SÉMINAIRES ET CONGRÈS 9

ACTES DES JOURNÉES MATHÉMATIQUES À LA MÉMOIRE DE JEAN LERAY

(NANTES, 2002)

édités par

Laurent Guillopé

Didier Robert

Société Mathématique de France 2004

L. Guillopé

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR6629, CNRS-Université de Nantes-École centrale de Nantes, Faculté des sciences et des techniques, 2, rue de la Houssinière, F-44322 Nantes cedex 3.

E-mail : laurent.guillope@math.univ-nantes.fr

Url : www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope

D. Robert

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR6629, CNRS-Université de Nantes-École centrale de Nantes, Faculté des sciences et des techniques, 2, rue de la Houssinière, F-44322 Nantes cedex 3.

E-mail : didier.robert@math.univ-nantes.fr

Url : www.math.sciences.univ-nantes.fr/~robert

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 16A24, 16W30, 18D50, 32C30, 32C38, 32Q65, 32S40, 34A12, 35A10, 35A20, 35A27, 35C15, 35C20, 35E05, 35J25, 35Q30, 35S99, 53C15, 53C42, 53D35, 57R17, 58J60, 76B20, 76B99, 76D05.

***Mots clefs*. —** Équation de Navier-Stokes, faisceaux, analyse microlocale, hydrodynamique, problème de Neumann-Kelvin, phase stationnaire, singularités d'hypersurface, problèmes de Cauchy, fonctions de Green, résidus, courbes pseudoholomorphes, opérades, fluides incompressibles, développements asymptotiques.

ACTES DES JOURNÉES MATHÉMATIQUES À LA MÉMOIRE DE JEAN LERAY (NANTES, 2002)

édités par Laurent Guillopé, Didier Robert

Résumé. — Les 17 et 18 juin 2002, le Laboratoire de Mathématiques de Nantes a organisé des journées mathématiques à la mémoire de Jean Leray. À cette occasion le Laboratoire a pris le nom de *Laboratoire Jean Leray.* Ce volume commence par l'exposé d'Yves Meyer qui retrace le parcours scientifique de Jean Leray. Les exposés suivants sont des articles illustrant la plupart des aspects des travaux de J. Leray et montrant l'étendue du spectre de son œuvre. Le lecteur pourra facilement deviner auquel des trois volumes des œuvres complètes se rapporte chacun des articles.

Abstract **(Proceedings of the colloquium dedicated to the memory of Jean Leray, Nantes, 2002)**

On the 17th and 18th of June 2002 the Laboratory of Mathematics of Nantes University (supported by CNRS) has organized a meeting to celebrate the memory of Jean Leray. At this opportunity the Laboratory took the name *Laboratoire Jean Leray.* This volume starts with the lecture by Yves Meyer, which relates the scientific life of Jean Leray. The following lectures are papers illustrating most aspects of scientific works of J. Leray and showing up the wide spectrum of his work. The reader will easily guess to which of the three volumes of the collected papers each paper is linked.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Dans cet article nous considérons le problème suivant. Étant donné un opérateur elliptique à coefficients constants, $P(D)$, dans $\mathbb{R}^n$ ($P(\xi) \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$), et un cône infini Γ dans $\mathbb{R}^n$, quelles sont les conditions pour que la fonction de Green associée $G(x)$ ait un bon comportement asymptotique lorsque $|x| \to \infty$ dans Γ ? Nous présentons une solution à ce problème ainsi que des applications. Ceci est relié à des travaux de Evgrafov et Postnikov.

Soit $(X_{\mathbb{R}}, 0)$ un germe de sous-ensemble analytique réel à l'origine de $\mathbb{R}^N$ de dimension pure $n+1$ ayant une singularité isolée en 0. Soit

$$(f_{\mathbb{R}}, 0) : (X_{\mathbb{R}}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

un germe de fonction analytique réelle ayant une singularité isolée en 0 telle que sa complexifiée $f_{\mathbb{C}}$ s'annule sur le lieu singulier S de $X_{\mathbb{C}}$. Nous supposerons également que la variété analytique réelle $X_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ est orientable.
À chaque $A \in H^0(X_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ nous associons un n-cycle $\Gamma(A)$ (explicitement décrit) dans la fibre de Milnor complexe de $f_{\mathbb{C}}$ en 0 tel que les termes non triviaux dans les développements asymptotiques quand $\tau \to \pm\infty$ des intégrales oscillantes $\int_A e^{i\tau f(x)} \varphi(x)$ soient détectés par la décomposition spectrale de $\Gamma(A)$ par rapport à la monodromie de $f_{\mathbb{C}}$ en 0.

On s'intéresse à la formulation de Neumann-Kelvin du problème d'hydrodynamique navale concernant l'avancement d'un navire dans une mer calme de profondeur uniforme finie. La recherche d'une fonction de Green pour ce problème est ramenée par réduction sur la surface libre à un problème pseudo-différentiel pour lequel on présente un cadre et une méthode de résolution.

Dans cet article, nous écrivons la solution de certains problèmes de Cauchy, avec second membre ramifié autour d'un ensemble analytique de codimension 1, sous une forme intégrale nous permettant d'en déduire le lieu singulier.

Ce texte commence par une analyse de l'article fondamental de Jean Leray sur les équations de Navier-Stokes et un bref survol du problème de la régularité globale. Puis, nous étudions les propriétés lagrangiennes des solutions des équations de Navier-Stokes. Dans une dernière section, nous établissons une estimation qui décrit en particulier l'effet régularisant de l'équation de Navier-Stokes en termes d'analyticité.

La généralisation faite par Leray de la méthode WKB pour la construction de solutions asymptotiques à haute fréquence de systèmes arbitraires d'équations aux dérivées partielles linéaires a permis le traitement de systémes quasilinéaires et l'apparition de propriétés nouvelles comme la distorsion des signaux. La non linéarité est aussi une obstruction à l'existence de solutions globales des systèmes d'évolution. On introduit une condition nulle polarisée, généralisation de la condition nulle de Christodoulou-Klainerman à des systèmes mal posés par suite de l'invariance de jauge. On montre qu'elle conduit à une équation de transport linéaire le long des rayons d'une solution asymptotique. Elle est satisfaite par le modèle standard, mais un terme résiduel dans le cas des équations d'Einstein conduit à une « réaction en retour » sur la métrique de base.

On établit l'existence et l'unicité des solutions dans l'espace de Sobolev anisotrope $H^{1,1/2}$ pour les équations de Navier-Stokes en dimension 2 avec des

données dans $H^{-1,-1/2}$. Nos résultats donnent une preuve élémentaire nouvelle de résultats récents de G. Grubb, tout en les complétant.

Scindement d'associativité et algèbres de Hopf
JEAN-LOUIS LODAY 155

On montre que certaines algèbres associatives dont le produit se scinde en somme de plusieurs opérations et qui sont libres, en un certain sens, pour ces opérations, possèdent une structure d'algèbre de Hopf. On montre que l'opérade des algèbres dendriformes joue un rôle particulier dans ce contexte, puis on donne de nombreux exemples.

Sheaves : from Leray to Grothendieck and Sato
PIERRE SCHAPIRA 173

Nous montrons comment les idées de Leray (théorie des faisceaux) Grothendieck (catégories dérivées) et Sato (analyse microlocale) conduisent à la théorie microlocale des faisceaux qui permet de réduire de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à des problèmes de géométrie microlocale. Les faisceaux sur les topologies de Grothendieck sont de plus un outil naturel pour traiter les conditions de croissance qui apparaissent en Analyse.

Dual elliptic planes
JEAN-CLAUDE SIKORAV 185

Un plan elliptique est un plan projectif complexe équipé d'une structure elliptique E au sens de Gromov (généralisation d'une structure quasi-complexe), qui est positive par rapport à la forme symplectique standard. L'espace V^* des surfaces de degré un tangentes à E (E-droites) est de nouveau un plan projectif complexe. Nous définissons sur V^* une structure de plan elliptique E^*, telle qu'à toute E-courbe on peut associer sa duale dans V^*, qui est une E^*-courbe. En outre, le bidual (V^{**}, E^{**}) est naturellement isomorphe à (V, E).

ABSTRACTS

Jean Leray et la recherche de la vérité
Yves Meyer 1

On the asymptotics of Green's functions of elliptic operators with constant coefficients
Shmuel Agmon 13

In this paper we discuss the following problem. Given an elliptic operator $P(D)$ with constant coefficients in $\mathbb{R}^n$ ($P(\xi) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$) and an infinite cone Γ in $\mathbb{R}^n$, give conditions which ensure that the corresponding Green's function $G(x)$ admits a nice asymptotic behavior as $|x| \to \infty$ in Γ. A solution to the problem is presented and some concrete applications are given. These are related to results by Evgrafov and Postnikov.

Singularités réelles isolées et développements asymptotiques d'intégrales oscillantes
Daniel Barlet 25

Let $(X_{\mathbb{R}}, 0)$ be a germ of real analytic subset in $(\mathbb{R}^N, 0)$ of pure dimension $n+1$ with an isolated singularity at 0. Let

$$(f_{\mathbb{R}}, 0) : (X_{\mathbb{R}}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

a real analytic germ with an isolated singularity at 0, such that its complexification $f_{\mathbb{C}}$ vanishes on the singular set S of $X_{\mathbb{C}}$. We also assume that $X_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{0\}$ is orientable.
To each $A \in H^0(X_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{0\}, \mathbb{C})$ we associate a n-cycle $\Gamma(A)$ (« explicitly » described) in the complex Milnor fiber of $f_{\mathbb{C}}$ at 0 such that the non trivial terms in the asymptotic expansions of the oscillating integrals $\int_A e^{i\tau f(x)}\varphi(x)$ when $\tau \to \pm\infty$ can be read from the spectral decomposition of $\Gamma(A)$ relative to the monodromy of $f_{\mathbb{C}}$ at 0.

We are interested in the Neumann-Kelvin formulation of the marine hydrodynamics problem of a moving ship in a quiet sea of uniform finite depth. Looking for a Green function for this problem we are brought to a reduced pseudo-differential problem on the free boundary, for which we give a framework and a solving method.

In this paper, the solution of some ramified Cauchy problems, with second member ramified around some analytic set, is written under an integral form. This integral form allows us to find the singular locus of the solution.

This text first analyzes the seminal paper of Jean Leray about Navier-Stokes equations. Then we present a brief overview of the problem of global regularity. Then we study lagrangian properties of the solutions of Navier-Stokes equations. In the last section, we establish an estimate which describes the regularization effect of the Navier-Stokes equations in terms of analyticity.

The jump in generality made by Leray for the WKB type construction of high frequency asymptotic solutions of linear partial differential equations has allowed the treatment of arbitrary linear systems of partial differential equations. It also permitted the extension to quasilinear systems, and the appearance of new properties linked to the non linearities, in particular a distorsion of signals. The non linearity of a differential system is also an obstruction to the existence of global solutions of evolution problems. In the case of non linear wave equations on the Minkowski spacetime of dimension 4 it has been discovered by Christodoulou and Klainerman that a "null condition" satisfied by the non linearities leads to global existence results. The equations of the fundamental field equations (standard model, Einstein equations) are quasi linear second order partial differential equations, but not well posed due to gauge invariance. We introduce a "polarized null condition". We show it is satisfied by the standard model, but not quite by the Einstein equations. We construct for both systems asymptotic high frequency solutions with linear transport law along the rays. In the case of Einstein equations the wave inflicts a "back reaction" on the background metric.

We establish existence and uniqueness of solutions in the anisotropic Sobolev space $H^{1,1/2}$ to the two dimensional Navier-Stokes equations with data in $H^{-1,-1/2}$. Our results give a new elementary proof for and extend some of recent results of G. Grubb.

We show that some associative algebras whose product splits up into the sum of several operations and are free, in a certain sense, with respect to these operations, admit a Hopf algebra structure. We show that the operad of dendriform algebras play a crucial role in this context, and we give numerous examples.

We show how the ideas of Leray (sheaf theory), Grothendieck (derived categories) and Sato (microlocal analysis) lead to the microlocal theory of sheaves which allows one to reduce many problems of linear partial differential equations to problems of microlocal geometry. Moreover, sheaves on Grothendieck topologies are a natural tool to treat growth conditions which appear in Analysis.

An elliptic plane is a complex projective plane V equipped with an elliptic structure E in the sense of Gromov (generalization of an almost complex structure), which is tamed by the standard symplectic form. The space V^* of surfaces of degree 1 tangent to E (E-lines) is again a complex projective plane. We define on V^* a structure of elliptic plane E^*, such that to each E-curve one can associate its dual in V^*, which is an E^*-curve. Also, the bidual (V^{**}, E^{**}) is naturally isomorphic to (V, E).

PRÉFACE

Les 17 et 18 juin 2002, le Laboratoire de Mathématiques de Nantes a organisé des journées mathématiques à la mémoire de Jean Leray. Ces journées ont reçu le soutien du CNRS, du Ministère de la Recherche, de l'Université de Nantes et des collectivités locales régionales.

À cette occasion le Laboratoire a pris le nom de *Laboratoire Jean Leray.* Plusieurs raisons ont motivé ce choix. Tout d'abord les premiers thèmes de recherche étudiés à Nantes, à partir des années 1970, ont été d'une part les équations aux dérivées partielles, d'autre part la topologie algébrique, domaines dans lesquels les contributions de Jean Leray ont été très importantes. Ensuite Jean Leray est né à Nantes en 1906, décédé à La Baule en 1998. Enfin notre collègue Pham The Lai, professeur à Nantes de 1967 à 2002, a été l'un de ses élèves.

Françoise Pecker, fille de J. Leray, a accueilli avec enthousiasme notre initiative ; elle a participé à ces journées en compagnie de son mari et de leur fils Arnaud. Elle nous a permis d'inclure dans ce volume la photo de Jean Leray dans le Parc de Sceaux.

Ce volume regroupe une partie des neuf exposés qui ont constitué le programme scientifique de ces journées ; quatre autres articles, en relation avec les travaux de J. Leray, ont été sollicités. L'ensemble des articles ont été choisis par le comité d'organisation des journées, composé de : L. Guillopé, F. Jauberteau, F. Laudenbach, Pham The Lai, D. Robert.

Ce volume commence par l'exposé d'Yves Meyer qui retrace le parcours scientifique de Jean Leray. Les exposés suivants sont des articles illustrant la plupart des aspects des travaux de J. Leray et montrant l'étendue du spectre de son œuvre. Le lecteur pourra facilement deviner auquel des trois volumes des œuvres complètes se rapporte chacun des articles.

Les éditeurs
L. Guillopé et D. Robert

Jean Leray, parc de Sceaux (1985)
avec l'aimable autorisation de Françoise Pecker.