Analyse p-adique et suites classiques de nombres*

Daniel Barsky
Université Paris 13
Institut Galilée
LAGA, URA CNRS n°742
Av J.B. Clément
F-93430 VILLETANEUSE
e.mail: barsky@math.univ-paris13.fr

Abstract

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels (ou plus généralement de nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ et soit p un nombre premier. On sait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est pour tout $h \in \mathbb{N}$ périodique modulo p^h à partir d'un certain rang (ou de manière équivalente, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait pour tout $h \in \mathbb{N}$ une récurrence linéaire modulo p^h à partir d'un certain rang) si et seulement si sa série génératrice $Y = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est un élément analytique p-adique sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}_p$ (complété de la cloture algébrique de $\mathbb{Q}_p$) contenant la boule unité ouverte. On montre que la géométrie du domaine sur lequel Y est un élément analytique p-adique (i.e. sur lequel Y est prolongeable analytiquement p-adiquement) permet de prévoir a priori les congruences satisfaites par les a_n.

On montre que, si la fonction génératrice exponentielle $\widetilde{Y} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!}$ possède certaines propriétés fonctionnelles, alors $Y = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est un élément analytique p-adique sur un domaine de $\mathbb{C}_p$ contenant le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{C}_p$; par exemple si $\widetilde{Y} \in \mathbb{Z}[[X]]$ satisfait une équation différentielle algébrique ou si la série réciproque de $\widetilde{Y}$ possède certaines propriétés.

On montre ensuite, sur des suites classiques de nombres, comment on peut obtenir par cette méthode des résultats effectifs. Enfin, on indique pour terminer le lien qui existe entre les congruences de type *Cartier-Honda* satisfaites par une suite d'entiers $(e_n)_{n\geq 1}$ (i.e. pour tout $n \geq 1$, $e_{np^h} \equiv e_{np^{h-1}} \bmod(p^h)$) et les congruences de type Kummer satisfaites

*1982, revu décembre 1995

par les coefficients a_n de la série $\widetilde{Y} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!}$ réciproque de la série $X = \sum_{n\geq 0} \frac{e_n}{n} Y^n$.

1 Analyse p-adique.

Soit p un nombre premier et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels (resp. de nombres algébriques). On s'intéresse aux propriétés de congruences modulo p^h ($h \in \mathbb{N}$) entre les a_n. Il est clair que l'analyse p-adique doit pouvoir apporter au moins un langage agréable pour traiter ces questions.

Rappelons les généralités suivantes (cf. [1] ou [32]). Soit $a/b = p^\alpha a'/b' \in \mathbb{Q}$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$ et $(a', p) = (b', p) = 1$. On pose $|a/b| = p^{-\alpha}$. Avec cette définition $\mathbb{Q}$ est muni d'une valeur absolue ultramétrique, appelée valeur absolue p-adique, i.e. $\left|\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right| \leq \max\left(\left|\frac{a}{b}\right|, \left|\frac{c}{d}\right|\right)$. Le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue est $\mathbb{Q}_p$, le corps des nombres p-adiques.

Dans toute la suite $|\cdot|$ désignera une valeur absolue non archimédienne prolongeant la valeur absolue p-adique que $\mathbb{Q}$. Le problème de départ se traduit aisément en terme de cette valeur absolue

$$a_n \equiv a_{n+p^h} \pmod{p^{rh}} \iff |a_n - a_{n+p^h}| \leq p^{-r(h)}$$

Divers aspect de la théorie des nombres p-adiques sont exposés dans [1], [32], [35], [42], [48], [50], [51].

On définit $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p ; |x| \leq 1\}$. Il est facile de voir que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau, complété de $\mathbb{Z}$ pour la valeur absolue p-adique, et que $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$ (cf. [1] ou [32]). On définit de la manière habituelle la notion de fonction continue sur $M \subset \mathbb{Q}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$, on note $\mathcal{C}(M, \mathbb{Q}_p)$ l'ensemble de ces fonctions. On a le théorème important suivant:

Théorème 1 (Mahler [34]) . *Soit $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$. Posons $\binom{x}{0} = 1$ et $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$.

ii) Il existe une unique suite d'éléments de $\mathbb{Q}_p$, $(\lambda_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n(f)| = 0$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n(f) \binom{x}{n}$, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. La convergence est uniforme sur $\mathbb{Z}_p$.

On a de plus:

$$\begin{aligned}\lambda_n(f) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)\\ \|f\|_{\mathbb{Z}_p} &\stackrel{déf}{=} \sup_{x\in\mathbb{Z}_p}|f(x)| = \sup_{n\geq 0}|\lambda_n(f)|\end{aligned}$$

□ Nous donnons ici la preuve de Bojanic [15].

$\mathbb{Z}_p$ est compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{Z}_p$. La seule chose à montrer est que $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n(f)| = 0$ si $\lambda_n(f)$ est défini comme dans le théorème. Il est clair que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f(m) = \sum_{n\geq 0}\lambda_n(f)\binom{m}{n}$ et on conclut grace à la densité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_p$; $\lambda_n(f)$ est le m-ième coefficient d'interpolation de f sur les entiers.

Posons $\Delta^m f(x) \stackrel{déf}{=} \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+k)$. Pour h assez grand, on a $|\Delta^{p^h}f(x)| < 1$. En effet $\left|\binom{p^h}{k}\right| < 1$ si k 0 ou p^h et pour h assez grand $|f(x+p^h) - f(x)| < 1$ d'après la continuité p-adique de f. Donc pour tout $n \geq p^h$ on a $|\Delta^n f(0)| < 1$ car $\Delta^{m+n}f(x) = \Delta^m(\Delta^n f(x))$.

Si $n_1 = p^h$, $\Delta^{n_1}f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. Donc il existe $n_2 = p^{h'}$ tel que:

$$|\Delta^{n_2}(\Delta^{n_1}f(x))| \leq \max\left\{|\Delta^{n_1}(f(x+n_2)) - \Delta^{n_1}(f(x))|, p^{-1}|\Delta^{n_1}f(x)|\right\} \leq p^{-2}$$

Et donc, si $n \geq n_1 + n_2$, $|\Delta^n f(x)| \leq p^{-2}$.

On définit alors par récurrence des entiers n_r tel que, si $n \geq n_1+n_2+\ldots+n_r$, $|\Delta^n f(x)| \leq p^{-r}$.

On a donc montré que $\lim_{n\to\infty}|\Delta^n f(x)| = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. Comme $\sup_{x\in\mathbb{Z}_p}\left|\binom{x}{n}\right| = 1$ la série $\sum_{n\geq 0}\Delta^n f(0)\binom{x}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{Z}_p$ vers $f(x)$. Le reste du théorème est évident. □

Ce théorème peut etre généralisé, on peut remplacer $\mathbb{Z}_p$ par des ensembles plus généraux (cf. [2]), on peut remplacer les polynomes $\binom{x}{n}$ par d'autres fonctions (cf. [16] et [40]).

Carlitz, [17], [18], [19], a démontré de nombreuses congruences du type $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{x}{k}a_k \equiv 0 \pmod{p^{r(n)}}$ pour $n \geq n_r$, où a_k est une suite d'entiers définie arithmétiquement ou combinatoirement. Il exprimait en fait qu'il existait une fonction continue p-adique sous-jacente à la suite a_n. Nous reviendrons là-dessus au paragraphe 3.

On peut plus généralement définir des fonctions dérivables, localement analytiques de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$. Toutes ces classes de fonctions se caractérisent aisément sur la suite de leurs coefficients d'interpolation λ_n. Par exemple:

Théorème 2 (Amice [2]) *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$, f est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ (i.e. Pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$ il existe un disque $D(a, \rho_a)^+ = \{x \in \mathbb{Z}_p; |x - a| \leq \rho_a\}$ tel que f soit représentable sur $D(a, \rho_a)^+$ par une série de Taylor en $(x - a)$) si et seulement si $f(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n(f) \binom{x}{n}$ et $\limsup |\lambda_n(f)|^{1/n} < 1$.*

On définit la cloture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note $\overline{\mathbb{Q}_p}$. La valeur absolue p-adique s'étend de manière unique à $\overline{\mathbb{Q}_p}$ si l'on impose $|p| = p^{-1}$ ([1], [32]). Mais $\overline{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas complet pour cette valeur absolue. On complète donc $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et l'on obtient un corps complet et algébriquement clos, $\mathbb{C}_p$.

Le corps $\mathbb{C}_p$ est un bon corps pour manipuler les séries de Taylor. Le principe du maximum y est valide ainsi que le théorème de Liouville (cf. [1]). On suppose que l'on a choisi une fois pour toutes une plongement de la cloture algébrique, $\overline{\mathbb{Q}}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}_p$. On note encore $|\cdot|$ la valeur absolue sur $\mathbb{C}_p$ qui prolonge la valeur absolue p-adique de $\mathbb{Q}_p$.

Nous allons donner maintenant un critère du à Y. Amice [3] qui relie certaines propriétés de congruences de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et prolongement analytique p-adique de sa fonction génératrice $Y = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Auparavant nous allons donner quelques définitions.

Définition 1.1 ([1], [37]) *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}_p$. On dit que F est un élément analytique (p-adique) sur $\mathcal{D}$ si et seulement si F est limite uniforme sur $\mathcal{D}$ d'une suite de fractions rationnelles $F_n(X) \in \mathbb{C}_p(X)$ sans pole dans $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}$ n'est pas borné, on dit que F est un élément analytique sur $\mathcal{D}$ nul à l'infini si F est un élément analytique sur $\mathcal{D}$ et si $\lim_{\substack{|X| \to \infty \\ X \in \mathcal{D}}} |F(X)| = 0$. On note $\mathcal{H}(\mathcal{D})$, resp. $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$, l'espace des éléments analytiques sur $\mathcal{D}$, resp. nuls à l'infini.*

On note $D(a, r)^+ = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| \leq r\}$ et $D(a, r)^- = \{x \in C_p; |x - a| < r\}$ pour $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

Définition 1.2 ([37]) *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}_p$, on dit que $\mathcal{D}$ est un quasi-connexe si, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et pour tout $y \in \mathcal{D}$ il existe une suite finie de réels $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < |x - y|$ tels que si $x \notin \mathcal{D}$ et $|z - x| < |x - y|$ alors il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $|z - x| = r_i$.*

Dans les exemples on considèrera souvent des quasi-connexes de la forme $\mathcal{D} = D(a,r)^+ - \cup_{i=1}^n D(a_i,r_i)^-$ où $a_i \in D(a,r)^+$ et $r_i \leq r$.

Définition 1.3 ([1] ou [37]) *Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série de Taylor de $\mathbb{C}_p[[X]]$ convergeant sur $D(0,1)^-$ et soit $\mathcal{D} \supset D(0,1)^-$ un quasi-connexe. On dit que F est prolongeable en un élément analytique (p-adique) sur $\mathcal{D}$ s'il existe un élément analytique sur $\mathcal{D}$, noté encore F, dont la restriction à $D(0,1)^-$ coincide avec F.*

L'intéret de cette définition est qu'il y a unicité de prolongement analytique à $\mathcal{D}$, cf. [37].

Théorème 3 (Amice [3]) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ telle que $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

ii) la série de Taylor $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est prolongeable en un élément analytique sur $\mathbb{C}_p - D(1,1)^-$, nul à l'infini.

□ On notera $\mathcal{D} = \mathbb{C}_p - D(1,1)^-$. Si $F \in \mathcal{H}_0(\mathcal{D})$ alors F est limite uniforme sur $\mathcal{D}$ d'une suite de fractions rationnelles, F_n, ayant toutes leurs poles dans $D(1,1)^-$.

On sait, cf. [1] ou [37], que:

$$F \in \mathcal{H}_0(\mathcal{D}) \iff \exists\ (\lambda_n)_{n\geq 0}; \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0 \text{ et } F(X) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \frac{X^n}{(1-X)^{n+1}}$$

De là on tire que, si $|X| < 1$,

$$F(X) = \sum_{m\geq 0} X^m \sum_{k\geq 0} \lambda_k \binom{m}{n}$$

Comme $\lim_{k\to\infty}.|\lambda_k| = 0$, il existe une unique fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$, notée f, telle que $f(x) = \sum_{k\geq 0 \lambda_k} \binom{x}{k}$ et donc $F(X) = \sum_{m\geq 0} f(m) X^m$ si $|X| < 1$. La réciproque est immédiate. □

1.0.1 Remarque

Dire que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ revient à dire que les valeurs aux entiers ,$f(n)$, de la fonction f sont périodiques modulo p^h, pour tout entier $h \in \mathbb{N}$. Ce théorème se généralise de la manière suivante.

Théorème 4 (Robba [37]) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}_p[[X]]$ *soit un élément analytique sur* $D(0,1)^-$ *est que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit p-presque périodique (ou bien ultimement périodique modulo* p^h *pour tout* $h \geq 0$*), c'est dire que :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ et } T \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall\, n \geq n_0,\ |a_n - a_{n+T}| \leq \varepsilon.$$

□ Une fraction rationnelle sans pole dans $D(0,1)^-$ vérifie le théorème précédent par application du critère d'Amice, après décomposition en éléments simples. En effet $P_n(X) = \sum_{i,k} \frac{\lambda_{i,k,n}}{(1 - e_{i,n}X)^k} \in \mathbb{C}_p(X)$ avec $|e_{i,n}| \leq 1$. Si $|e_{i,n}| = 1$ alors:

$$\forall\ h \in \mathbb{N}, \quad \exists\ r \text{ et } r' \in \mathbb{N} \text{ tels que } |e_{i,n}^{(p^r-1)p^{r'}} - 1| \leq p^{-h}$$

Donc si $P_n(X) = \sum_{m\geq 0} a_{m,n} X^m$ pour $|X| < 1$, la suite $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ est clairement presque périodique. On conclut par passage à la limite pour les éléments analytiques sur $D(0,1)^-$.

Si, maintenant, on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-presque périodique, on a avec les notations du théorème:

$$F(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{a_0 - 1} X^{n_0 - 1} + \\ X^{n_0} \frac{a_{n_0} + a_{n_0+1} X + \ldots + a_{n_0+p^h-1} X^{p^h-1}}{1 - X^T} + \overline{\varepsilon G(X)}$$

où $\sup_{X\in D(0,1)^-} |G(X)| \leq 1.$ □

On voit donc que montrer qu'une suite est p-presque-périodique équivaut à montrer que sa fonction génératrice est un élément analytique p-adique sur $D(0,1)^-$. En fait, en regardant les endroits où la série génératrice $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est prolongeable analytiquement, on peut préciser la liaison qui existe entre ε, n_0 et T. Ceci repose sur le théorème de Mittag-Leffler p-adique (cf. [37]), que nous allons donner sans démonstration après la définition suivante:

Définition 1.4 (Robba [37]) *Soit* $\mathcal{D}$ *un quasi-connexe de* $\mathbb{C}_p$*. Un disque ouvert* $T = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| < r_T\}$ *est un trou de* $\mathcal{D}$ *si* $T \subset \mathbb{C}_p - \mathcal{D}$ *et si* T *est maximal pour la relation d'inclusion. On note* $\mathcal{T}$ *la famille des trous (ouverts) de* $\mathcal{D}$*. Si* $\mathcal{D}$ *est borné, on admet comme trou le* disque ouvert de centre l'infini $\mathbb{C}_p - D(a,R)^+$ *où* $a \in \mathcal{D}$ *et* $R = \inf_r\{r; \mathcal{D} \subset D(a,r)^+\}$.

Exemple: Si $\mathcal{D} = D(0,1)^-$ les trous de $\mathcal{D}$ sont le disque ouvert de centre l'infini et de "rayon 1", $\mathbb{C}_p - D(0,1)^+$, et tous les disques $D(\alpha,1)^-$ où les α forment un système complet de représentants de $\mathcal{O}_p/\mathfrak{M}_p$ où $\mathcal{O}_p$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ (i.e. $\mathcal{O}_p = D(0,1)^+$) et $\mathfrak{M}_p$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_p$ (i.e. $\mathfrak{M}_p = D(0,1)^-$). On peut choisir par exemple pour les α toutes les racines primitives de l'unité d'ordre premier à p.

Théorème 5 (de Mittag-Leffler p-adique; Robba [37]) *Soit, F, un élément analytique sur le quasi-connexe $\mathcal{D}$, soit $\mathcal{T}$ la famille des trous de $\mathcal{D}$. Il existe pour chaque $T \in \mathcal{T}$ un unique élément analytique F_T sur $\mathbb{C}_p - T$, nul à l'infini, tel que $F - F_T$ se prolonge analytiquement dans T. En outre, on a $F = \sum_{T\in\mathcal{T}} F_T$ la somme convergeant uniformément sur $\mathcal{D}$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies. On a de plus*

$$\|F\|_{\mathcal{D}} = \sup_{X\in\mathcal{D}} |F(X)| = \sup_{T\in\mathcal{T}} \sup_{X\in\mathbb{C}_p-T} |F(X)| = \sup_{T\in\mathcal{T}} \|F\|_{\mathbb{C}_p-T}$$

Comme application immédiate on a le résultat suivant qui montre le lien entre la géométrie du quasi-connexe sur lequel F se prolonge et la presque périodicité de la suite a_n.

Corollaire 1 *Pour que $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ soit un élément analytique sur $\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} D(i^{-1},1)^-$ nul à l'infini, il faut et il suffit que les suites $m \to a_{i+m(p-1)}$ soient pour $1 \leq i \leq p-1$ la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$.*

□ D'après le théorème de Mittag-Leffler, on a $F = F_1 + \ldots + F_{p-1}$ où $F_i \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C}_p - D(i^{-1},1)^-)$, et $F_i(X) = \sum_{k\geq 0} \lambda_{i,k} \frac{(Xi^{-1})^k}{(1-Xi^{-1})^{k+1}}$ avec $\lim_{k\to\infty} |\lambda_{i,k}| = 0$, le résultat est alors immédiat grace au critère d'Amice et au petit théorème de Fermat. □

La théorie des éléments analytiques fournit un cadre et un langage agréable pour le traitement des suites d'entiers p-presque périodiques.

2 Propriétés fonctionnelles et congruences.

On peut remarquer que beaucoup de fonctions génératrices exponentielles (resp. génératrices ordinaires) des suites classiques de nombres satisfont une équation differentielle algébrique (voir les exemples ci-après). Ce type de propriété impose a priori des limitations assez sévères sur les dominateurs des nombres en cause. En effet, soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[X]]$ où $\overline{\mathbb{Q}}$ est la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 6 (Sibuya-Sperber [38]) *Si $F \in \mathbb{Q}[[X]]$ satisfait une équation différentielle algébrique (non triviale), alors F possède un disque de convergence non trivial pour toute valeur absolue non archimédienne v_p de $\mathbb{Q}$.*

La signification de ce théorème est la suivante. Si p est le nombre premier associé à v_p, [42] et si $F \in \mathbb{Q}[[X]]$ alors le dénominateur de a_n (écrit sous forme irréductible) contient p au plus à la puissance $rn + t$ où $r, t \in \mathbb{R}_+$ sont indépendants de n.

Ce théorème généralise les résultats classiques de Eisenstein et Hurwitz rappelés ci-après.

Théorème 7 (d'Eisenstein, [23]) *Si la série $F(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[X]]$ représente une fonction algébrique, alors il existe un $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell_0^n c_n \in \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}$. En outre, il existe $c > 0$ tel que, ou bien $c_n = 0$, ou bien $|c_n|_\infty \geq c^n > 0$, où $|\ |_\infty$ est une valeur absolue archimédienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Théorème 8 (Hurwitz, [28]) *Si la série $F(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \in \mathbb{Q}[[X]]$, satisfait une équation différentielle algébrique, il existe $h(s) \in \mathbb{Z}[s]$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si un nombre premier p divise le dénominateur de c_n pour $n \geq n_0$ alors p divise $h(n_0)\, h(n_0 + 1) \ldots h(n)$.*

Nous donnons maintenant un résultat plus précis du à Fujiwara qui s'applique assez bien aux les suites de nombres provenant de l'analyse combinatoire ou de l'arithmétique et, en particulier, des suites de nombres provenant de dénombrements sur le groupe symétrique ou de nombres provenant de valeurs en certains points de séries de Dirichlet ayant une signification arithmétique.

Théorème 9 (Fujiwara, [25]) *Soit $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ un polynome à coefficients entiers rationnels et soit $y = f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$ avec $a_n \in \mathbb{Z}$.*

Si y vérifie l'équation différentielle $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ et si

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\,(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))\Big|_{x=0} = a$$

avec $(a, p) = 1$, alors la série de Taylor $g(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est un élément analytique p-adique sur $D(0,1)^- \subset \mathbb{C}_p$; autrement dit, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est p-presque périodique.

□ On a $y^{(k)} = f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} a_n \dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}$. De $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$ on tire: $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \cdot y^{n+1} + \dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \cdot y^{(n)} + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ ce que l'on peut écrire $P(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\,y^{(n+1)} = Q_0(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$. De là on tire

$$\begin{aligned}
P\cdot y^{(n+2)} &= \frac{d}{dx}(Q_0) - y^{(n+1)}\frac{dP}{dx}\\
&= Q_1(x,y,y',\ldots,y^{(n+1)})\\
P\cdot y^{(n+3)} &= \frac{d}{dx}(Q_1) - y^{(n+2)}\frac{dP}{dx}
\end{aligned}$$

et donc $P^2\cdot y^{(n+2)} = Q_2(x,y,\ldots,y^{(n+1)})$ et par récurrence $P^k\cdot y^{(n+k+1)} = Q_k(x,y,\ldots,y^{(n+1)})$.

On remarque que si $f(x) = a_0 + a_1\dfrac{x}{1!} + \ldots + a_n\dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ avec $a_n \in \mathbb{Z}$ alors $(f(x)-a_0)^m = f(x)^m - mf(x)^{m-1}a_0 + \ldots + (-1)^m a_0^m \equiv 0$ modulo $m!$, où la congruence est à prendre au sens suivant:
Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n\frac{x^n}{n!}$ et $h(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n\frac{x^n}{n!}$ avec a_n et $b_n \in \mathbb{Z}$, alors la congruence $f \equiv h \pmod m$ équivaut par définition à $a_n \equiv b_n \pmod m$ pour tout $n \geq 0$.

Il faut donc montrer que si $a_0 = 0$ alors $f^m(x) \equiv 0 \pmod{m!}$. On montre ceci par récurrence. C'est vrai pour $m = 1$. Supposons que ce soit vrai pour $m-1$. Alors $\dfrac{d}{dx}f^m(x) = mf'(x)\,f^{m-1}(x)$ et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que les séries exponentielles forment une algèbre.

Donc:

$$Q_k(x,y,y',\ldots,y^{(n+1)}) \equiv R_k(x,y,y,y',\ldots,y^{(n+1)}) \pmod m$$

où $R_k \in \mathbb{Z}[x,y,y',\ldots,y^{(n+1)}]$ est de degré $m-2$ au plus en chacune des variables et ses coefficients sont modulo m. On appelle un tel polynome un polynome réduit. Le nombre de polynomes réduits distincts est fini et au plus $N-1$. Donc pour tout k, on a:

$$P^N\cdot y^{(n+k+1)} = Q_k(x,y,\ldots,y^{(n+1)}) \pmod m$$

où $\overline{R}_k$ est un polynome réduit. Il existe donc un i, $1\leq i\leq N-1$, tel que $\overline{R}_i(x,y,\ldots,y^{(n+1)}) = \overline{R}_N(x,y,\ldots,y^{(n+1)})$

Donc $P^N\cdot y^{(n+N+1)} \equiv P^N\,y^{(n+i+1)} \pmod m$. Comme on a supposé que $P(x,y,y',\ldots,y^{(n+1)})\Big|_{x=0} = a$ avec $(a,p) = 1$ on en déduit que $y^{n+N+1)} \equiv y^{(n+i+1)} \pmod{p^h}$ si l'on a choisi $m = p^h$. Il est alors immédiat que la suite a_n est p-presque périodique. $\square$

On voit apparaitre dans ce théorème la relation une série génératrice exponentielle ayant de bonne propriétés fonctionnelles et la série génératrice ordinaire ayant de bonnes propriétés de prolongeabilité analytique p-adique. Pour exploiter cette relation, on introduit la transformation de Laplace formelle.

Définition 2.1 (cf. [14]) *Soit* $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \in K[[X]]$ *où* K *est un surcorps de* $\mathbb{Q}$. *On pose* $\mathcal{L}(\widetilde{F}(X)) = F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$. *On appelle l'application* $\mathcal{L}$, *la transformation de Laplace formelle.*

Lemme 1 (cf. [7]) *La transformation de Laplace formelle possède les propriétés suivantes :*

i) $\mathcal{L}$ *est continue pour la topologie* X*-adique,*

ii) $\mathcal{L}(e^{aX}) = \dfrac{1}{1-aX}$

iii) si $\mathcal{L}(\widetilde{F}(X)) = F(X)$ *alors* $\mathcal{L}(e^{aX}\widetilde{F}(X)) = \dfrac{1}{1-aX}F(\dfrac{X}{1-aX})$

iv) $\mathcal{L}\Big(\dfrac{d}{dx}X\dfrac{d}{dX}F(X)\Big) = \dfrac{d}{dX}(F(X))$.

□ Ces propriétés sont évidentes, nous allons seulement démontrer iii). On pose $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{X^n}{n!}$, il vient :

$$e^{aX}\,\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k n_{n-k}\binom{a}{k}\right)\frac{X^n}{n!}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{aX}\widetilde{F}(X)) &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k n_{n-k}\binom{n}{k}\right)X^n \\
&= \sum_{n\geq 0} b_n \sum_{k\geq 0} X^{n+k} a^k \binom{n+k}{k} \\
&= \sum_{n\geq 0} b_n \frac{X^n}{(1-aX)^{n+1}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemme 2 *Soit* $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \in K[[X]]$, *on peut écrire de manière unique* $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} b_n (e^X - 1)^n$ *avec* $b_n \in K$.

□ C'est clair car $T = e^X - 1$ est une uniformisante locale de $K[[X]]$. □

Le théorème suivant est la clef des applications.

Théorème 10 *Soit* $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}_p[[X]]$. *Il existe une suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{C}_p$ *telle que l'on ait formellement* $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} b_n(e^X-1)^n$. *On pose* $T = e^X - 1$ *et* $\widetilde{G}(T) = \sum_{n\geq 0} b_n T^n$. *On pose* $F(X) = \mathcal{L}(\widetilde{F}(X)) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *et* $G(T) = \mathcal{L}(\widetilde{G}(T)) = \sum_{n\geq 0}(n!)\, b_n T^n$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $F(X)$ *est un élément analytique p-adique sur* $D(0,1)^-$ *;*

ii) $G(T)$ *est un élément analytique p-adique sur* $D(0,1)^-$.

Montrons tout d'abord i) $\Rightarrow$ ii).

Soit F_n une fraction rationnelle de $\mathbb{C}_p(X)$ approchant F uniformément sur $D(0,1)^-$. On décompose F_n en élément simple et on est donc amené à étudier $f_k(X) = \frac{1}{(1-aX)^k}$ avec $|a| \leq 1$, et $h_k(X) = X^k$, $k \in \mathbb{N}$. On a $f_1(X) = \frac{1}{1-aX}$ et $f_k(X) = \frac{1}{k!}\, f_k(X) = \frac{1}{k!}\, a^{-k+1} \frac{d^{k-1}}{dX^{k-1}}(f_1(X))$. Or $\tilde{f}_1(X) = e^{aX} = (e^X - 1 + 1)^a$ donc $\tilde{f}_1(X) = \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n} (e^X-1)^n$ et donc $\tilde{g}_1(T) = \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n}\, t^n$, $g_1(T) = \sum_{n\geq 0} a(a-1)\ldots(a-n+1)\, T^n$ avec $|a| \leq 1$.

Or $a - k - p^h \equiv a - k \pmod{p^h \mathcal{O}_p}$ où $\mathcal{O}_p$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$, et donc, si $n = rp^h + q$ avec $0 \leq q \leq p^h - 1$, on a :

$$a(a-1)\ldots(a-n+1) \equiv \\ a(a-1)\ldots(a-q+1)\{a(a-1)\ldots(a-p^h+1)\}^r \pmod{p^h}$$

et donc modulo $p^h\mathcal{O}_p[[T]]$:

$$\begin{aligned} g_1(T) &\equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{p-h-1} a(a-1)\ldots(a-n+1)T^n \sum_{r\geq 0}(a(a-1)\ldots(a-p^h+1))^r T^{rp^h} \\ &\equiv \sum_{n=0}^{p^h-1} a(a-1)\ldots(a-n+1)\, T^n \, \frac{1}{1-a(a-1)\ldots(a-p^h+1)\, T^{p^h}} \end{aligned}$$

Raisonnons par récurrence sur k. On a montré que $g_1(T) \in \mathcal{H}_0(D(0,1)^-)$, supposons que $g_{k-1} \in \mathcal{H}_0(D(0,1)^-)$, on a:

$$\tilde{f}_k(X) = \frac{1}{ka}\frac{d}{dX} X \frac{d}{dX}(\tilde{f}_{k-1}(X))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{ka}\,\frac{d}{dX}\,X\,\frac{d}{dX}\,\sum_{n\geq 0} b_n(k-1)\,(e^X-1)^n \\
&= \frac{1}{ka}\,\frac{d}{dX}\,\sum_{n\geq 0}(b_{n+1}(k-1)\cdot(n+1)+n\cdot b_n(k-1))\,(e^X-1)^n \\
&= \frac{1}{ka}\,\sum_{n\geq 0}\big\{(n+1)\,b_{n+1}(k-1)+nb_n(k-1)\big\}(e^X-1)^n + \\
&\qquad +\frac{1}{ka}\,X\,\sum_{n\geq 0}\big\{(n+2)\,(n+1)b_{n+2}(k-1)+((n+1)^2+ \\
&\qquad +n(n+1))b_{n+1}(k-1)+n^2\,n_n(k-1)\big\}(e^X-1)^n.
\end{aligned}$$

On pose $A_n = \dfrac{1}{ka}((n+1)\,b_{n+1}(k-1)+nb_n(k-1)$ et
$B_n = \dfrac{1}{ka}((n+2)\,b_{n+2}(k-1)+((n+1)^2+n(n+1)\,b_{n+1}(k-1)+n^2 b_n(k-1))$.

Il est clair que $\tilde{g}_k(T) = \sum_{n\geq 0} A_n T^n + \mathrm{Log}(1+T)\sum_{n\geq 0} B_N T^n$ et donc $g_k(T) = \sum_{n\geq 0}(n!)A_n T^n + \sum_{n\geq 0} T^n \sum_{n=0}^{n=1}(k!)((n-k-1)!)\,\binom{n}{k}\,B_k$.

Les suites $n \to (n!)\,A_n$ et $k \to (k!)\,B_k$ sont p-presque périodiques, donc la suite $n \to C_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k!)\,((n-k-1)!)\,\binom{n}{k}\,B_k$ l'est aussi. En effet la suite $k \to k!$ tend vers zéro p-adiquement, et la suite $n \to \binom{n}{k}$ est p-presque périodique.

On a donc montré que $g_k \in \mathcal{H}(D(0,1)^-)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il reste donc à étudier le cas de X^n. Or on a $X = \mathrm{Log}(e^X-1+1) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n}\,(e^X-1)^n$ et la suite $n \to (-1)^n(n-1)!$ est presque périodique.

Par récurrence, on montre alors aisément que si $X^k = \sum_{n\geq 0} c_n(e^X-1)^n$ alors la suite $n \to (n!)c_n$ est presque-periodique. On conclut alors que les fractions rationnelles satisfont ii).

Les éléments analytiques vérifient ii) car $F \equiv F_n \pmod{p^h\mathcal{O}_p[[X]]}$ entraine $G(T) \equiv G_n(T) \pmod{p^h\mathcal{O}_p[[T]]}$.

Montrons maintenant que ii) $\Rightarrow$ i). On a $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} b_n(e^X-1)^n$ et donc $F(X) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{(n!)\,X^n\,b_n}{(1-X)\,(1-2X)\ldots(1-nX)}$. Comme la suite $n \to (n!)\,b_n$ est p-presque périodique on a:

$$\forall\, h \in \mathbb{N}\ \exists\, N \text{ et } \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall\, n \geq N,\ |n!\,b_n - (n+m)!\,b_{n+m}| \leq p^{-h}.$$

On a $F(X) \equiv F_h \pmod{p^h \mathcal{O}_p[[X]]}$ où

$$F_n(X) = \sum_{n=0}^{s-1} b_n \frac{n!\,X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} +$$

$$+ \sum_{n=s}^{s+mp^k-1} \frac{b_n\, n!\,X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} \sum_{r\geq 0} \frac{X^{rmp^h}}{((1-X)\dots(1-(mp^h-1)X))^r}$$

$$F_n(X) = \sum_{n=0}^{s-1} b_n \frac{n!\,X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} +$$

$$+ \sum_{n=s}^{s+mp^k-1} \frac{b_n\, n!\,X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} \cdot \frac{(1-X)\dots(1-(mp^h-1)\,X)}{(1-X)\dots(1-(mp^h-1)X) - X^{mp^h}}$$

et donc $F_h(X)$ est une fraction rationnelle sans pole dans $D(0,1)^-$, d'où le théorème. □

2.0.2 Remarque

Un cas particulièrement agréable est celui où la suite $n \to n!\,b_n$ a pour limite p-adique zéro. Ce cas est fréquent pour les nombres définis combinatoirement ou arithmétiquement (cf. ci-après).

3 Suites classiques de nombres.

Nous allons montrer sur quelques exemples comment utiliser les techniques indiquées ci-dessus.

Proposition 1 (cf [26]) *Soit g_n les nombres définis par la série génératrice exponentielle,* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n \frac{X^n}{n!} = \frac{1}{2-e^X}$.

On a $g_{n+(p-1)p^h} \equiv g_n \pmod{p^h}$ pour $n \geq h$. Autrement dit $\sum_{n\geq 0} g_n X^n$ est un élément analytique p-adique sur $\displaystyle D(0,1)^+ - \bigcup_{i=1}^{p-1} D(i,1)^-$.

□ Ces nombres ont une interprétation combinatoire. Ils comptent les arrangement préférentiels ou partitions ordonnées d'un ensemble, cf [54] On a:

$$\widetilde{F}(X) = \frac{1}{1+(1-e^X)} = \sum_{n\geq 0} (e^X - 1)^n$$

ici $b_n = 1$. Donc:

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{n!\,X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{(1-kX)}$$

De là on déduit que:

$$F(X) \equiv F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!\,X^k}{(1-X)\dots(1-kX)} \pmod{n!\mathbb{Z}[[X]]}$$

et donc $g_r \equiv \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} \pmod{n!}$. Le petit théorème de Fermat donne alors les congruences annoncées. D'autre part, on a

$$(1-X)\dots(1-(n-1)X)\sum_{n\geq 0} g_n X^n \equiv$$
$$\sum_{m=0}^{n-1} m!\,X^m(1-(m+1)X)\dots(1-(n-1)X)$$

d'où des relations de récurrence mod$(n!)$ entre les g_n. □

3.0.3 Remarque 1

Les relations de récurrence mod$(n!)$ s'interprètent dans ce cadre par le fait que la série génératrice des g_n est une limite uniforme de fractions rationnelles que l'on connait explicitement.

3.0.4 Remarque 2

On constate que $Y = F(X) = (2-e^x)^{-1}$ vérifie l'équation différentielle algébrique $Y' = 2Y^2 - Y$.

Théorème 11 (Kubota & Leopoldt, [33] ou [29]) *Soit $0 \leq i < p-1$ et soit B_n le n-ième nombre de Bernoulli.*

La suite $m \to (1-p^{i+m(p-1)-1})B_{i+m(p-1)}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ (et meme localement analytique).

□ On définit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} B_n\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x-1} = \sum_{i=0}^{p-1} -\frac{xe^{ix}}{e^{px}-1}$ et donc

$\displaystyle\sum_{n\geq 0}(1-p^{n-1})B_n\frac{x^n}{n!} = \sum_{i=1}^{p-1} -\frac{xe^{ix}}{e^{px}-1} = \sum_{i=1}^{p-1} -p^{-1}\,\frac{e^{ix}\,\mathrm{Log}(1+e^{px}-1)}{e^{px}-1}$ et donc

$\displaystyle\sum_{n\geq 0}(1-p^{n-1})B_n\,x^n = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\frac{p^{n-1}n!\,x^n}{(1-ix)\dots(1-(i+np)\,x)} = F(X),$

il est alors facile de voir que $F \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} D(i,1)^-)$ et le corollaire 1 donne le résultat. (cf. [5]). $\square$

Proposition 2 (cf. [10]) *Soit $A_n(t)$ le n-ième polynome Eulérien défini par $\sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{-t+e^{x(t-1)}}$. Soit $A_n^*(t)$ les fractions rationnelles définies par $A_n^*(t) = \frac{tA_n(t)}{(t-1)^{n+1}} - p^n\,\frac{t^p A_n(t^p)}{(t^p-1)^{n+1}}$. Alors pour $n \equiv i \pmod{p-1}$ la suite $n \rightarrow A_n^*(t)$ est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction continue p-adique de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Q}(t)\otimes\mathbb{Q}_p$.*

$\square$ Een effet un calcul élémentaire (cf. [10]) donne:

$$\sum_{n\geq 0} A_n^*(t)\frac{v^n}{n!} = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{n\geq 0} e^{iv}\,\frac{t^{p-i}}{t^p-1}\left(\frac{e^{pv}-1}{t^p-1}\right).$$

La suite du calcul se mène comme pour les nombres de Bernoulli. $\square$

Proposition 3 (cf. [26]) *Soit $\widetilde{F}(X) = \sum_{n\geq 0} t_n\frac{x^n}{n!} = \exp\left(x+\frac{x^2}{2}\right)$. Alors $F(x) = \sum_{n\geq 0} t_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{2n!}{2^n\,n!}\,\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}$ et donc la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est la restriction, si p 2, d'une fonction continue p-adique de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ (et meme localement analytique, cf. théorème 2). (Si $p=2$ on peut donner des congruences modulo 2^h entre les t_n cf. [4]).*

$\square$ Les nombres t_n ont une interprétation combinatoire. Ils comptent le nombre de partitions d'un ensemble en blocs de taille 1 ou 2, cf. [44]. On a $\widetilde{F}(x) = e^x\,\widetilde{G}(x)$ où $\widetilde{G}(x) = e^{x^2/2}$. Or $\mathcal{L}\,\widetilde{G}(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}(2n!)\,\frac{x^{2n}}{n!}$ et donc d'après le lemme 1:

$$F(x) = \mathcal{L}(\widetilde{F}(x)) = \sum_{n\geq 0}\frac{2n!}{2^n\,n!}\,\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}$$

d'où le résultat grace au critère d'Amice. $\square$

On remarquera que $Y = \exp(x+x^2/2)$ satisfait l'équation différentielle algébrique $Y^2 = Y''Y' - (Y')^2$.

Proposition 4 (cf. [4], [19], [24], [26], [36]) *Soit P_n le n-ième nombre de Bell, défini par la série génératrice $\sum_{n\geq 0} P_n\,\frac{x^n}{n!} = e^{e^x-1} = \widetilde{F}(x)$ vérifient les congruences suivantes. Posons $k(p) = \frac{p^p-1}{p-1}$ alors:*

1. $P_n \equiv P_{n+k(p)p^{h-1}} \pmod{p^h}$ *si* $p \neq 2$ $(h \geq 1)$,

2. $P_n \equiv P_{n+k(2)} \pmod{2}$ *et* $P_n \equiv P_{n+k(2)2^h} \pmod{2^h}$, $h \geq 2$.

En outre $F(x) = \sum_{n \geq 0} P_n x^n$ *est un élément analytique sur le quasi-connexe* $\mathcal{D}_p = \mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} D(\zeta_i, 1)^-$ *où* ζ_i *sont les racines de l'équation* $1 - X^{p-1} - X^p = 0$.

$\square$ On a $\widetilde{F}(x) = e^{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} (e^x - 1)/n!$ donc:

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(1-x)\dots(1-nX)}$$

On montre alors comme au théorème 10 que $F(x) \equiv F_h(x) \pmod{p^h \mathbb{Z}[[x]]}$ où $F_h(x) = \frac{\sum_{n=0}^{p^h-1} x^n(1-(n+1)x)\dots(1-(p^h-1)x)}{(1-x)\dots(1-(p^h-1)x) - x^{p^h}}$.

Une étude précise des F_h et le théorème de Mittag Leffler p-adique donnent le résultat. $\square$

Remarquons que $Y = e^{e^x - 1}$ satisfait l'équation différentielle algébrique $Y' = Y''Y - Y^2$.

Proposition 5 (cf. [26]) *Soit* $F(x) = \sum_{n \geq 0} d_n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}$. *La suite* $n \to (-1)^n d_n$ *est, pour tout nombre premier* p, *la restriction à* $\mathbb{N}$ *d'une fonction continue de* $\mathbb{Z}_p$ *dans* $\mathbb{C}_p$ *(et meme localement analytique de* $\mathbb{Z}_p$ *dans* $\mathbb{C}_p$*).*

$\square$ Les nombres d_n ont une interprétation combinatoire (cf [21]). Ils comptent le nombre de dérangement d'une permutation. On a $\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n \geq 0} n!\, x^n$ et donc d'après le lemme 1, on a : $\mathcal{L}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right) = \frac{1}{1+x} \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{(1+x)^n}$.

Et par conséquent: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n d_n\, x^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n\, n! \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$. Le critère d'Amice donne alors le résultat.

On remarque que $Y = F(x)$ vérifie l'équation differentielle algébrique $Y = -(1-x)Y - (1-x)Y'$. $\square$

On pourrait multiplier les exemples cf. [4] à [14], [17] à [19], [24], [26], [36] ainsi que de nombreux articles non cités ici.

On a le résultat suivant du à Carlitz ([18]) (cf. aussi [11] et [12] pour une autre démonstration).

Théorème 12 (cf. [18]), [12]) *Soit* $X = \sum_{n \geq 1} e_n \frac{Y^n}{n} \in \mathbb{C}_p[[X]]$ *avec* $e_1 = 1$ *et* $|e_n| \leq 1$, *soit* $Y = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{X^n}{n!}$ *la série réciproque de* X. *Soit* $c \in \mathbb{C}_p$ *tel que* $|c^{p-1} - e_p| \leq p^{-1}$, *alors on a :* $Y = \sum_{n \geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n$ *où* $b_n = b_n(c)$, *avec*

i) $b_1 = c^{-1}$

ii) $|b_n| \leq |c|^{-n}$ *si* $1 \leq n \leq 2p - 1$

iii) $|b_n| \leq |c|^{-n} \cdot r_p^{n-1}$ *si* $n \geq 2p$ *où* $r_p = p^{1/(2p-2)}$ *si* p 2 *et* 3, $r_3 = 3^{2/7}$, $r_2 = 2^{3/4}$.

□ La démonstration est basée sur le théorème d'inversion de Lagrange des séries formelles. On peut remarquer que ce théorème est, a priori, en dehors du champ d'application du théorème de Fujiwara. □

Corollaire 2 *Avec les notations et les hypothèses du théorème 12, la série* $F(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ *est un élément analytique sur* $D(0,1)^-$. *Si l'on suppose que* $|e_p| = 1$ *et donc que* $|c| = 1$, *alors* F *est un élément analytique p-adique sur* $D(0,1)^+ - \bigcup_{i=1}^{p-1} D(i^{-1}c^{-1}, 1)^-$.

□

$$F(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{n!\, c^n\, b_n\, X^n}{(1 - cX) \ldots (1 - ncX)}$$

et d'après le théorème 12, $\lim_{n \to \infty} |n!\, b_n| = 0$, le corollaire est immédiat. □

Parmi les applications de ce théorème, on peut citer les nombres de Schroder, cf. [12] et les coefficients des fonctions elliptiques de Weierstrass, cf.[17], [11], [30], [31].

En fait, on peut remarquer que, si l'on a certaines congruences de type *Cartier-Honda* entre les e_n, alors on a de meilleures estimations pour $|b_n|$ et donc de meilleures congruences pour la suite $(a_n)_{n>0}$. Plus précisément, nous allons montrer que si les $e_n \in \mathbb{Z}$ et s'il existe $\omega \in \mathbb{Z}_p$ tel que, pour tout $n > 0$, $e_{np^h} \equiv \omega e_{np^{h-1}} \pmod{p^h \mathbb{Z}_p}$ alors $\sup_{n \in \mathbb{N}}(|b_n|) = 1$ si $|e_p| = 1$. Pour montrer ceci, nous aurons besoin du résultat suivant du à Dwork.

Théorème 13 (cf. [22], [32]) *Soit* K *l'extension maximale non ramifiée de* $\mathbb{Q}_p$ *et soit* σ *le Frobenius sur* K *(i.e.* ω *est l'unique automorphisme du groupe de Galois de* K *sur* $\mathbb{Q}_p$, *tel que, si* $x \in K$ *et* $|x| = 1$ *alors* $|\sigma(x) - x^p| < 1$*).*

Soit $F(X) \in 1 + XK[[X]]$. Soit $A_p = \{x \in K; |x| \leq 1\}$ l'anneau des entiers de K.

Alors $F(X) \in 1 + XA_p[[X]]$ si et seulement si $\dfrac{(F(X))^p}{F^\sigma(X^p)} \in 1 + pX\, A_p[[X]]$ où $F^\sigma(X) = \sum_{n\geq 0} \sigma(a_n) X^n$ si $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n\, X^n$.

□ On peut écrire formellement $F(X) = \prod_{n>0} (1 + b_n\, X^n)$ avec $b_n \in K$. Supposons que $F(X) \in 1 + X \cdot A_p[[X]]$, alors il est clair que $b_n \in A_p$, et donc

$$\frac{(F(X))^p}{F^\sigma(X^p)} = \prod_{n\geq 1} \frac{(1 + b_n X^n)^p}{1 + \sigma(b_n)\, X^{np}} \equiv \prod_{n\geq 1} \frac{1 + b_n^p\, X^{np}}{1 + \sigma(b_n)\, X^{np}} \pmod{pA_p[X]]}$$

Or $\dfrac{1 + b_n^p\, X^n\, p}{1 + \sigma(b_n)\, X^{np}} \in 1 + pX$ par définition de σ et donc $\dfrac{(F(X))^p}{F^\sigma(X^p)} \in 1 + pX\, A_p[[X]]$.

Réciproquement, si la dernière relation est vraie, alors $\dfrac{(1 + b_1\, X)^p}{1 + \sigma(b_1)\, X^p} = 1 + p\alpha_1 X + X^2\, K[[X]]$, avec $|\alpha_1| \leq 1$, et donc $pb_1 = p\alpha_1$ ce qui implique $|b_1| \leq 1$. Par récurrence, on montre que $\dfrac{(1 + b_K\, X^k)^p}{1 + \sigma(b_k)\, X^{kp}} = 1 + p\alpha_k\, X^k + X^{k+1}\, K[[X]]$, avec $|\alpha_k| \leq 1$, et donc $|b_k| \leq 1$. □

Théorème 14 *Soit $Y = \sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{X^n}{n!}$ et $X = \sum_{n\geq 1} e_n \dfrac{Y^n}{n}$ deux séries réciproques de $\mathbb{Q}_p[[X]]$, telles que $e_1 = 1$ et $e_n \in \mathbb{Z}_p$ pour tout entier $n \geq 1$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- *i) On a $|e_p| = 1$ et il existe $\omega \in \mathbb{Z}_p$ tel que, pour tout $n \geq 1$ et tout $h \geq 1$, $e_{np^h} \equiv \omega e_{np^{h-1}} \pmod{p^h \mathbb{Z}_p}$,*
- *ii) Il existe un nombre c de l'extension maximale non ramifiée K de $\mathbb{Q}_p$, tel que $|c| = 1$ et $Y = \sum_{n\geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n$ avec $\sup_{n\geq 1} |b_n| = 1$, et on peut choisir $\omega = \sigma(c)/c$, où σ est le* Frobenius *de K sur $\mathbb{Q}_p$.*

Pour une définition du *Frobenius* cf. [42] ou [48].

□ Démontrons i) ⇒ ii). Nous allons commencer par montrer que, s'il existe $\omega \in \mathbb{Z}_p$ tel que $e_{np^h} \pmod{p^h \mathbb{Z}_p}$, on a en posant $\omega = \sigma(c)/c$, $e^{cX} = 1 + \sum_{n\geq 1} d_n\, Y^n$ avec $|d_n| \leq 1$, $d_1 = c$ (et donc $|d_1| = 1$, car $e_p \equiv \omega \pmod{p}$).

Pour montrer ceci, on va utiliser le théorème 13

$$\frac{\left(\exp(c\sum_{n\geq 1} e_n \frac{Y^n}{n})\right)^p}{\exp\left(\sigma(c)\sum_{n\geq 1} e_n \frac{Y^{np}}{n}\right)} = \exp\left\{\left(\sum_{n\geq 1} p\, c\, e_n \frac{Y^n}{n}\right) - \left(\sum_{n\geq 1} \sigma(c)\, e_n\, \frac{Y^{np}}{n}\right)\right\};$$

posons

$$F(Y) = e^{cX} = \exp\left(c\sum_{n\geq 1} e_n\, \frac{Y^n}{n}\right).$$

On a :

$$\frac{(F(Y))^p}{F^\sigma(Y^p)} = \exp\left\{\sum_{\substack{n\geq 1\\(n,p)=1}} p\, c\, e_n \frac{Y^n}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{ce_{np} - \sigma(c)e_n}{n} Y^{np}\right\},$$

or $\left|\dfrac{ce_{np} - e_n}{n}\right| \leq p^{-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Par conséquent :

$$\frac{(F(Y))^p}{F^\sigma(Y^p)} = \exp\left\{\sum_{\substack{n\geq 1\\(n,p)=1}} p\, c\, e_n \frac{Y^n}{n} + \sum_{n\geq 1} p\alpha_n Y^{np}\right\},$$

avec $|\alpha_n| \leq 1$.

On a donc montré que $\dfrac{(F(Y))^p}{F^\sigma(Y^p)} \in 1 + pX\, A_p[[X]]$ où A_p est l'anneau des entiers de K. D'après le théorème 13 ceci implique que $|d_n| \leq 1$ pour $n \geq 1$ et comme $d_1 = c$, $\omega \equiv e_p \pmod p$, on a aussi $|d_1| = 1$. On tire immédiatement de là que :

$$(*) \qquad Y = \sum_{n\geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n, \quad \text{avec} \quad |b_1| = 1 \quad \text{et} \quad |b_n| \leq 1 \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Réciproquement, supposons que les relations (*) soient vraies, alors $e^{cX} = 1 + \sum_{n\geq 1} d_n\, Y^n$ avec $d_n| \leq 1$ pour $n \geq 1$, et $d_1 = c$, donc $X = c^{-1}\,\mathrm{Log}\Big(1 + \sum_{n\geq 1} d_n Y^n\Big) = \sum_{n\geq 1} e_n \dfrac{Y^n}{n}$ avec $e_n \in \mathbb{Q}_p$ car $a_n \in \mathbb{Q}_p$. Or il est bien clair que $\exp\left(c\sum_{n\geq 1} e_n \dfrac{Y^n}{n}\right) \in 1 + X\, A_p[[X]]$. De là on tire d'abord en dérivant logarithmitiquement que : $c\sum_{n\geq 1} e_n Y^n \in A_p[[X]]$ et donc que $e_n \in \mathbb{Z}_p$, et d'après le théorème 13 $\dfrac{\exp\left(pc\sum\limits_{n\geq 1} e_n \dfrac{Y^n}{n}\right)}{\exp\left(\sigma(c)\sum\limits_{n\geq 1} e_n \dfrac{Y^{np}}{n}\right)} \in 1 + pX\, A_p[[X]]$ ce qui implique que $\dfrac{ce_{np} - \sigma(c)\, e_n}{n} \in pA_p$ et donc $e_{np} - \dfrac{\sigma(c)}{c} e_n \in pn\, A_p$. D'où le théorème en posant $\omega = \sigma(c)/c$. □

Ce théorème est utile pour les congruences entre coefficients de fonctions elliptiques ([17], [30], [31]). Actuellement, il est utilisé dans le sens i) $\Rightarrow$ ii) mais on pourrait l'utiliser dans le sens ii) $\Rightarrow$ i) grace aux travaux de Carlitz.

3.0.5 Remarque 1

Pour une étude de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant des congruences à la *Cartier-Honda* c'est à dire du type: $a_n \equiv a_{np} \pmod{np\mathbb{Z}_p}$ cf. [45],[46], [48], [55], [56].

3.0.6 Remarque 2

Posons $c^{-n}\, a_n^* = \lim\limits_{h\to\infty} c^{-n-(p-1)p^h}\, a_{n+(p-1)p^h}$, la limite étant au sens p-adique. Sous les hypothèses du théorème, la limite existe. Ce théorème traduit alors l'équivalence entre les congruences à la *Cartier-Honda* pour les e_n et le fait que la suite $n \to c^{-n} a_n^*$ est, pour $n \equiv i \pmod{(p-1)}$, la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa [29]. C'est-à-dire que la suite $n \to c^{-i-(p-1)n} a^*_{i+(p-1)n}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la limite uniforme sur $\mathbb{Z}$ d'une suite de polynomes exponentiels, $\sum\limits_{\text{fini}} \lambda_u\, u^s$ où $u \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, $\lambda_u \in \mathbb{C}_p$, $|\lambda_u| \leq 1$, $s \in \mathbb{Z}_p$,cf. [52].

3.0.7 Remarque 3

Dans les propositions 1, 2, 3, 4, 5 on peut facilement améliorer le résultat en remarquant que la fonction génératrice ordinaire est un élément analytique sur un ensemble plus grand que celui indiqué dans le texte.

3.0.8 Remarque 4

Les congruences citées dans l'article peuvent être souvent être obtenues par d'autres méthodes et en particulier des méthodes combinatoires, cf. [47], [24], [26], [49],

References

[1] Y. AMICE, *Nombres p-adiques*, P.U.F. collection Sup., le Mathématicien, Paris, 1975.

[2] Y. AMICE, *Interpolation p-adiques*, Bull. Soc. Math. France t. 92, 1964, p. 117-180.

[3] Y. AMICE & J. FRESNEL, *Fonctions zéta p-adiques des corps de nombres abéliens réels*, Acta Arith., Warszawa t. 20, 1970, p. 353-384.

[4] D. BARSKY, *Analyse p-adique et nombres de Bell*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, série A, p. 1257-1259.

[5] D. BARSKY, *Analyse p-adique et nombres de Bernoulli*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, série A, p. 1069-1072.

[6] D. BARSKY, *On Morita's p-adic Γ function*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. vol. 89, 1981, p. 23-27.

[7] D. BARSKY, *Analyse p-adique et nombres de Bell*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, Amice-Robba, 3ème année, 1975-1976, exposé n°8.

[8] D. BARSKY,*Fonctions génératrices et congruences*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17ème année, 1975-1976, exposé n°21.

[9] D. BARSKY,*Congruences de coefficients de série de Taylor*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, Amice-Robba, 3ème année, 1975-1976, exposé n°17.

[10] D. BARSKY, *Polynomes Eulériens mod p^h*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, Amice-Robba, 4ème année, 1976-1977, exposé n°11.

[11] D. BARSKY, *Différentielles et congruences*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, Amice-Robba, 4ème année, 1976-1977, exposé n°12.

[12] D. BARSKY, *Congruences pour les nombres de Schroder*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, Amice-Christol-Robba, 6ème année, 1978-1979, exposés n°2 et 4.

[13] D. BARSKY,*Congruences pour les nombres de Genocchi de 2ème espèce*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, Amice-Christol-Robba, 8ème année, 1980-1981, exposé n°34.

[14] D. BARSKY,*Transformation de Cauchy p-adique et algèbre d'Iwasawa*, Math. Ann. t. 232, 1978, p. 255-266.

[15] R. BOJANIC, *A simple proof of Mahler's Theorem on approximation of continuous function of a p-adic variable by polynomials*, Journal of Number theory, vol. 6, 1974, p. 412-415.

[16] S. Caenepeel, *p-adic interpolation of continuous functions*, Groupe d'Étude d'Analyse Ultramétrique, 9e année, 1981-1982, exp. n°25.

[17] L. Carlitz, *Congruences for the coefficient of the Jacobi elliptic function*, Duke Math. J. t. 16, 1949, p. 297-302.

[18] L. Carlitz, *Congruences for the coefficient of hyperelliptic and related functions*, Duke Math. J. t. 19, 1952, p. 329-337.

[19] L. Carlitz, *Congruences for generalized Bell and Strirling numbers*, Duke Math. J. t. 22, 1955, p. 193-205.

[20] P. Cassou-Noguès, *Application arithmétique de l'étude aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynome*, Ann. Inst. Fourier, t. 31, 1981, p. 1-35.

[21] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, tomes I et II, P.U.F., collection Sup., le Mathématicien, Paris 1970.

[22] B. Dwork, *A deformation theory for the zeta function of a hypersurface*, Proc. of the Int. Congress of Math., Stockholm, 1962, p. 247-259.

[23] G. Eisenstein, *Uber eine allgemeine Eigenschaft der Reihen Entwicklungen aller algebraischen Funktionen*, Preuss. Akad. der Wissenschaften Berlin, 1852, S. 441-443.

[24] Ph. Flajolet, *On congruences and continued fractions for some classical combinatorial quantities*, Discrete Math., vol. 41, 1982, p. 145-153.

[25] M. Fujiwara, *Uber die Periodizitat der Entwicklungs Koeffizienten einer analytischen Funktion nach dem Modul m*, Tohoku Math. J. t.2, 1912, p. 57-73.

[26] I. Gessel, *Congruences for Bell and tangent numbers*, Fibonacci Quaterly, vol. 19, 1981, p.137-144.

[27] A. Hurwitz, *Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique*, Ann. Ec. Norm. Sup., série 3, t. 6, 1889, p. 327-332.

[28] A. Hurwitz, *Uber die Entwicklungskoeffizienten der lemniscatischen Funktionen*, Math. Ann. Bd. 51, 1899, p. 196-226.

[29] K. Iwasawa, *Lectures on p-adic L function*, Annals of Math. Studies n°74, 1972, Princeton University Press.

[30] N. Katz, *The Eisenstein measures and p-adic interpolation*, Amer J. of Math., t .99, 1977, p. 238-311.

[31] N. Katz, *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series*, Ann. of Math., t. 104, 1976, p. 459-571.

[32] N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis and zeta function*, Springer Verlag, G.T.M., n°58, 1977.

[33] T. Kubota & H.W. Leopoldt, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte* 1, Journ. fur die reine und ang. Math. Bd. 214-215, 1964, p. 328-339.

[34] K. Mahler, *An interpolation serie for continuous functions of a p-adic variable*, Jour. fur die reine und ang. Math. Bd. 199, 1958, p. 23-34.

[35] K. Mahler, *Introduction to p-adic numbers and their functions*, Cambridge University Press, 1973.

[36] Ch. Radoux, *Arithmétique des nombres de Bell et analyse p-adique*, Bull. Soc. Math. Belg., t. 29, 1977, p. 13-28.

[37] Ph. Robba, *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n°10, 1973, p. 109-220.

[38] Y. Sibuya & S. Sperber, *Arithmetic properties of power series solutions of algebraic differential equations*, Annals. of Math., t. 113, 1981, p. 111-157.

[39] Y. Sibuya & S. Sperber, *Some new results on power-series solutions of algebraic differential equations*, In Singular perturbations and asymptotics, Academic Press, 1980, p. 379-403.

[40] M. Van der Put, *Algèbres de fonctions continues p-adiques I et II*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Serie A, t.71, 1968, p. 401-420.

Bibliographie complémentaire

[41] V. I. Arnold, *Congruences for Euler, Bernoulli and Springer numbers of Coxeter groups*, Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser Mat, t.56, 1992, p.1129-1133.

[42] J.W.S. Cassels, *Local Fields*, London Math. Soc. Student Texts, n°26, Cambridge University Press, 1986.

[43] S. Chowla, J. Cowles, M. Cowles, *Congruences properties of Apery numbers*, J. of Number Theory, vol. 12, 1980, p. 188-190.

[44] S. Chowla, I. N. Herstein and W. K. Moore, *On recursions connected with symmetric groups I*, Canad. Journal of Math., vol. 3, 1951, p. 328-334

[45] M. Coster, *Congruence properties of coefficients of certain algebraic power series*, Compositio Math., vol. 68, 1988, p. 11-57.

[46] M. Coster, *Supercongruences*, Collection p-adic analysis (Trento 1989), Baldassarri-Bosch-Dwork (Ed), Lectures Notes in Math n°1454, Springer-Verlag 1990.

[47] J. Désarménien, *Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres*, Ann. Scientifiques École Normale Supérieure, quatrième série, t. 10, 1983, p. 271-304.

[48] B. Dwork, G. Gerotto, F. Sullivan, *An Introduction to G-Functions*, Annals of Math. Studies, Study 133, 1994, Princeton Univ. Press, Princeton New-Jersey.

[49] I. Gessel, *Combinatorial proof of congruences*, Coll Enumeration and design (Waterloo Ontario 1982), Acad Press, Toronto Ontario, 1984.

[50] Ph. Robba, *Équations différentielles p-adiques*, Actualités mathématiques, 1994, Hermann, Paris.

[51] W. H. Schrikhof, *Ultrametric Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[52] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Mod-ular Functions of One Variable III, Springer Lectures Notes in Mathematics n°350, Springer-Verlag, 1973.

[53] Ch. Snyder, *Kummer congruences for the coefficients of Hurwitz series*, Acta Arith., t. 40, 1981/82, p. 175-191.

[54] J. Touchard, *Propriétés arithmétiques de certains nombres récurrents*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, (A), vol. 53, 1933, p. 21-31.

[55] P. Th. Young, *Apery Numbers, Jacobi sums and special values of generalized p-adic hypergeometric functions*, Journal of Number Theory, vol. 41, 1992, p. 231-255.

[56] M. Zuber, *Propriétés de congruences de certaines familles classiques de polynômes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 315, 1992, p.205-208.