polynomials related to theta functions, *Duke Math. J.*, vol. **24**, 1957, p. 521-527.

[8] Cigler (J.). — Elementare q-Identitäten, [actes de la 5e session du Séminaire lotharingien de Combinatoire], publ. I.R.M.A. n° 182/S-04, Strasbourg,1982.

[9] Hahn (W.). — Über Orthogonal-polynome, die q-Differenzengleichungen genügen, *Math. Nachr.*, vol. **2**, 1949, p. 4-34.

[10] Rogers (L. J.). — On a three-fold symmetry in the elements of Heine's series, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **24**, 1893, p. 171-179.

[11] Rogers (L. J.). — On the expansion of some infinite products, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **24**, 1893, p. 337-352.

[12] Rogers (L. J.). — Second memoir on the expansion of some infinite products, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **25**, 1894, p. 318-343.

[13] Rogers (L. J.). — Third memoir on the expansion of some infinite products, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **26**, 1895, p. 15-32.

[13] Szegö (G.). — Ein Betrag zur Theorie der Thetafunktionen, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math.*, vol. **19**, 1926, p. 242-252.

Jacques DÉSARMÉNIEN,
Département de mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg, France.