Elementare q-Identitäten

J. Cigler

Ich möchte einen Überblick über einige einfache q-Identitäten geben, bei welchen man ohne Rückgriffe auf die Theorie der Partitionen oder Heineschen Reihen auskommt. Ich will mich vor allem bemühen, die Analogie mit der klassischen Analysis hervorzuheben und soweit wie möglich auch die „natürliche Umwelt" der wichtigsten Formeln berücksichtigen. Um die wesentlichen Ideen zu verdeutlichen, möchte ich mich auf die charakteristischen „Normalfälle" beschränken und solche Aspekte betonen, die mir besonders typisch erscheinen.

Wer sich ein wenig mit q-Identitäten beschäftigt hat, wird wahrscheinlich viele Dinge kennen. Ich hoffe aber, daß die hier gewählte Darstellung dazu beiträgt, die Theorie einfacher und leichter durchschaubar zu machen.

1. Grundlegende Tatsachen

Ich darf wohl davon ausgehen, daß die zugrundeliegende analytische Situation bekannt ist:

Der q-Differentiationsoperator D_q, der durch

$$(D_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

definiert ist, stellt ebenso wie der Differenzenoperator Δ_h, definiert durch

$$(\Delta_h f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ein diskretes Analogen des gewöhnlichen Differentiationsoperators dar.

Dabei ist die formale Analogie zur Differentialrechnung noch enger und interessanter als das bei der Differenzenrechnung der Fall ist. Insbesondere existieren für jeden speziellen Begriff der Analysis ein oder mehrere q-Analoga, die sich für $q \to 1$ auf den Ausgangsbegriff reduzieren. Welches q-Analogon das „richtige" ist, hängt von der gewählten Fragestellung ab. Wir wollen alle Formeln so formulieren, daß sie sich für $q = 1$ direkt auf die entsprechenden klassischen Formeln reduzieren.

1.1. Der q-Differentiationsoperator und seine Eigenschaften. Sei q eine feste von 0 und -1 verschiedene reelle Zahl. Sei P der Vektorraum aller Polynome über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und Q die Menge aller formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$. (Um Konvergenzfragen beziehungsweise tieferliegende analytische Probleme zu vermeiden, werden wir uns ausschließlich auf formale Potenzreihen beschränken. Das Symbol $f(x)$ bedeutet daher immer eine formale Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$).

Wir definieren den *q-Differentiationsoperator* D für $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in Q$ durch

$$(1) \qquad (Df)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = \sum_{k=1}^{\infty} [k] a_k x^{k-1},$$

wobei

$$(2) \qquad [n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

gesetzt wurde.

Für $q = 1$ sind dabei die entsprechenden Limiten für $q \to 1$ zu nehmen. Es ist klar, daß sich dann der übliche Differentiationsoperator ergibt, den wir mit D_0 bezeichnen wollen.

Statt $(Df)(x)$ schreiben wir auch kurz $f'(x)$.

Führen wir den Operator ε auf Q ein durch

$$(3) \qquad (\varepsilon f)(x) = f(qx) \ ,$$

so gilt

$$(1') \qquad D = \frac{1}{(q-1)\mathbf{x}}(\varepsilon - 1) \ .$$

Hier bedeutet 1 die identische Abbildung und $a(\mathbf{x})$ den Multiplikationsoperator, der durch $a(\mathbf{x})f(x) = a(x)f(x)$ definiert ist. Wir werden in der Regel in Polynomen (oder formalen Potenzreihen), die als *Multiplikationsoperatoren* aufzufassen sind, die Variable $\mathbf{x}$ stets in Fettschrift darstellen, um sie von „gewöhnlichen" Polynomen (oder formalen Potenzreihen), i.e. Elementen von P (oder Q), zu unterscheiden.

(Da $f(qx) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k - 1\right) a_k x^k$ ein Vielfaches von x ist, kann durch x dividiert werden, ohne aus Q herauszukommen).

Es ist klar, daß D ein linearer Operator auf Q ist.

Wegen

$$\frac{a(qx)b(qx) - a(x)b(x)}{(q-1)x} = \frac{a(qx)(b(qx) - b(x))}{(q-1)x} + \frac{(a(qx) - a(x))b(x)}{(q-1)x}$$

gilt

$$(a(x)b(x))' = a(qx)b'(x) + a'(x)b(x) \ .$$

In Operatorschreibweise heißt das

$$D\,a(\mathbf{x}) = a(q\mathbf{x})D + a'(\mathbf{x}) \tag{4}$$

oder, wenn man a und b vertauscht,

$$D\,a(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})D + a'(\mathbf{x})\varepsilon \ . \tag{4'}$$

Beachtet man, daß $Dx^k = [k]x^{k-1}$ gilt, so folgt speziell

$$D\mathbf{x}^k - q^k\mathbf{x}^k D = [k]\mathbf{x}^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

und

$$D\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^k D = [k]\mathbf{x}^{k-1}\varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5'}$$

Für $k = 1$ reduziert sich das auf $D\mathbf{x} - q\mathbf{x}D = 1$ beziehungsweise $D\mathbf{x} - \mathbf{x}D = \varepsilon$.

Wendet man (5) beziehungsweise (5') auf x^n an, $n = 0, 1, 2, \ldots$, so ergeben sich die Formeln

$$[n+k] - q^k[n] = [k] \tag{6}$$

und

$$[n+k] - [n] = [k]q^n, \tag{6'}$$

die natürlich auch sofort aus (2) abzulesen sind.

Wir benötigen im folgenden oft die *q-Faktoriellen*

$$[n]! = [1][2]\cdots[n], \quad [0]! = 1,$$

und die *q-Binomialkoeffizienten*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}.$$

Wir führen nun auf P ein inneres Produkt ein durch

$$\left\langle x^k, x^l \right\rangle = [k]!\,\delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Dieses läßt sich auch folgendermaßen beschreiben: Sei L das lineare Funktional auf Q, das durch

$$Lf(x) = f(0) \tag{8}$$

definiert ist. Dann gilt

$$\left\langle x^k, x^l \right\rangle = LD^k x^l \ . \tag{9}$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß das innere Produkt (7) auch auf den Fall erweitert werden kann, daß ein Faktor in Q liegt. Es gilt dann

$$\langle a(x), b(x) \rangle = \langle b(x), a(x) \rangle\,, \quad a \in P, b \in Q\ . \tag{10}$$

Ist A ein linearer Operator, so definieren wir den transponierten Operator A^t durch

$$\langle A\,a(x), b(x) \rangle = \big\langle a(x), A^t b(x) \big\rangle\ .$$

Dann gilt

$$\begin{gathered}(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t, \quad (AB)^t = B^t A^t\ , \\ x^t = D, \quad D^t = x, \quad \varepsilon^t = \varepsilon\ . \end{gathered} \tag{11}$$

Speziell geht für $a(x) = \sum a_k x^k$ der Multiplikationsoperator $a(\mathbf{x})$ auf Q in den Operator $a(\mathbf{x})^t = \sum a_k D^k$ auf P über, der durch $\left(\sum a_k D^k\right) p(x) = \sum a_k p^{(k)}(x)$ definiert ist. Aus (9) und (10) folgt dann die nützliche Formel

$$La(D)b(x) = Lb(D)a(x) \text{ für } a \in P, b \in Q\ . \tag{12}$$

Versteht man unter $a'(D)$ den Operator $(a'(\mathbf{x}))^t$, so gilt

$$Lf(D)x = LDf(x) = Lf'(x) = Lf'(D)1\ . \tag{12'}$$

Außerdem ist der Koeffizient a_k in den formalen Potenzreihen $f(x) = \sum a_k x^k$ gegeben durch

$$a_k = L\frac{D^k}{[k]!}f(x) = Lf(D)\frac{x^k}{[k]!}\ . \tag{13}$$

Jede Operatoridentität geht durch Transposition wieder in eine Operatoridentität über. Speziell gehen (4) und (4') über in

$$a(D)\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,a(qD) + a'(D) \tag{14}$$

und

$$a(D)\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,a(D) + \varepsilon\,a'(D). \tag{14'}$$

Analog ergibt sich aus (5) und (5')

$$D^k\mathbf{x} - q^k\mathbf{x}D^k = [k]D^{k-1} \tag{15}$$

und

$$D^k\mathbf{x} - \mathbf{x}D^k = [k]\,\varepsilon D^{k-1}\ . \tag{15'}$$

Wendet man diese Identitäten auf x^n an, so ergeben sich die Rekursionsformeln für die q-Binomialkoeffizienten:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \ . \tag{16'}$$

Im weiteren benötigen wir auch das q-Analogon der Leibnizschen Formel.

Da $Df(ax) = af'(ax)$ gilt, zeigt man mit Induktion sofort, daß

$$(a(x)b(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{(n-k)}\left(q^k x\right) b^{(k)}(x)$$

gilt. Denn für $n = 1$ ist das richtig. Somit ist

$$\begin{aligned} (a(x)b(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{(n-k)}\left(q^{k+1} x\right) b^{(k+1)}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^k a^{(n+1-k)}\left(q^k x\right) b^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \right) a^{(n+1-k)}\left(q^k x\right) b^{(k)}(x) \ . \end{aligned}$$

In Operatorschreibweise erhalten wir

$$D^n a(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{(n-k)}\left(q^k \mathbf{x}\right) D^k \tag{17}$$

und

$$D^n a(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{(k)}(\mathbf{x})\, \varepsilon^k D^{n-k} \ . \tag{17'}$$

Bemerkung. Wir werden auch gelegentlich den Operator D_α benötigen, der durch

$$(D_\alpha p)(x) = \frac{p\left(q^\alpha x\right) - p(x)}{\left(q^\alpha - 1\right) x} \tag{18}$$

definiert ist. Er erfüllt $D_\alpha x^n = [n]_\alpha x^{n-1}$ mit

$$[n]_\alpha = \frac{q^{n\alpha} - 1}{q^\alpha - 1} = \frac{[n\alpha]}{[\alpha]} \ . \tag{19}$$

1.2. Die q-Exponentialfunktion. Die eindeutig bestimmte formale Pontenzreihe $f(x)$ mit $Df = af$ und $Lf = 1$ ist gegeben durch $f(x) = e(ax)$ mit

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} \ . \tag{1}$$

Wir nennen $e(x)$ die *q-Exponentialfunktion.*

Wegen

$$\frac{e(aqx) - e(ax)}{(q-1)x} = a \ e(ax)$$

ist $e(ax)$ auch charakterisiert durch

$$e(aqx) = (1 + (q-1)ax)e(ax), \quad e(0) = 1 \ . \tag{2}$$

Wir fragen nun etwas allgemeiner nach der Lösung der q-Differentialgleichung

$$Df(x) = ax \ f(x) \quad \text{mit} \quad Lf = 1.$$

Setzt man $f(x) = \sum a_k x^k$, so muß aber gelten

$$\sum [k] a_k x^{k-1} = ax \sum a_k x^k,$$

oder $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$,

$$[2k]a_{2k} = a \cdot a_{2k-2}$$

$$\Rightarrow a_{2k} = \frac{a^k}{[2] \cdots [2k]} = \left(\frac{a}{[2]}\right)^k \frac{1}{[k]_2!} \ .$$

Setzt man also allgemein

$$e_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_\alpha!} \ , \tag{3}$$

so ergibt sich, daß die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$Df(x) = axf(x) \text{ mit } Lf = 1$$

gegeben ist durch

$$f(x) = e_2\left(\frac{ax^2}{[2]}\right) \ .$$

Es existieren eine Reihe von Beziehungen zwischen den verschiedenen $e_\alpha{}'s$. Wir wollen hier nur zwei erwähnen:

$$\frac{1}{e_\alpha(x)} = e_{-\alpha}(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\alpha\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]_\alpha!} \ . \tag{4}$$

Es genügt natürlich, den Fall $\alpha = 1$ zu behandeln. Aus (2) folgt

$$e\left(\frac{ax}{q}\right) = \frac{1}{1+\frac{q-1}{q}ax}e(ax)$$

und daher

$$\begin{aligned}
e_{-1}(-qx) &= \frac{1}{1-(1-q)x}e_{-1}(-x) \\
\Rightarrow e(qx)e_{-1}(-qx) &= \bigl(1+(q-1)x\bigr)\frac{1}{1+(q-1)x}e(x)e_{-1}(-x) \\
\Rightarrow D\left(e(x)e_{-1}(-x)\right) &= 0 \\
\Rightarrow e(x)e_{-1}(-x) &= 1,
\end{aligned}$$

d.h. (4).

Eine weitere nützliche Beziehung ist

$$e_2\left(\frac{x}{[2]}\right)e_2\left(\frac{qx}{[2]}\right) = e(x) \ . \tag{5}$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
e_2\left(\frac{qx}{[2]}\right)e_2\left(\frac{q^2x}{[2]}\right) &= e_2\left(\frac{qx}{[2]}\right)\left(1+\left(q^2-1\right)\frac{x}{[2]}\right)e_2\left(\frac{x}{[2]}\right) = \\
&= \bigl(1+(q-1)x\bigr)e_2\left(\frac{x}{[2]}\right)e_2\left(\frac{qx}{[2]}\right) \ .
\end{aligned}$$

Aus (2) folgt die Behauptung.

Bemerkung. Man hätte (5) natürlich auch durch Koeffizientenvergleich beweisen können. Es ist nämlich allgemein

$$\sum \frac{a_k}{[k]!}x^k \sum \frac{b_l}{[l]!}x^l = \sum \frac{c_n}{[n]!}x^n$$

mit $c_n = \sum \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] a_k b_{n-k}$.

Daher ist (5) äquivalent mit

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2 q^k = (1+q)\left(1+q^2\right)\cdots\left(1+q^n\right) \ . \tag{5'}$$

Diese Formel läßt sich sehr leicht mit Induktion beweisen.

Aus 1.1. (14), (14'), (4), (4') ergeben sich die folgenden nützlichen Formeln (man beachte $D\varepsilon = q\varepsilon D$)

$$e(aD)\mathbf{x}\frac{1}{e(aD)} = \mathbf{x} + a\varepsilon \ , \tag{6}$$

$$(7) \qquad \frac{1}{e(aD)}\left(\mathbf{x}\varepsilon^{-1}\right) e(aD) = (\mathbf{x}-a)\varepsilon^{-1} \ ,$$

$$(8) \qquad \frac{1}{e_2\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{[2]}\right)} D\, e_2\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{[2]}\right) = D - \mathbf{x}\varepsilon \ ,$$

$$(9) \qquad e_2\left(\frac{q\mathbf{x}^2}{[2]}\right)\left(\varepsilon^{-1}D\right)\frac{1}{e_2\left(\frac{q\mathbf{x}^2}{[2]}\right)} = D_{-1} - \mathbf{x}\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}D - \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \ .$$

1.3. Das q-Analogon der Polynome $(x-a)^n$. Die Polynome $p_n(x,a) = (x-a)^n$ sind charakterisiert durch $p_n(a,a) = \delta_{n0}$ und $D_0 p_n = np_{n-1}$. Um ein q-Analogon zu finden, stellen wir daher die folgende Frage:

Gibt es Polynome $p_n(x,a)$ vom Grad n mit $p_n(a,a) = \delta_{n0}$ und $Dp_n = [n]p_{n-1}$?

Wenn solche Polynome existieren, dann muß wegen

$$\frac{p_n(qx,a) - p_n(x,a)}{(q-1)x} = Dp_n(x,a) = [n]p_{n-1}(x,a)$$

gelten

$$\begin{aligned} p_n(qx,a) &= p_n(x,a) + (q^n-1)\, x p_{n-1}(x,a) \\ \Rightarrow p_n(qa,a) &= 0 \text{ für } n > 1 \\ \Rightarrow p_n\left(q^i a, a\right) &= 0 \text{ für } n > i \\ \Rightarrow p_n(x,a) &= (x-a)(x-qa)\cdots\left(x-q^{n-1}a\right) \ . \end{aligned}$$

Man überzeugt sich sehr leicht, daß diese Polynome tatsächlich alle Forderungen erfüllen.

Satz. *Die eindeutig bestimmten Polynome n-ten Grades $p_n(x,a)$ mit $p_n(a,a) = \delta_{n0}$ und $Dp_n = [n]p_{n-1}$ sind gegeben durch $p_0(x) \equiv 1$ und*

$$(1) \qquad p_n(x,a) = (x-a)(x-qa)\cdots\left(x-q^{n-1}a\right), \quad n \geq 1.$$

Um die explizite Gestalt dieser Polynome zu finden, setzen wir

$$p_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^k \ .$$

Dann folgt aus 1.1. (13) und (1)

$$a_{nk} = L\frac{D^k}{[k]!}p_n(x,a) = L\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p_{n-k}(x,a) = (-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}a^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

und daher

$$p_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}} a^{n-k} x^k \ . \tag{2}$$

Das läßt sich auch in der Gestalt

$$p_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{a^k D^k}{[k]!} x^n$$

schreiben. Beachtet man 1.2. (4), so gilt also

$$p_n(x,a) = \frac{1}{e(aD)} x^n = e_{-1}(-aD) x^n \ . \tag{3}$$

Beachtet man, daß $D^n e(xt) = t^n e(xt)$ ist, so folgt daraus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,a)}{[n]!} t^n = \frac{1}{e(aD)} e(xt) = \frac{e(xt)}{e(at)} \ . \tag{4}$$

Wegen

$$\frac{e(xt)}{e(at)} \frac{e(at)}{e(yt)} = \frac{e(xt)}{e(yt)}$$

folgt duch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p_k(x,a) p_{n-k}(a,y) = p_n(x,y) \ . \tag{5}$$

Die Polynome $p_n(x,a)$ treten bei verschiedenen Problemen auf. So gilt z.B.

$$e\left(q^n x\right) = p_n(1,(1-q)x) e(x) \ . \tag{6}$$

Das folgt sofort aus 1.2. (2). Damit wiederum erhält man

$$\begin{aligned} e(\varepsilon z) e(xt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n z^n}{[n]!} e(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e\left(q^n xt\right)}{[n]!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(1,(1-q)xt)}{[n]!} z^n e(xt) = \frac{e(z)}{e((1-q)xtz)} e(xt) \ , \end{aligned}$$

also

$$e(\varepsilon z) e(xt) = \frac{e(z) e(xt)}{e((1-q)xtz)} \ . \tag{7}$$

Eine weitere nützliche Formel ist

$$\frac{p_n(\varepsilon,1)}{(q-1)^n} = q^{\binom{n}{2}} \mathbf{x}^n D^n \ . \tag{8}$$

Denn wendet man beide Seiten auf x^r an, $r = 0,1,2,\ldots$, so ergibt sich in beiden Fällen

$$q^{\binom{n}{2}} [r][r-1] \cdots [r-n+1] x^r \ .$$

1.4. Die Rogers–Szegő-Polynome. Die Polynome $r_n(x,n) = (x+a)^n$ können auch durch $D_0 r_n = n r_{n-1}$ und $L r_n(x,a) = a^n$ charakterisiert werden. Das führt zu folgender Frage:

Gibt es Polynome $r_n(x,n)$ n-ten Grades mit $Dr_n = [n] r_{n-1}$ und $Lr_n(x,a) = a^n$?

Wenn es solche Polynome gibt, so folgt $r_n(x,a) = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^k$ mit

$$a_{nk} = L \frac{D^k}{[k]!} r_n(x,a) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} L r_{n-k}(x,a) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k} \ ,$$

also ist

$$r_n(x,a) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k} x^k \ .$$

Satz. *Die eindeutig bestimmten Polynome n-ten Grades $r_n(x,a)$ mit $Dr_n = [n]r_{n-1}$ und $Lr_n(x,a) = a^n$ sind die Rogers–Szegő-Polynome*

$$r_n(x,a) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k} x^k = a^n r_n\left(\frac{x}{a}\right) \ \text{mit } r_n(x) = r_n(x,1) \ . \tag{1}$$

Es gilt dann

$$r_n(x,a) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{[k]!} D^k x^n$$

oder

$$r_n(x,a) = e(aD) x^n \tag{2}$$

und somit

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{r_n(x,a)}{[n]!} t^n = e(aD) e(xt) = e(at) e(xt) \ . \tag{3}$$

Aus (2) und 1.2. (6) ergibt sich

$$r_n(x,a) = e(aD)\mathbf{x}^n \frac{1}{e(aD)} 1 = (e(aD)\mathbf{x} \frac{1}{e(aD)})^n 1 = (\mathbf{x} + a\varepsilon)^n 1$$

$$\Rightarrow r_n(x,a) = (\mathbf{x} + a\varepsilon)^n 1 \ . \tag{4}$$

Aus (4) folgt

$$\begin{aligned} r_{n+1}(x,a) &= (\mathbf{x} + a\varepsilon) r_n(x,a) \\ &= (\mathbf{x} + a) r_n(x,a) + a(\varepsilon - 1) r_n(x,a) \\ &= (x+a) r_n(x,a) + a(q-1) x D r_n(x,a) \\ &= (x+a) r_n(x,a) + a(q^n - 1) x r_{n-1}(x,a) \end{aligned}$$

also

$$(5) \qquad r_{n+1}(x,a) = (x+a)r_n(x,a) + a\,(q^n-1)\,x r_{n-1}(x,a) \ .$$

Die bekanntesten Spezialfälle sind für $a=1$, $x=1$

$$(6) \qquad r_{n+1}(1) = 2r_n(1) + (q^n-1)\,r_{n-1}(1)$$

mit $r_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right]$ und die Gaußsche Identität $(x=1, a=-1)$

$$(7) \qquad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3)\cdots\left(1-q^{2n-1}\right) \ .$$

2. Der q-binomische Lehrsatz

Es gibt viele Formeln, die als q-binomischer Lehrsatz bezeichnet werden. Für mein Gefühl stellt der folgende Satz die einfachste und klarste Version dar:

Satz 1 (q-binomischer Lehrsatz). *Seien A_0 und A_1 lineare Operatoren auf dem Vektorraum P mit $A_1 A_0 = q A_0 A_1$. Dann gilt*

$$(1) \qquad (A_0 + A_1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A_0^k A_1^{n-k} \ .$$

Beweis. Mit Induktion unter Verwendung von 1.1. (16) ergibt sich

$$\begin{aligned} (A_0 + A_1) \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A_0^k A_1^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) A_0^k A_1^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} A_0^k A_1^{n+1-k} \ . \end{aligned}$$

Der entsprechende **multinomische Lehrsatz** ist gegeben durch

$$(2) \qquad (A_1 + A_2 + \cdots + A_s)^n = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_s \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \ldots, k_s \end{bmatrix} A_1^{k_1} \cdots A_s^{k_s} \ .$$

Hier gilt $A_j A_i = q A_i A_j$ für $i < j$ und

$$\begin{bmatrix} n \\ k_1, \ldots, k_s \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k_1]! \cdots [k_s]!} \text{ falls } \sum_{j=1}^{s} k_j = n \ .$$

Der Beweis folgt sofort mit Induktion nach s.

Einfache Beispiele für Operatorenpaare (A_0, A_1) mit $A_1 A_0 = qA_0 A_1$ sind $(\mathbf{x}^a\varepsilon^b, \mathbf{x}^c\varepsilon^d)$ oder $(\varepsilon^d D^c, \varepsilon^b D^a)$ mit $ad - bc = 1$, also etwa $(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}\varepsilon)$, $(\mathbf{x}\varepsilon, \varepsilon)$, (ε, D), $(\varepsilon D, D)$ und $(\varepsilon, \varepsilon D)$.

So folgt etwa

$$(\mathbf{x} + a\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{x}^k a^{n-k} \varepsilon^{n-k}$$

oder

$$(-\mathbf{x}\varepsilon + a\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-\mathbf{x}\varepsilon)^k (a\varepsilon)^{n-k} \ .$$

Somit ist

$$p_n(a, x) = (-\mathbf{x}\varepsilon + a\varepsilon)^n 1 \ . \tag{3}$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man, daß Satz 1 äquivalent ist mit

Satz 2. *Seien A_0 und A_1 lineare Operatoren auf P mit $A_1 A_0 = qA_0 A_1$. Dann gilt*

$$e\,(A_0 t)\, e\,(A_1 t) = e\big(\,(A_0 t + A_1)\, t\big) \ . \tag{4}$$

Beispiele. 1) $(A_0, A_1) = (\mathbf{x}, -\mathbf{x}\varepsilon)$ liefert

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x})e(-\mathbf{x}\varepsilon) &= e\big(\mathbf{x}(1-\varepsilon)\big) \\ \Rightarrow e(\mathbf{x})e(-\mathbf{x}\varepsilon)1 &= 1 \text{ weil } (1-\varepsilon)1 = 0 \text{ ist} \ . \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$\frac{1}{e(x)} = e(-\mathbf{x}\varepsilon)1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]!} \ .$$

Das ist wohl der einfachste Beweis für dieses Resultat, welches wir in 1.2. (4) schon auf anderem Wege bewiesen hatten.

2) Für $(A_0, A_1) = (\mathbf{x}, a\varepsilon)$ ergibt sich 1.4. (3).

3) Für $(A_0, A_1) = (-\mathbf{x}\varepsilon, a\varepsilon)$ folgt 1.3. (4).

Aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_0 + A_1)^n}{[n]!} t^n &= e\,(A_0 t)\, e\,(A_1 t) = e\,(A_0 t)\, e\,(at)\, \frac{e\,(A_1 t)}{e\,(at)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n\,(A_0, a)}{[n]!} t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n\,(A_1, a)}{[n]!} t^n \end{aligned}$$

folgt durch Koeffizientenvergleich der

Satz 3. *Gilt* $A_1A_0 = qA_0A_1$, *dann gilt*

$$(A_0 + A_1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} r_k(A_0, a)\, p_{n-k}(A_1, a)\ . \tag{5}$$

Beispiel. Wählt man $(A_0, A_1) = (x, \varepsilon)$, so folgt

$$(x+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} r_k(x) p_{n-k}(\varepsilon, 1) \tag{6}$$

Aus 1.4. (4) und 1.3. (8) folgt daraus z.B. die Carlitzsche Formel

$$\begin{aligned} r_{m+n}(x) &= (x+\varepsilon)^n r_m(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} [k]!\,(q-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k r_{n-k}(x) r_{m-k}(x)\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Aus 1.4. (3), 1.3. (7) und 1.4. (4) ergibt sich sehr einfach das folgende Resultat von L. J. Rogers (1893)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(x,a) r_n(y,b)}{[n]!} t^n = \frac{e(abt)e(btx)e(aty)e(xyt)}{e((1-q)xyabt^2)}\ . \tag{8}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(x,a) r_n(y,b)}{[n]!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(y,b)}{[n]!} t^n (x+a\varepsilon)^n 1 \\ &= e(yt(x+a\varepsilon))e(bt(x+a\varepsilon))1 \\ &= e(ytx)e(yat\varepsilon)e(btx)e(abt\varepsilon)1 \\ &= e(ytx)e(yat\varepsilon)e(btx)e(abt) \\ &= e(abt)e(ytx)\frac{e(yat)}{e((1-q)btxyat)}e(btx) \\ &= \frac{e(abt)e(btx)e(aty)e(xyt)}{e((1-q)xyabt^2)}\ . \end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$$(A_0 + A_1)^2 = \left(A_0^2 + qA_0A_1\right) + \left(A_0A_1 + A_1^2\right)$$

gilt, und daß

$$\left(A_0A_1 + A_1^2\right)\left(A_0^2 + qA_0A_1\right) = q^2\left(A_0^2 + qA_0A_1\right)\left(A_0A_1 + A_1^2\right)$$

ist, so folgt

$$e_2\big((A_0+A_1)^2\big) = e_2\left(A_0^2 + qA_0A_1\right) e_2\left(A_0A_1 + A_1^2\right).$$

Aus $A_0A_1A_0^2 = q^2A_0^3A_1$ und $A_1^2A_0A_1 = q^2A_0A_1^3$ folgt weiter

$$e_2\big((A_0+A_1)^2\big) = e_2\left(A_0^2\right) e_2\left(qA_0A_1\right) e_2\left(A_0A_1\right) e_2\left(A_1^2\right).$$

Aus 1.2. (5) folgt daraus der

Satz 4. *Gilt* $A_1A_0 = qA_0A_1$, *dann ist*

$$e_2\big((A_0+A_1)^2\big) = e_2\left(A_0^2\right) e\left([2]A_0A_1\right) e_2\left(A_1^2\right) .$$

Speziell gilt

$$e(tD)e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\right) = e_2\left(\frac{(x+\varepsilon t)^2}{[2]}\right)1 = e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\right)e(x\varepsilon t)\,e_2\left(\frac{\varepsilon^2t^2}{[2]}\right)1$$

und daher

(9)
$$\frac{1}{e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\right)}e(tD)\,e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\right) = \frac{e_2\left(\frac{t^2}{[2]}\right)}{e(-xt)} .$$

Ersetzt man hier q durch $\frac{1}{q}$, so erhält man wegen $D_{-1} = \varepsilon^{-1}D$

(10)
$$e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)\frac{1}{e(\varepsilon^{-1}Dt)}\frac{1}{e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)} = \frac{e(xt)}{e_2\left(\frac{qt^2}{[2]}\right)} .$$

3. Die q-Hermite-Polynome

3.1. Vorbemerkungen. Die klassischen *Hermite-Polynome* $h_n(x)$ können durch die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(x)}{n!}t^n = e^{tx-\frac{t^2}{2}}$$

definiert werden. Sie sind Polynome n-ten Grades, die durch

$$h_n(x) = e^{-D_0^2/2}x^n = (x-D_0)^n\,1 = e^{x^2/2}\,(-D_0)^n\,e^{-x^2/2}$$

gegeben sind.

Sie erfüllen die Rekursion $h_0(x) \equiv 1$, $h_1(x) = x$,

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - nh_{n-1}(x)$$

und die Gleichung $D_0h_n = nh_{n-1}$.

Sie sind außerdem orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$[f(x), g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2/2}dx .$$

Wir suchen ein q-Analogon, welches womöglich alle diese Eigenschaften in geeigneter q-Version besitzt. Soviel mir bekannt ist, gibt es bis auf unwesentliche Normierungen, nur zwei Arten von q-Hermite-Polynomen, die sich als brauchbar erwiesen haben.

Wir wollen zunächst die erste Version $H_n(x)$ betrachten, die auf L. J. Rogers zurückgeht. Sie kann folgendermaßen motiviert werden: Wir wollen, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{[n]!} t^n$ ein q-Analogon von $e^{tx-t^2/2}$ ist. Diese Funktion genügt der Differentialgleichung $D_0 f(x,t) = (x-t) f(x,t)$, wobei D_0 die Ableitung nach t bedeutet.

Wir suchen also jene Polynomfolge $H_n(x)$, für welche gilt

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{[n]!} t^n = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{[n]!} t^n$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{[n]!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x H_n(x)}{[n]!} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{[n-1]!} t^n \ .$$

Das ergibt mit $H_0(x) \equiv 1$, $H_1(x) = x$ und

$$H_{n+1}(x) = x H_n(x) - [n] H_{n-1}(x) \ .$$

Daraus wieder ergibt sich die Orthogonalität bezüglich eines geeigneten Funktionals.

Es besteht ein enger Zusammenhang mit den Rogers–Szegő-Polynomen. Es ist nämlich

$$H_n \left(\frac{2}{\sqrt{1-q}} \cos \Theta \right) \sqrt{(1-q)^n} = r_n \left(e^{i\Theta}, e^{-i\Theta} \right) \ ,$$

denn beide Seiten erfüllen die Rekursion

$$B_{n+1}(\cos\Theta) = 2\cos\Theta \, B_n(\cos\Theta) + (q^n - 1) \, B_{n-1}(\cos\Theta)$$

und $B_0 = 1$, $B_1(\cos\Theta) = 2\cos\Theta$.

Es lassen sich daher alle Aussagen über die Polynome r_n auf diese Klasse von Hermite-Polynomen übertragen. So ergibt sich etwa aus 2. (7)

$$H_{m+n}(x) = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} [k]! \, (-1)^k q^{\left[\begin{smallmatrix} k \\ 2 \end{smallmatrix}\right]} H_{n-k}(x) H_{m-k}(x) \ .$$

Allerdings besteht kein einfaches q-Analogon zur Gleichung $D_0 h_n = n h_{n-1}$ und daher ist dieses q-Analogon vom Standpunkt der Analogie zur klassischen Analysis aus doch nicht ganz ideal.

Um ein q-Analogon zu finden, das alle Eigenschaften erfüllt, suchen wir eine Polynomfolge h_n mit $D h_n = [n] h_{n-1}$, welche orthogonal bezüglich eines geeigneten linearen Funktionals F ist, für die also $F\left(h_k(x) h_l(x)\right) = 0$ für $k \neq l$ und $F\left(h_k^2(x)\right) \neq 0$ ist. Da $x h_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} h_k(x)$ gelten muß und $F\left(h_n(x)(x h_k(x))\right) = 0$ ist für $k < n-1$, gilt

$$a_{nk} F\left(h_k^2(x)\right) = F\left(x h_n(x) h_k(x)\right) = 0 \text{ für } k < n-1.$$

Setzen wir der Einfachheit halber $a_{nn} = 0$, so erhalten wir

$$x h_n(x) = h_{n+1}(x) + a_{n,n-1} h_{n-1}(x) \ .$$

(Wegen $Dh_n = [n]h_{n-1}$ und $Dx^n = [n]x^{n-1}$ muß $a_{n,n+1} = 1$ sein.) Wenden wir auf diese Gleichung D an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} qx[n]h_{n-1}(x) + h_n(x) &= [n+1]h_n(x) + [n-1]a_{n,n-1}h_{n-2}(x) \\ \Rightarrow xh_{n-1}(x) &= h_n(x) + \frac{[n-1]}{q[n]}a_{n,n-1}h_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung schließen wir

$$\frac{[n]}{q[n+1]}a_{n+1,n} = a_{n,n-1}.$$

Das bedeutet $a_{n,n-1} = [n]q^{n-1}a$ mit $a = a_{10}$. Somit erhalten wir

$$xh_n(x) = h_{n+1}(x) + [n]q^{n-1}ah_{n-1}(x).$$

Beachtet man $Dh_{n+1}(x) = [n+1]h_n(x)$, so folgt daraus und der vorhergehenden Gleichung nach kurzer Umformung

$$h_{n+1}(qx) = q^{n+1}xh_n(x) - q^{n-1}aDh_n(x)$$

und schließlich

$$h_{n+1}(x) = q^n \left(\mathbf{x}\varepsilon^{-1} - \frac{a}{q}\varepsilon^{-1}D \right) h_n(x) \ .$$

Wählen wir $a = q$, so ergibt sich aus 1.2. (9) und 2. (10)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)}{[n]!}t^n = \frac{e(xt)}{e_2\left(\frac{qt^2}{[2]}\right)} \ .$$

3.2. Die q-Hermite-Polynome $h_n(x)$. Wir definieren also die *q-Hermite-Polynome* $h_n(x)$ durch die erzeugende Funktion

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)}{[n]!}t^n = \frac{1}{e_2\left(\frac{qt^2}{2}\right)}e(xt) = e_{-2}\left(-\frac{t^2}{[2]_{-1}}\right)e(xt) \ .$$

Aus dieser Definition liest man sofort ab, daß

(2) $$Dh_n = [n]h_{n-1}$$

und

(3) $$h_n(x) = \frac{1}{e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)}x^n$$

gilt.

Aus 1. (14') folgt

$$\begin{aligned}
&e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)\mathbf{x}-\mathbf{x}\,e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)=\varepsilon qD\,e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)\\
&\Rightarrow \frac{1}{e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)}\mathbf{x}\,e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)=\mathbf{x}-\frac{1}{e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)}\varepsilon qD\,e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)\\
&\Rightarrow h_{n+1}(x)=\left(\mathbf{x}-\frac{1}{e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)}\varepsilon qD\,e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)\right)h_n(x)\\
&\qquad\qquad = xh_n(x)-\frac{1}{e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right)}\varepsilon q[n]x^{n-1}\\
&\qquad\qquad = xh_n(x)-q^n[n]h_{n-1}(x)\\
&\qquad\qquad = (x-q^nD)\,h_n(x)\ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{n+1}(x)=xh_n(x)-q^n[n]h_{n-1}(x) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h_0(x)&=1\\
h_1(x)&=x\\
h_2(x)&=x^2-q\\
h_3(x)&=x^3-[3]qx\ .
\end{aligned}$$

Weiters folgt

$$h_n(x)=\left(\mathbf{x}-q^{n-1}D\right)\left(\mathbf{x}-q^{n-2}D\right)\cdots(\mathbf{x}-D)1\ . \tag{5}$$

Aus (4) ergibt sich

$$Lh_n=-q^{n-1}[n-1]Lh_{n-2} \tag{6}$$

und daher

$$Lh_{2n+1}=0\quad\text{und}\quad Lh_{2n}=(-1)^n[2n-1]!!\,q^{n^2} \tag{6'}$$

mit $[2n-1]!!=[1][3]\cdots[2n-1]$. Damit diese (und spätere) Formeln auch für $n=0$ sinnvoll sind, setzen wir $[-1]!!=1$.

Nun können wir die Koeffizienten a_{nk} in

$$h_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}x^{n-k}$$

berechnen:

$$a_{nk}=\frac{1}{[n-k]!}LD^{n-k}h_n(x)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}Lh_k\ .$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} a_{n,2k+1} &= 0 \\ a_{n,2k} &= \begin{bmatrix} n \\ 2k \end{bmatrix} (-1)^k q^{k^2} [2k-1]!! \; . \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$h_n(x) = \sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ 2k \end{bmatrix} [2k-1]!! \, x^{n-2k} \; . \tag{7}$$

Als nächstes zeigen wir, daß h_n bezüglich des linearen Funktionals

$$\begin{aligned} F(p) &= \left\langle p(x), e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)\right\rangle = \left\langle e_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right) p(x), 1\right\rangle = \\ &= Le_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right) p(x) \end{aligned} \tag{8}$$

orthogonal ist. Zunächst ist klar, daß

$$F(h_n) = Le_2\left(\frac{qD^2}{[2]}\right) h_n = Lx^n = \delta_{n0}$$

ist. Aus (4) ergibt sich $F(xh_n(x)) = 0$ für $n > 1$. Mit Induktion folgt $\left(x^k h_n(x)\right) = 0$ für $n > k$, daher gilt

$$F(h_n(x)h_k(x)) = 0 \text{ für } n \neq k \; .$$

Nun wollen wir $F\left(h_n(x)h_n(q^k x)\right)$ berechnen. Nach (4) gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} F\left(h_n(x)h_n(q^k x)\right) &= F\left(h_n(x)\left(q^k x h_{n-1}(q^k x) - q^{n-1}[n-1]h_{n-2}(q^k x)\right)\right) \\ &= q^k F(xh_n(x)h_{n-1}(q^k x)) \\ &= q^k F\left(\left(h_{n+1}(x) + q^n[n]h_{n-1}(x)\right) h_{n-1}(q^k x)\right) \\ &= q^{k+n}[n] F\left(h_{n-1}(x)h_{n-1}(q^k x)\right) . \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$F\left(h_n(x)h_n(q^k x)\right) = [n]! \, q^{\binom{n+1}{2}+nk} \; . \tag{9}$$

Beachtet man, daß $Dh_{n+1} = [n+1]h_n$ ist, so folgt durch Kombination mit (4)

$$h_{n+1}(qx) = q^{n+1} x h_n(x) - q^n [n] h_{n-1}(x) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \varepsilon h_{n+1}(x) = q^n (q\mathbf{x} - D) h_n(x)$$

$$\Rightarrow h_{n+1}(x) = q^n \left(\mathbf{x}\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1} D\right) h_n(x)$$

$$\Rightarrow h_n(x) = q^{\binom{n}{2}} \left(\mathbf{x}\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1} D\right)^n 1 \tag{11}$$

$$\Rightarrow h_n(x) = (\mathbf{x} - qD)\left(\mathbf{x} - q^3 D\right) \cdots \left(\mathbf{x} - q^{2n-1} D\right) 1. \tag{12}$$

Aus 1.2. (9) und (11) ergibt sich

$$h_n(x) = q^{\binom{n}{2}} e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)\left(-\varepsilon^{-1}D\right)^n \frac{1}{e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)} \tag{13}$$

$$= q^{\binom{n}{2}} e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)\left(-D_{-1}\right)^n e_{-2}\left(-\frac{x^2}{[2]_{-1}}\right) .$$

Aus der Leibnizschen Formel ergibt sich nun

$$\left(\mathbf{x}\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1}D\right)^n = (-1)^n e_2\left(\frac{q\mathbf{x}^2}{[2]}\right) \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{-1} D_{-1}^k e_{-2}\left(\frac{\mathbf{x}^2}{[2]_{-1}}\right) \cdot \varepsilon^{-k} D_{-1}^{n-k}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k q^{-\binom{k}{2}} h_k(\mathbf{x}) \left(\varepsilon^{-1}D\right)^{n-k} \varepsilon^{-k}$$

(14)

$$\Rightarrow q^{\binom{n}{2}} \left(\mathbf{x}\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1}D\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} h_{n-k}(\mathbf{x}) \varepsilon^{-n} D^k$$

$$\Rightarrow h_{m+n}(x) = q^{\binom{m+n}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} h_{n-k}(\mathbf{x}) \varepsilon^{-n} D^k h_m(x)$$

$$= q^{mn} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} [k]!\, h_{n-k}(x) h_{m-k}\left(\frac{x}{q^n}\right)$$

$$\Rightarrow h_{m+n}(x) = q^{mn} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} [k]!\, h_{n-k}(x) h_{m-k}\left(\frac{x}{q^n}\right) . \tag{15}$$

3.3. Die Mehlersche Formel. Für die klassischen Hermite-Polynome gilt die Mehlersche Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)h_n(y)}{n!} t^n = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\frac{xyt}{1-t^2}} e^{-\frac{t^2}{2}\frac{x^2+y^2}{1-t^2}} .$$

Wir wollen nun das folgende q-Analogon beweisen.

Satz (Mehlersche Formel für q-Hermite-Polynome). *Es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)h_n(y)}{[n]!\, q^{\binom{n+1}{2}}} t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!} \left(\frac{t^2}{q}\right)^m \tag{1}$$

$$\times\ e\left(xy\eta^{-1} \frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}\right) e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\eta^{-1} \frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right) e_2\left(\frac{y^2}{[2]}\eta^{-1} \frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right) 1 ,$$

wobei η durch $\eta f(t) = f(qt)$ definiert ist.

Beweis. Sei

$$f(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)h_n(y)}{[n]!\, q^{\binom{n+1}{2}}} t^n.$$

Dann gilt

$$(2)\quad f(0,0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_{2n}^2(0)}{[2n]!\,q^{\binom{2n+1}{2}}}t^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}\left([2n-1]!!\right)^2}{[2n]!\,q^{n(2n+1)}}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[2n-1]!!}{[2n]!!}\left(\frac{t^2}{q}\right)^n\ .$$

(Zur Erinnerung: Wir hatten $[-1]!!=1$ vereinbart.) Weiters ist

$$(3)\qquad \eta D_x f(x,y,t)=\left(\frac{ty}{1-t^2}-\frac{t^2x}{1-t^2}\right)f(x,y,t)\ .$$

Es ist nämlich

$$D_x f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-1}(x)h_n(y)}{[n-1]!\,q^{\binom{n+1}{2}}}t^n$$

$$\Rightarrow \eta D_x f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-1}(x)h_n(y)}{[n-1]!\,q^{\binom{n}{2}}}t^n$$

$$\Rightarrow \eta D_y f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n(x)h_{n-1}(y)}{[n-1]!\,q^{\binom{n}{2}}}t^n$$

$$\Rightarrow (\eta D_x+t\eta D_y)\,f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-1}(x)\left(h_n(y)+[n-1]q^{n-1}h_{n-2}(y)\right)}{[n-1]!\,q^{\binom{n}{2}}}t^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-1}(x)yh_{n-1}(y)}{[n-1]!\,q^{\binom{n}{2}}}t^n=ytf(x,y,t)$$

$$(4)\qquad \Rightarrow (\eta D_x+t\eta D_y)\,f(x,y,t)=ytf(x,y,t)$$

$$(4')\qquad (\eta D_y+t\eta D_x)\,f(x,y,t)=xtf(x,y,t)$$

$$\Rightarrow \eta D_x f(x,y,t)=(yt-t\eta D_y)f(x,y,t)$$

$$=\left(yt-xt^2+t^2\eta D_x\right)f(x,y,t)$$

und daraus folgt (3).

Durch (2) und (3) ist $f(x,y,t)$ eindeutig festgelegt, da $f(x,0,t)$ eindeutig bestimmt ist. Wegen $f(0,y,t)=f(y,0,t)$ ist daher auch $f(x,y,t)$ eindeutig bestimmt.

Es genügt daher zu zeigen, daß die rechte Seite von (1) ebenfalls (2) und (3) erfüllt.

Nun ist

$$
\begin{aligned}
&D_x e\left(xy\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}\right)e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right)=\\
&=e\left(qxy\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}\right)\left(x\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right)e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right)+\\
&+y\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}e\left(xy\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}\right)e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right)=\\
&=\eta^{-1}\left(\frac{yt}{1-\frac{t^2}{q}}-\frac{xt^2}{1-\frac{t^2}{q}}\right)e\left(xy\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}\right)e_2\left(\frac{x^2}{[2]}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}\right)
\end{aligned}
$$

weil $\left(\eta^{-1}f(t)\right)^n\eta^{-1}f(t)t=\frac{1}{q^n}\eta^{-1}f(t)t\left(\eta^{-1}f(t)\right)^n$ ist.

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$
\begin{aligned}
&\eta\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\left(\frac{t^2}{q}\right)^m\eta^{-1}\left(\frac{yt}{1-\frac{t^2}{q}}-\frac{xt^2}{1-\frac{t^2}{q}}\right)=\\
&=\left(\frac{ty}{1-t^2}-\frac{t^2x}{1-t^2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\left(\frac{t^2}{q}\right)^m
\end{aligned}
$$

gilt, oder daß

$$
(1-t^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\left(qt^2\right)^m=\left(1-\frac{t^2}{q}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\left(\frac{t^2}{q}\right)^m \tag{5}
$$

erfüllt ist. (5) ist durch Koeffizientenvergleich äquivalent mit

$$
\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}q^m-\frac{[2m-3]!!}{[2m-2]!!}q^{m-1}=\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\frac{1}{q^m}-\frac{[2m-3]!!}{[2m-2]!!}\frac{1}{q^m}
$$

oder mit

$$
\frac{[2m-1]}{[2m]}\left(q^m-\frac{1}{q^m}\right)=q^{m-1}-\frac{1}{q^m}\ ,
$$

d.h. mit

$$
\frac{[2m-1]}{[2m]}\frac{\left(q^{2m}-1\right)}{q^m}=\frac{q^{2m-1}-1}{q^m}\ ,
$$

was offenbar richtig ist. Damit ist die Mehlersche Formel bewiesen.

4. Die q-Laguerre-Polynome

4.1. Vorbemerkungen. Die klassischen *Laguerre-Polynome* $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$, können durch die erzeugenden Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{xt}{t-1}}$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^{(\alpha-n)}(x) t^n}{n!} = (1-t)^{\alpha} e^{xt}$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{n!\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$$

definiert werden. Sie sind Polynome n-ten Grades, die durch

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= (1-D_0)^{\alpha+1} x (D_0 - 1)^n x^{n-1} \\ &= x^{-\alpha} e^x D^n e^{-x} x^{n+\alpha} \\ &= (-1)^n (1-D)^{n+\alpha} x^n \end{aligned}$$

gegeben sind. Sie erfüllen die Rekursion

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (\alpha + 2n + 1 - x) L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

mit

$$L_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1, \quad L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x \ .$$

Sie sind orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$[f(x), g(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} f(x) g(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = L \frac{1}{(1-D_0)^{\alpha+1}} f(x) g(x) \ .$$

Wir suchen ein q-Analogon, welches womöglich alle diese Eigenschaften besitzt. Ein Weg dazu besteht in folgender Bemerkung: Vergleicht man die Formeln

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} (-x)^k$$

und

$$(x+\alpha+1)\cdots(x+\alpha+n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} x(x-1)\cdots(x-k+1) \ ,$$

so sieht man, daß in beiden Fällen dieselben Koeffizienten auftreten. Von der zweiten Formel gibt es natürliche q-Analoga. Diese führen zu zwei Klassen von q-Laguerre-Polynomen

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(\varepsilon - D)^{n+\alpha}x^n$$

und

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n p_{n+\alpha}(1, D)x^n \ .$$

Wir wollen uns hier auf die Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$ beschränken, für welche auch ein Zusammenhang mit den q-Hermite-Polynomen besteht.

4.2. Die formalen Potenzreihen $p_\alpha(1,x)$. Wir wollen die Polynome $p_n(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$ auf beliebige reelle α erweitern. Wir setzen dazu

$$p_\alpha(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} x^k \ . \tag{1}$$

Nun ist

$$q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^\alpha - 1)(q^\alpha - q)\cdots(q^\alpha - q^{k-1})}{(q-1)^k[k]!} = \frac{p_k(q^\alpha, 1)}{(q-1)^k[k]!} \ ,$$

und daher gilt

$$p_\alpha(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(q^\alpha,1)}{[k]!}\left(\frac{x}{1-q}\right)^k = \frac{e\left(\frac{q^\alpha x}{1-q}\right)}{e\left(\frac{x}{1-q}\right)} \tag{2}$$

nach 1.3. (4). Weiter ist $\frac{p_k(1,q^\alpha)}{(1-q)^k} = [\alpha][\alpha+1]\cdots[\alpha+k-1]$, und daher gilt

$$\frac{1}{p_\alpha(1,x)} = \frac{e\left(\frac{x}{1-q}\right)}{e\left(\frac{q^\alpha x}{1-q}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \alpha+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \ . \tag{3}$$

Wir benötigen noch die folgenden Formeln:

$$p_{\alpha+1}(1,x) = (1 - q^\alpha x)p_\alpha(1,x) \tag{4}$$

und

$$p_{\alpha+\beta}(1,x) = p_\alpha(1,x)p_\beta(1,q^\alpha x) \ . \tag{5}$$

Da (4) ein Spezialfall von (5) ist ($\beta = 1$), genügt es (5) zu zeigen. Das ergibt sich aus (2):

$$p_\alpha(1,x)p_\beta(1,q^\alpha x) = \frac{e\left(\frac{q^\alpha x}{1-q}\right)}{e\left(\frac{x}{1-q}\right)} \frac{e\left(\frac{q^\beta q^\alpha x}{1-q}\right)}{e\left(\frac{q^\alpha x}{1-q}\right)} = \frac{e\left(\frac{q^{\alpha+\beta} x}{1-q}\right)}{e\left(\frac{x}{1-q}\right)} = p_{\alpha+\beta}(1,x) \ .$$

Bemerkung. Die Gleichung 3.3. (5) folgt ebenfalls aus (5), wenn man $\alpha = \frac{1}{2}$ setzt und q durch q^2 ersetzt. Es ist dann nämlich

$$\frac{1}{p_{\frac{1}{2}}(1,x;q^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!} x^m \ ,$$

und 3.3. (5) äquivalent mit

$$\left(1-\sqrt{q}\frac{x}{\sqrt{q}}\right) p_{\frac{1}{2}}\left(1,\frac{x}{\sqrt{q}}\right) = p_{\frac{3}{2}}\left(1,\frac{x}{\sqrt{q}}\right) = \left(1-\frac{x}{\sqrt{q}}\right) p_{\frac{1}{2}}\left(1,q\frac{x}{\sqrt{q}}\right) \ .$$

4.3. Die q-Laguerre-Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$. Wir definieren die *q-Laguerre-Polynome* $l_n^{(\alpha)}(x)$ durch die Formel

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n p_{n+\alpha}(1,D)x^n \ . \tag{1}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} l_n^{(\alpha)}(x) &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ k \end{bmatrix} D^k x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} x^k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} (-1)^k q^{\binom{n-k}{2}} x^k \ . \tag{2}$$

Definiert man für $\alpha > -1$ den Operator T_α auf P durch

$$T_\alpha x^n = \frac{x^{n+1}}{[\alpha+n+1]}, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

so gilt

$$T_\alpha^k 1 = \frac{x^k}{[\alpha+1]\cdots[\alpha+k]} \ . \tag{4}$$

Aus (2) ergibt sich daher

$$\frac{(-1)^n l_n^{(\alpha)}(x)}{[\alpha+1]\cdots[\alpha+n]} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}} T_\alpha^k 1 = p_n(T_\alpha,1)1 \ . \tag{5}$$

Aus 1.3 (4) folgt somit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha)}(x)\, t^n}{[n]!\,[\alpha+1]\cdots[\alpha+n]} &= \frac{1}{e(t)} e(T_\alpha t)1 \\ &= \frac{1}{e(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{[n]!\,[\alpha+1]\cdots[\alpha+n]} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Definiert man nun S_α auf dem Vektorraum P_0 der Polynome p mit $Lp = 0$ durch

(7) $$S_\alpha x^n = [n+\alpha]x^{n-1} = \left(x^{-\alpha} D x^\alpha\right) x^n, \quad n \geq 1 \ ,$$

so gilt

(8) $$S_\alpha T_\alpha x^n = x^n \text{ für } n \geq 0$$

(9) $$T_\alpha S_\alpha x^n = x^n \text{ für } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-1)^n l_n^{(\alpha)}(x) &= [\alpha+1]\cdots[\alpha+n] p_n(T_\alpha, 1)1 \\ &= p_n(T_\alpha, 1) S_\alpha^n x^n = p_n(1, S_\alpha) x^n \end{aligned}$$

(10) $$\Rightarrow (-1)^n l_n^{(\alpha)}(x) = p_n(1, S_\alpha) x^n = x^{-\alpha} p_n(1, D) x^{n+\alpha} \ .$$

Der Operator T_α ist auch sonst sehr nützlich. Will man etwa ein q-Analogon der sogenannten *Verdoppelungsformel* ableiten, so kann man folgendermaßen vorgehen: Aus 1.3. (5) folgt

$$p_n(ax, 1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k p_{n-k}(a, 1) p_k(x, 1) \ .$$

$$\Rightarrow p_n(aT_\alpha, 1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k p_{n-k}(a, 1) p_k(T_\alpha, 1)$$

$$\Rightarrow (-1)^n \frac{l_n^{(\alpha)}(ax)}{[\alpha+1]\cdots[\alpha+n]} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k p_{n-k}(a, 1) \frac{(-1)^k l_k{}^{(\alpha)}(x)}{[\alpha+1]\cdots[\alpha+k]}$$

(11) $$\Rightarrow l_n^{(\alpha)}(ax) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} (-1)^{n-k} a^k p_{n-k}(a, 1) l_k^{(\alpha)}(x) \ .$$

Nun zu den anderen erzeugenden Funktionen: Aus (1) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha-n)}(x) t^n}{[n]!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_\alpha(1, D) x^n t^n}{[n]!} = p_\alpha(1, D) e(xt)$$

(12) $$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha-n)}(x) t^n}{[n]!} = p_\alpha(1, D) e(xt) \ .$$

Aus (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n^{(\alpha)}(x)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{t^n}{[n]!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[n]!} q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{\binom{n-k}{2}} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k t^k}{[k]!} \sum_{n \geq k} q^{-\binom{n}{2} + \binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} t^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xt)^k}{[k]!} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+\alpha+k \\ n \end{bmatrix} q^{\binom{n}{2} - \binom{n+k}{2}} t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^k}{q^{\binom{k}{2}} [k]!} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+\alpha+k \\ n \end{bmatrix} \left(\frac{t}{q^k}\right)^n \ . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+\alpha+k \\ n \end{bmatrix} \left(\frac{t}{q^k}\right)^n = \frac{1}{p_{\alpha+k+1}\left(1, \frac{t}{q^k}\right)} = \frac{1}{p_k\left(1, \frac{t}{q^k}\right)} \cdot \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,t)}$$

nach 4.2. (3) und (5).

$$(13) \qquad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n^{(\alpha)}(x)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{t^n}{[n]!} = \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{q^{\binom{k}{2}}[k]!} \frac{t^k}{\left(\frac{t}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{t}{q^k}-1\right)}$$

$$= \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,t)} e\left(q\mathbf{x}\eta^{-1}\frac{t}{t-1}\right) 1 \ .$$

mit $\eta t^n = q^n t^n$. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$(14) \qquad p_n(1,D) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} e(qx) D^n \frac{1}{e\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right)}$$

weil $e(aqx)D\frac{1}{e(ax)} = D - a$ gilt.

Aus (10) folgt daher

$$(15) \qquad \frac{l_n^{(\alpha)}(x)}{q^{\binom{n}{2}}} = x^{-\alpha} e(qx) D^n \frac{1}{e\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right)} x^{n+\alpha} \ .$$

Aus (1) ergibt sich

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n p_{n-1}(1,D) p_{\alpha+1}\left(1, q^{n-1}D\right) x^n$$

und somit

$$(16) \qquad l_n^{(\alpha)}(x) = p_{\alpha+1}\left(1, q^{n-1}D\right) l_n^{(-1)}(x)$$

mit

$$l_n^{(-1)}(x) = (-1)^n x p_n(1,D) x^{n-1} \ .$$

Wendet man auf beide Seiten von (16) ε^n an, so ergibt sich

$$(16') \qquad l_n^{(\alpha)}(q^n x) = p_{\alpha+1}\left(1, \frac{D}{q}\right) l_n^{(-1)}(q^n x) \ .$$

Wir behaupten nun, daß die q-Laguerre-Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$ für $\alpha > -1$ orthogonal bezüglich des linearen Funktionals

$$(17) \qquad F(p) = L \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)} p(x)$$

sind. Wegen

$$\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \alpha+k \\ k \end{bmatrix} D^k \text{ und } \begin{bmatrix} \alpha+k+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{[\alpha+1]}{[k+1]} \begin{bmatrix} \alpha+k+1 \\ k \end{bmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned}
&L\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)}\mathbf{x} = [\alpha+1]\, L\frac{1}{p_{\alpha+2}(1,D)} \\
&\Rightarrow L\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)}\mathbf{x}^k = [\alpha+1]\cdots[\alpha+k]\, L\frac{1}{p_{\alpha+k+1}(1,D)} \ . \\
&\Rightarrow F\left(l_n^{(\alpha)}(x)x^k\right) = L\frac{[\alpha+1]\cdots[\alpha+k]}{p_{\alpha+k+1}(1,D)} l_n^{(\alpha)}(x) \\
&\qquad\qquad = [\alpha+1]\cdots[\alpha+k]\, L\frac{(-1)^n}{p_{\alpha+k+1}(1,D)} p_{n+\alpha}(1,D)x^n \\
&\qquad\qquad = [\alpha+1]\cdots[\alpha+k](-1)^n L p_{n-k-1}\left(1, q^{\alpha+k+1}D\right) x^n = 0
\end{aligned}$$

für $k < n$.

Für $k \geq n$ ergibt sich

$$F\left(l_n^{(\alpha)}(x)x^k\right) = (-1)^n[\alpha+1]\cdots[\alpha+k]\, L\frac{1}{p_{k+1-n}(1, q^{n+\alpha}D)} x^n \ . \tag{18}$$

Da der Koeffizient von x^n in $l_n^{(\alpha)}(x)$ gleich $(-1)^n$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
F\left(l_n^{(\alpha)}(x)l_n^{(\alpha)}(x)\right) &= [\alpha+1]\cdots[\alpha+n]\, L\frac{1}{(1-q^{n+\alpha}D)} x^n = \\
&= q^{n^2+\alpha n}[n]!\,[\alpha+1]\cdots[\alpha+n] \ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F\left(l_n^{(\alpha)}(x)l_k^{(\alpha)}(x)\right) = q^{\alpha n+n^2}[n]!\,[\alpha+1]\cdots[\alpha+n]\delta_{nk} \ . \tag{19}$$

Da die $l_n^{(\alpha)}(x)$ orthogonal sind, müssen in der Darstellung

$$x l_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} l_k^{(\alpha)}(x)$$

die Koeffizienten c_{nk} mit $k < n-1$ verschwinden. Es gibt also eindeutig bestimmte Koeffizienten c_{nn} und $c_{n,n-1}$ mit

$$x l_n^{(\alpha)}(x) + l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = c_{nn} l_n^{(\alpha)}(x) + c_{n,n-1} l_{n-1}^{(\alpha)}(x) \ .$$

Um c_{nn} und $c_{n,n-1}$ zu bestimmen, braucht man nur den Koeffizienten von x^n zu betrachten. Es ergibt sich dann

$$(20)\quad l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \left(q^n[n+\alpha] + q^{n+\alpha}[n+1] - x\right) l_n^{(\alpha)}(x) - q^{2n+\alpha-1}[n][n+\alpha] l_{n-1}^{(\alpha)}(x) \ .$$

Abschließend wollen wir noch den Zusammenhang mit den q-Hermite-Polynomen herstellen.

$$\begin{aligned}
h_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k \end{bmatrix} [2k-1]!!\, x^{2n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k^2} \frac{[2n]!\,[2k-1]!!}{[2k]!\,[2n-2k]!} x^{2n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k^2} \frac{[2n]!!\,[2n-1]!!\,[2k-1]!!}{[2k]!!\,[2k-1]!!\,[2n-2k]!!\,[2n-2k-1]!!} x^{2n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k^2} \begin{bmatrix} n-\frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_2 \frac{[n]_2!}{[n-k]_2!} [2]^k x^{2n-2k} \\
&= ([2]q)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-\frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_2 \frac{[n]_2!}{[n-k]_2!} \left(\frac{x^2}{[2]q}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$(21)\qquad \Rightarrow h_{2n}(x) = (-1)^n([2]q)^n l_n^{(-\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{[2]q}, q^2\right) \ .$$

Analog ergibt sich

$$(22)\qquad h_{2n+1}(x) = (-1)^n([2]q)^n x l_n^{(\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{[2]q}, q^2\right) \ .$$

5. Bemerkungen zur Literatur

Ich habe absichtlich jeden Literaturhinweis vermieden, weil es mir unmöglich war, die ursprünglichen Quellen der einzelnen Resultate herauszufinden. Das beruht einerseits darauf, daß mir die ältere Literatur (L. J. Rogers, G. Szegő, F. H. Jackson) teilweise unzugänglich ist und andererseits darauf, daß viele Resultate in zahlreichen Variationen existieren, deren enge Beziehung den einzelnen Autoren nicht aufgefallen ist. Im Grunde sind sicher alle hier behandelten Resultate längst bekannt, wenn ich auch manche in der Literatur bisher nicht finden konnte.

Wahrscheinlich habe auch ich manche Zusammenhänge übersehen. So wäre es durchaus denkbar, daß zwischen den Hermitepolynomen $H_n(x)$ und $h_n(x)$ außer der sehr ähnlichen Rekursionsformel noch andere Zusammenhänge existieren. Ich habe aber bisher keine finden können. So gibt es für die Mehlerformel bei den H_n sehr einfache Beweise (vgl. [2]; noch einfacher scheint mir der Hinweis auf 2. (8) zu sein). Ein so einfacher Beweis ist mir bei den h_n nicht bekannt.

Nach dem Gesagten ist wohl klar, daß die folgende Literaturauswahl sehr subjektiv ist. Sie gibt hauptsächlich Arbeiten an, die mir persönlich interessant erscheinen oder besonders nützlich waren.

Literatur

1. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison–Wesley, Reading, 1976.
2. D. M. Bressoud, *A simple proof of Mehler's formula for q-Hermite polynomials*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 577–580.
3. L. Carlitz, *Some Polynomials related to theta-functions*, Duke J. Math. **24** (1957), 521–527.
4. J. Cigler, *Operatormethoden für q-Identitäten*, Monatsh. Math. **88** (1979), 87–105.
5. J. Cigler, *Operatormethoden für q-Identitäten II: q-Laguerre-Polynome*, Monatsh. Math. **91** (1981), 105-117.
6. J. Cigler, *Die Mehler-Formel für q-Hermite-Polynome*, preprint (1981).
7. A. M. Garsia, J. B. Remmel, *A combinatorial interpretation of q-derangement and q-Laguerre numbers*, Europ. J. Combin. **1** (1980), 47–59.
8. J. Goldman, G.-C. Rota, *Finite vector spaces and Eulerian generating functions*, Stud. Appl. Math. **49** (1970), 239–258.
9. W. Hahn, *Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen*, Math. Nachr. **2** (1949), 4–34.
10. V. K. Jain, *q-Analogues of some bilinear transformations*, Indian J. Pure Appl. Math. **11** (1980), 1643–1658.
11. P. Kirschenhofer, *Binomialfolgen, Shefferfolgen und Faktorfolgen in der q-Analysis*, Sitzungsberichte Österr. Akad. Wiss. II **188** (1979), 265–315.
12. D. S. Moak, *The q-analogue of the Laguerre polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), 20–47.
13. G.-C. Rota, D. Kahaner, A. Odlyzko, *Finite operator calculus*, J. Math. Anal. Appl. **42** (1973), 684–760.