Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 149–164

EXTENSIONS DE DELIGNE POUR LES CROISEMENTS NORMAUX

par

Joël Briançon

Résumé. — Étant donné une connexion holomorphe intégrable sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux, nous en construisons, suivant P. Deligne, un prolongement méromorphe régulier.

***Abstract* (Deligne extension for normal crossings).** — Given an integrable holomorphic connection on the complement of a divisor with normal crossings, we construct, following P. Deligne, a regular meromorphic extension.

Introduction

Dans [**M**], suivant P. Deligne [**D**], B. Malgrange nous explique comment construire une connexion méromorphe régulière sur une variété analytique complexe X, prolongeant une connexion holomorphe (intégrable) donnée sur le complémentaire d'une hypersurface Y de X ; cela permet de montrer « l'essentielle surjectivité » du foncteur de restriction de la catégorie des connexions méromorphes régulières à pôles le long de Y vers la catégorie des connexions holomorphes sur $X - Y$.

Pour obtenir ce résultat, B. Malgrange utilise le théorème global de résolution des singularités (de H. Hironaka), après avoir exhibé un tel prolongement lorsque Y est un diviseur à croisements normaux. Dans ce cours, nous proposons de reprendre et d'expliciter cette dernière construction du « prolongement de Deligne ».

1. Rappels sur les connexions holomorphes

U désigne une variété analytique complexe connexe de dimension n (dans les paragraphes suivants, U sera $X-Y$), $\mathscr{O}_U$ son faisceau structural, Ω^j_U le faisceau-des formes différentielles holomorphes de degré j, d la différentielle de De Rham ; dans les cours

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32S, 14B.
***Mots clefs*.** — Connexions méromorphes régulières.

du CIMPA d'août et septembre 1990, il a été démontré l'équivalence entre les catégories suivantes (nous rappelons seulement la description des objets, les morphismes étant naturels) :

1.1. les fibrés vectoriels holomorphes munis d'une connexion intégrable

Un objet de cette catégorie est donc un couple (F, ∇) formé d'un fibré vectoriel holomorphe F de rang fini, identifié au faisceau de $\mathscr{O}_U$-Modules localement libre de ses sections holomorphes, et d'une connexion intégrable ∇ sur F.

Un morphisme est un morphisme de fibrés qui commute aux connexions. Rappelons qu'une connexion sur F est un morphisme **C**-linéaire :

$$\nabla : F \longrightarrow \Omega^1_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F$$

vérifiant, pour tout $h \in \mathscr{O}_U$ et tout $f \in F$:

$$\nabla(hf) = dh \otimes f + h\nabla(f)$$

L'application ∇ se prolonge naturellement et de manière unique :

$$\nabla^j : \Omega^j_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F \longrightarrow \Omega^{j+1}_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F$$

satisfaisant, pour tout $\omega \in \Omega^j_U$ et $f \in F$:

$$\nabla^j(\omega \otimes f) = d\omega \otimes f + (-1)^j \omega \wedge \nabla(f)$$

La connexion est dite intégrable si $\nabla^1 \circ \nabla = 0$; si tel est le cas,

$$(\Omega^*_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F, \nabla^*)$$

est un complexe, le complexe de De Rham associé à la connexion.

Le faisceau $V = \mathrm{Ker}(\nabla)$ s'appelle le faisceau-des sections horizontales de la connexion. Le théorème fondamental suivant s'obtient à partir du théorème de Cauchy pour les systèmes différentiels holomorphes à une seule variable, avec paramètres (voir par exemple [**GM**] p. 134–139) :

Théorème 1. — *Si (F, ∇) est une connexion intégrable de rang m, le faisceau $V =$* $\mathrm{Ker}(\nabla)$ *de ses sections horizontales est un système local de rang m.*

Rappelons qu'un « système local » est, par définition, un « faisceau localement constant d'espaces vectoriels » ; pour un exposé détaillé sur les systèmes locaux, voir [**MN**] p. 50–62.

Calcul local. — Soit $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_m)$ une base (locale) de F sur $\mathscr{O}_U$; posons : $\nabla(e_j) = \omega_{1,j} \otimes e_1 + \cdots + \omega_{m,j} \otimes e_m$; la matrice de formes de degré un, $\Omega = (\omega_{i,j})$ s'appelle la forme de la connexion dans la base ε. Pour un élément $f = y_1 e_1 + \cdots + y_m e_m$ de F, son image par ∇ est : $\nabla(f) = z_1 e_1 + \cdots + z_m e_m$ où le vecteur colonne Z des composantes s'obtient à partir du vecteur colonne Y des composantes de f par la formule :

$$Z = dY + \Omega Y$$

La connexion est intégrable (on dit aussi « plate ») si et seulement si sa forme dans une base ε vérifie :

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

Les sections horizontales s'obtiennent comme solutions du système différentiel :

$$dY = -\Omega Y$$

Changement de base. — Soit $\varepsilon' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ une autre base de F et $S = (s_{i,j})$ la matrice de passage (holomorphe inversible) de la base ε vers la base ε' :

$$e'_j = s_{1,j}e_1 + \cdots + s_{m,j}e_m$$

la forme Ω' de la connexion dans la nouvelle base est :

$$\Omega' = S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S$$

1.2. Les systèmes locaux. — Un objet de cette catégorie est un système local V sur U d'espaces vectoriels complexes de dimension finie ;

Corollaire 1. — *Le foncteur qui à une connexion intégrable associe ses sections horizontales est une équivalence entre la catégorie des connexions intégrables sur U et la catégorie des systèmes locaux sur U.*

Un foncteur quasi-inverse peut être construit de la façon suivante : à V on associe $F = \mathscr{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} V$ muni de la connexion satisfaisant :$\nabla(h \otimes v) = dh \otimes v$ pour tout h de $\mathscr{O}_U$ et v dans V.

1.3. Les modules différentiels dont le support singulier est vide

Il s'agit donc des $\mathscr{D}_U$ -Modules dont la variété caractéristique est la section nulle du fibré cotangent à U. Le théorème suivant est démontré dans [**GM**] (théorème 4 p. 137) :

Théorème 2. — *Le foncteur qui à un $\mathscr{D}_U$ -Module cohérent M sur U associe la connexion (M, ∇) définie dans tout système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ et toute section locale f de M par :*

$$\nabla(f) = dx_1 \otimes \frac{d}{dx_1}f + \cdots + dx_n \otimes \frac{d}{dx_n}f$$

est une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}_U$ -Modules cohérents sur U ayant un support singulier vide et la catégorie des connexions intégrables sur U.

Un foncteur quasi-inverse se construit ainsi : si (F, ∇) est une connexion intégrable, $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales, f une section locale de F, on pose :

$$\nabla(f) = dx_1 \otimes f_1 + \cdots + dx_n \otimes f_n$$

puis, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{d}{dx_i}f = f_i$$

1.4. Les représentations complexes finies du groupe fondamental

Dans [**MN**] (pp. 55–57) est décrite la façon dont on peut associer à un système local V sur U son groupe de monodromie. Rappelons très brièvement la manière de procéder : tout d'abord, si $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin de U, $\gamma^* V$ est un faisceau constant sur $[0,1]$; on en déduit une flèche naturelle de $V_{\gamma(0)}$ vers $V_{\gamma(1)}$ faisant commuter les isomorphismes entre les sections globales de $\gamma^* V$ sur $[0,1]$, et ses fibres en $\{0\}$ et $\{1\}$; cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Si on fixe un point a de U on obtient ainsi un homomorphisme de $\Pi_1(U,a)$ dans $GL(V_a)$ (c'est en fait un anti-homomorphisme lorsqu'on compose les lacets dans le sens habituel). On a ([**MN**] proposition I.2.5. p. 57) :

Théorème 3. — *Le foncteur qui à un un système local sur U associe la monodromie de sa fibre en un point a de U est une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux sur U et la catégorie des représentations complexes finies de* $\Pi_1(U,a)$

Exemple. — On prend $U = \mathbf{C}^2 - Y$ où Y est le croisement normal défini par $x_1 x_2 = 0$; soit V le sous espace vectoriel de $\mathscr{O}_U$ engendré par les déterminations de la fonction :

$$g = \sqrt{x_1} \log(x_1/x_2) \exp(1/x_2)$$

on note :

$$h = \sqrt{x_1} \exp(1/x_2)$$

a) V est isomorphe au sous espace de $\mathscr{O}_U^2$ engendré par :

$$u = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

b) Le groupe fondamental de U est $\mathbf{Z}^2$, de base les classes des lacets « faisant un tour » autour de $\{x_1 = 0\}$ et $\{x_2 = 0\}$ respectivement. Les monodromies correspondantes sont données dans la base (u, v) par les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2i\pi \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2i\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $F = \mathscr{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} V$ est isomorphe à $\mathscr{O}_U^2$, et la matrice de la connexion correspondante dans la base canonique est :

$$\Omega = R_1 \frac{dx_1}{x_1} + R_2 \frac{dx_2}{x_2}$$

avec :

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1/x_2 & 1 \\ 0 & 1/x_2 \end{pmatrix}$$

d) Enfin, le $\mathscr{D}_U$ -Module associé est :

$$\frac{\mathscr{D}_U^2}{\mathscr{D}_U^2(\frac{d}{dx_1} I + M_1) + \mathscr{D}_U^2(\frac{d}{dx_2} I + M_2)}$$

avec I la matrice identité, M_1 et M_2 les matrices transposées des coefficients de dx_1 et dx_2 dans Ω. On remarque que $\Omega = d(-1/x_2) + \Omega'$ où Ω' est la forme de la connexion régulière[(1)] $\mathscr{R}$ (sur $\mathbf{C}^2$) correspondant au système local engendré par les déterminations de $\sqrt{x_1}\log(x_1/x_2)$ et $d(-1/x_2)$ correspond au système irrégulier[(1)] $\mathbf{C}\exp(1/x_2)$; la connexion décrite, de forme Ω, est donc la connexion « élémentaire » :

$$\mathscr{E}^{(1/x_2)} \otimes \mathscr{R}$$

(voir le cours de C. Sabbah).

Bien sûr les deux connexions définies par Ω et Ω' sont isomorphes sur U, l'isomorphisme étant donné par la multiplication par $\exp(-1/x_2)$.

Faisons remarquer pour finir, que, par multiplication par $\exp(\exp(1/x_2))$, nous aurions obtenu une connexion toujours isomorphe aux précédentes sur U, mais non égale à la restriction d'une connexion méromorphe[(1)] sur $\mathbf{C}^2$.

2. Connexions méromorphes

X désigne une variété analytique complexe connexe de dimension n, de faisceau structural $\mathscr{O}_X$, Y une hypersurface de X, $U = X - Y$; $\mathscr{O}_X[*Y]$ est le faisceau-des fonctions méromorphes à pôle le long de Y ; la fibre de ce faisceau en un point a de Y est $\mathscr{O}_{X,a}[1/\varphi]$ si φ désigne une équation locale de Y au voisinage de a. On montre facilement la cohérence de ce faisceau d'anneaux à partir de celle de $\mathscr{O}_X$.

On définit également $\Omega^j_X[*Y] = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^j_X$ le faisceau-des formes différentielles méromorphes de degré j à pôle le long de Y.

2.1. Définitions

Definition 1. — On appelle fibré méromorphe sur X à pôle le long de Y un faisceau cohérent $\overline{F}$ de $\mathscr{O}_X[*Y]$ -Modules.

On dit que $\overline{F}$ est effectif s'il existe un faisceau G cohérent de $\mathscr{O}_X$-Modules tel que :

$$\overline{F} = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} G$$

Une connexion méromorphe est un couple $(\overline{F}, \nabla)$ formé d'un fibré méromorphe $\overline{F}$ et d'une connexion

$$\nabla : \overline{F} \longrightarrow \Omega^1_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X[*Y]} \overline{F}$$

Un prolongement méromorphe d'une connexion (F, ∇) sur $U = X - Y$ est une connexion méromorphe $(\overline{F}, \nabla)$ munie d'un isomorphisme de sa restriction à $X - Y$ sur (F, ∇) :

$$\psi : (\overline{F}, \nabla) \mid_{X-Y} \longrightarrow (F, \nabla)$$

---

(1) bien sûr j'anticipe... voir ci-dessous !

Attention : la définition de « fibré méromorphe » donnée ci-dessus n'est pas très satisfaisante en ce sens que le faisceau n'est pas supposé localement libre. Il est bien entendu que dans la définition ci-dessus, on demande à ∇ d'être **C**-linéaire et de satisfaire à l'identité analogue à celle d'une connexion holomorphe pour la multiplication par une fonction méromorphe : pour tout $h \in \mathscr{O}_X[*Y]$ et tout $f \in \overline{F}$:

$$\nabla(hf) = dh \otimes f + h\nabla(f)$$

On définit de la même manière les connections méromorphes intégrables. Pour ce qui concerne l'effectivité d'un module $\overline{F}$, autrement dit l'existence d'un réseau, nous renvoyons évidemment le lecteur au cours de B. Malgrange à cette même école de Séville ! Localement, il n'y a pas de problème d'effectivité ; on obtient par exemple :

Lemme 1. — *Un $\mathscr{O}_X[*Y]$ -Module cohérent de support inclus dans Y est nul.*

On laisse en exercice la preuve de ce lemme (voir aussi [**C**] p. 44) et une première application : si deux connections méromorphes $(\overline{F}, \nabla)$ et $(\overline{F}, \nabla')$ sont égales sur $X - Y$, elles sont égales.

Comme cela a été fait pour les connexions holomorphes intégrables, on peut associer, à une connexion méromorphe intégrable, un $\mathscr{D}_X$-Module : voir le paragraphe I.3 et la construction du foncteur quasi-inverse qui suit l'énoncé du théorème. On peut alors démontrer l'équivalence de catégories suivante, équivalence déjà donnée par C. Sabbah dans son cours :

Proposition 1. — *$(\overline{F}, \nabla)$ est une connexion méromorphe intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $M = \overline{F}$ est un $\mathscr{D}_X$-Module holonome égal à son localisé ($M = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} M$)

(ii) La restriction de $M = \overline{F}$ à $X - Y$ est localement libre.

Dans le sens direct, c'est une conséquence d'un théorème de M. Kashiwara utilisant l'existence de la b-fonction (voir le cours de Ph. Maisonobe dans cette école) : *Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module cohérent, holonome sur $X - Y$, alors son localisé $M[*Y] = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} M$ est holonome (sur X).*

Réciproquement, si M est un $\mathscr{D}_X$-Module vérifiant les conditions (i) et (ii), on peut considérer localement une bonne filtration, et exprimer le fait que la variété caractéristique de M est contenue dans la réunion de Y et de la section nulle du fibré cotangent à X... encore une fois les détails sont laissés en exercice.

2.2. Image inverse d'une connexion méromorphe. — Soit : $u : Z \to X$ une application holomorphe coupant proprement Y, c'est-à-dire telle que $u^{-1}(Y)$ soit encore un diviseur (autrement dit, $u(Z)$ n'est pas contenu dans Y) ; alors, si $(\overline{F}, \nabla)$ est une connexion méromorphe sur X, on définit $u^*\overline{F} = \mathscr{O}_Z \otimes_{u^{-1}(\mathscr{O}_X)} u^{-1}\overline{F}$ puis $u^*\nabla$ de la façon suivante :

soient $x_1 = u_1(z), \ldots, x_n = u_n(z)$ l'expression de u dans des coordonnées locales sur X et, pour une section locale f de $\overline{F}$, $\nabla(f) = dx_1 \otimes f_1 + \cdots + dx_n \otimes f_n$; on pose : $(u^*\nabla)(u^*f) = du_1 \otimes u^*f_1 + \cdots + du_n \otimes u^*f_n$.

Il faut bien sûr vérifier que cette définition est compatible aux changements de coordonnées locales et définit une connexion méromorphe $(u^*\overline{F}, u^*\nabla)$ sur Z à pôle le long de $u^{-1}(Y)$, intégrable si la première l'est (exercices). Le système local correspondant sur $Z - u^{-1}(Y)$ est l'image réciproque du système local sur $X - Y$ induit par la connexion de départ.

Il s'agit d'un cas particulier de l'image inverse d'un $\mathscr{D}$-Module : voir la proposition précédente, et, encore une fois, le cours de Ph. Maisonobe.

2.3. Connexion régulière en dimension 1. — Pour ce qui concerne les connexions méromorphes en dimension 1 nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [**S**].

Soient $K = \mathbf{C}\{t\}[1/t]$, W un K-espace vectoriel de dimension finie m muni d'une connexion ∇ (automatiquement intégrable puisque nous sommes en dimension 1) ; rappelons le résultat classique suivant :

Théorème 4. — *Pour une connexion méromorphe* (W, ∇) *de rang* m *sur* $K = \mathbf{C}\{t\}[1/t]$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe une base de W *dans laquelle la matrice de* ∇ *admet un pôle simple,*

(ii) il existe une base de W *dans laquelle la matrice de* ∇ *est* $R\,dt/t$ *avec* $R \in \mathrm{End}(\mathbf{C}^m)$,

(iii) les sections horizontales de ∇ *dans tout secteur strict de sommet l'origine sont à croissance modérée.*

Definition 2. — Une connexion méromorphe possédant les propriétés équivalentes du théorème est dite régulière.

Remarque. — L'implication (i)⇒(iii) est le théorème de Fuchs ; les sections horizontales étant alors à croissance modérée (sur tout secteur) et de « détermination finie », elles sont « de classe de Nilsson » :

$$\sum a_{\alpha,k}(t) t^{\alpha} (\log t)^k$$

où $a_{\alpha,k}$ sont dans $\mathbf{C}\{t\}$, α parcourt une partie finie de $\mathbf{C}$, et k parcourt les entiers de 0 à $m-1$.

Exercice. — Montrer que la notion de régularité est stable par image réciproque par un germe $u : \mathbf{C}, 0 \to \mathbf{C}, 0$ (non identique à 0) : (W, ∇) est régulière si et seulement si $(u^*W, u^*\nabla)$ l'est.

Exemple. — $Y = \left(\begin{smallmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice fondamentale de solutions du système différentiel $Y' = MY$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/t^2 & -1/t \end{pmatrix}$$

correspondant à la connexion dont la forme, dans une base de K^2, est : $\Omega = -Mdt$. Les solutions sont méromorphes, donc à croissance modérée, et la connexion est régulière ; on vérifie que le changement de bases donné par la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amène une forme ayant un pôle simple :

$$\Omega' = S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S = R\frac{dt}{t}$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. Connexions méromorphes régulières

Definition 3. — Une connexion méromorphe $(\overline{F}, \nabla)$ sur X à pôle le long de Y est dite régulière si, pour toute application analytique u d'un disque de $\mathbf{C}$ dans X coupant proprement Y, son image inverse $(u^*\overline{F}, u^*\nabla)$ par u est régulière.

Nous allons décrire maintenant quelques opérations sur les connexions régulières ; nous laissons les démonstrations des propriétés aux lecteurs ; les connexions sont toujours supposées intégrables.

Image inverse. — L'image inverse d'une connexion régulière par un morphisme coupant proprement Y est régulière.

Suite exacte. — Étant donné une suite exacte de connexions méromorphes :

$$0 \longrightarrow (\overline{F}, \nabla) \longrightarrow (\overline{G}, \nabla) \longrightarrow (\overline{H}, \nabla) \longrightarrow 0$$

alors $(\overline{G}, \nabla)$ est régulière si et seulement si $(\overline{F}, \nabla)$ et $(\overline{H}, \nabla)$ le sont.

Produit tensoriel. — On construit le produit tensoriel de deux connexions méromorphes $(\overline{F}, \nabla)$ et $(\overline{G}, \nabla)$ en posant :

$$\overline{H} = \overline{F} \otimes_{\mathscr{O}_X[*Y]} \overline{G}$$

et en définissant la connexion sur $\overline{H}$ vérifiant pour tout $f \in \overline{F}$ et $g \in \overline{G}$:

$$\nabla(f \otimes g) = \nabla(f) \otimes g + f \otimes \nabla(g).$$

Si les deux connexions sont régulières, leur produit tensoriel l'est aussi.

Morphismes. — Étant donné deux connexions méromorphes $(\overline{F}, \nabla)$ et $(\overline{G}, \nabla)$, on met sur :

$$\overline{H} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X[*Y]}(\overline{F}, \overline{G})$$

la connexion définie par :

$$\nabla(v(f)) = (\nabla(v))(f) + v(\nabla(f))$$

pour tout $v \in \overline{H}$ et $f \in \overline{F}$. On vérifie que $(\overline{H}, \nabla)$ est une connexion méromorphe (intégrable), dont les sections horizontales globales sont exactement les morphismes entre les deux connexions :

$$\mathrm{Hom}(\overline{F}, \nabla), (\overline{G}, \nabla).$$

On vérifie que si les deux connexions de départ sont régulières, la connexion ainsi construite est régulière.

Dual. — En prenant pour $(\overline{G}, \nabla)$ la connexion triviale $(\mathscr{O}_X[*Y], d)$, on obtient comme cas particulier du précédent la connexion duale :

$$\overline{F}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X[*Y]}(\overline{F}, \mathscr{O}_X[*Y])$$

Le système local correspondant sur $X - Y$ est :

$$\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(V, \mathbf{C}_X)$$

le dual du système local V formé par les sections horizontales de la restriction de $(\overline{F}, \nabla)$ à $X - Y$.

3. Connexions méromorphes à pôle logarithmique le long d'un diviseur à croisements normaux

3.1. Calculs en coordonnées locales. — Dans ce paragraphe nous supposons que X est un polydisque de centre l'origine dans $\mathbf{C}^n$ et Y l'hypersurface de X d'équation :

$$x_1 \cdots x_p = 0$$

Y est donc l'union des p « hyperplans » de X, $Y_j = \{x_j = 0\}$ pour $j = 1, \dots, p$. On pose : $Y'_j = Y_j - \cup_{k \neq j} Y_k$; ce sont les composantes connexes de la partie lisse de Y.

On a : $\mathscr{O}_X[*Y] = \mathscr{O}_X[\frac{1}{x_1 \cdots x_p}]$. Soit :

$$\nabla : \mathscr{O}_X[*Y]^m \longrightarrow \Omega^1_X[*Y] \otimes \mathscr{O}_X[*Y]^m$$

une connexion méromorphe ; elle est donnée dans la base canonique $\varepsilon = (e_1, \dots, e_m)$ par : $\nabla(e_j) = \omega_{1,j} \otimes e_1 + \cdots + \omega_{m,j} \otimes e_m$; sa matrice de formes de degré un, $\Omega = (\omega_{i,j})$, s'écrit :

$$\Omega = M^1 dx_1 + \cdots + M^n dx_n$$

où $M^k = (M^k_{i,j})$ est une matrice à coefficients dans $\mathscr{O}_X[\frac{1}{x_1\cdots x_p}]$. La condition d'intégrabilité $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$ s'écrit : pour tout couple (k,ℓ) :

$$-\frac{dM^k}{dx_\ell} + \frac{dM^\ell}{dx_k} = [M^k, M^\ell]$$

Definition 4. — On dit que Ω est à pôle logarithmique si :

- pour $k = 1,\dots,p$, $M^k = N^k/x_k$ avec N^k holomorphe,
- pour $k = p+1,\dots,n$, M^k est holomorphe.

La matrice holomorphe $R_k = N^k(x_1,\dots,0,\dots,x_n)$, restriction de N^k à Y_k, s'appelle le résidu de Ω le long de Y_k (cela pour $k = 1,\dots,p$).

Proposition 2. — *Lorsque z varie dans Y'_k, le résidu $R_k(z)$ de Ω le long de Y_k reste dans une même classe de conjugaison de* $\mathrm{End}(\mathbf{C}^m)$.

Idée de la preuve : pour fixer les idées regardons le résidu R_1 sur Y'_1 ; notons, pour $k = 2,\dots,n$, $S_k = M^k(0,x_2,\dots,x_n)$ la restriction de M^k à Y'_1 ; les conditions d'intégrabilité portant sur ces matrices et les dérivées par rapport aux x_k pour $k = 2,\dots,n$ montrent que le système matriciel suivant est lui même intégrable sur Y'_1 :

$$\frac{dT}{dx_k} = -TS_k$$

Nous pouvons donc lui appliquer le théorème 1 pour en déduire l'existence d'une matrice $T(z)$, définie au voisinage d'un point z_o de Y'_1, satisfaisant les équations ci-dessus, et $T(z_o) = Id$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que : $T(z)R_1(z)T(z)^{-1} = R_1(z_o)$ au voisinage de z_o ; cela se fait en utilisant le fait que $T(z)$ est solution du système matriciel et les conditions d'intégrabilité portant sur la matrice R_1 qui fournissent, pour $k = 2,\dots,n$:

$$\frac{dR_1}{dx_k} = -[R_1, S_k]$$

Cela termine la preuve de la proposition.

Remarquons, en particulier, que les valeurs propres du résidu R_k de Ω le long de Y_k sont constantes sur Y_k pour $k = 1,\dots,p$.

Effet d'un changement de coordonnées adaptées à Y. — Lorsque $y_1,\dots,y_n$ est un autre système de coordonnées adaptées à Y, pour $k = 1,\dots,p$ on a : $y_k = u_k x_k$ avec u_k fonction holomorphe inversible ; on constate alors que la condition de pôle logarithmique est inchangée, et que les résidus R_k se transforment comme un endomorphisme du fibré trivial sur Y_k par changement de coordonnées.

Effet d'un changement de base holomorphe. — Soit S une matrice holomorphe inversible ; la forme de la connexion devient après ce changement de base :

$$\Omega' = S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S$$

De nouveau on constate que la condition de pôle logarithmique est respectée et que le résidu sur Y_k devient :

$$R'_k = \Sigma^{-1} R_k \Sigma$$

si l'on note Σ la restriction de S au-dessus de Y_k ; ce résidu se transforme donc comme un endomorphisme du fibré trivial $\mathscr{O}_{Y_k}^m$ sur Y_k par changement de base.

3.2. Définition et énoncé du théorème. — Les vérifications faites ci-dessus donnent un sens aux définitions suivantes :

Definition 5. — Soient X une variété et Y un diviseur de X à croisements normaux. On appelle connexion méromorphe à pôle logarithmique le long de Y la donnée d'un fibré holomorphe G sur X et d'une connexion méromorphe ∇ intégrable sur

$$\overline{F} = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} G$$

dont la forme dans tout système de coordonnées locales adaptées à Y et dans toute base locale de G est à pôle logarithmique.

Il faut noter que la définition dépend de G, et pas seulement de la connexion méromorphe. Et bien sûr, c'est une connexion régulière.

Le résidu de la connexion est défini comme un endomorphisme de la restriction du fibré holomorphe G à la partie lisse Y' de Y ; d'après ce que nous venons de voir, les valeurs propres du résidu sont constantes sur chaque composante connexe de Y'.

Choisissons une section τ de la projection $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$.

Théorème 5. — *Soient X une variété et Y un diviseur de X à croisements normaux ; soit (F, ∇) une connexion holomorphe sur $X - Y$. Il existe une connexion méromorphe à pôle logarithmique le long de Y prolongeant (F, ∇) telle que les valeurs propres du résidu sur la partie lisse de Y soient dans l'image de τ.*

Soient (G, ∇) et (G', ∇) deux prolongements ayant les propriétés précédentes ; tout isomorphisme de leur restriction à $X - Y$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de (G, ∇) sur (G', ∇).

3.3. Existence et unicité locales. — Comme au début du paragraphe, nous supposons que X est un polydisque de centre l'origine de $\mathbf{C}^n$ et Y l'hypersurface d'équation : $x_1 \cdots x_p = 0$. Fixons un point a de $X - Y$; $X - Y$ est homéomorphe à $(\mathbf{C}^*)^p \times (\mathbf{C})^{n-p}$ et son groupe fondamental $\Pi_1(X - Y, a)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^p$, avec pour base les classes des lacets faisant un tour autour de chaque « hyperplan » de Y ; une représentation de rang m de ce groupe est équivalente à la donnée de p matrices $C_1, \ldots, C_p$ de $G\ell(m, \mathbf{C})$ commutant deux à deux.

Lemme 2. — *Étant données p matrices $C_1, \ldots, C_p$ de $G\ell(m, \mathbf{C})$ commutant deux à deux, il existe p matrices $R_1, \ldots, R_p$ uniques commutant deux à deux et telles que pour $k = 1, \ldots, p$:*

(i) $\exp(-2i\pi R_k) = C_k$,

(ii) les valeurs propres de R_k sont dans l'image de τ.

La preuve du lemme est laissée en exercice.

Soit (F,∇) une connexion holomorphe sur $X-Y$ dont la monodromie est donnée par les matrices $C_1,\dots,C_p$; prenons $G=\mathscr{O}_X^m$ et la connexion donnée par sa forme dans la base canonique :

$$\Omega = R_1\frac{dx_1}{x_1}+\cdots+R_p\frac{dx_p}{x_p}$$

où $R_1,\dots,R_p$ sont les matrices fournies par le lemme. Une matrice fondamentale de solutions du système correspondant, $dY=-\Omega Y$, est le produit des matrices $\exp(-R_k Log(x_k)$, et la monodromie du système local sur $X-Y$ est exactement la représentation de départ. Donc, par les théorèmes rappelés dans la première section, la connexion construite (G,∇) prolonge (F,∇) et satisfait aux exigences du théorème.

Lemme 3. — *Soient (G,∇) et (G',∇') deux connexions méromorphes à pôle logarithmique le long de Y, les valeurs propres des résidus étant dans l'image de τ, et u un morphisme des connexions induites sur $X-Y$; il existe un unique morphisme de (G,∇) dans (G',∇') prolongeant u*

Démonstration. — G et G' sont libres sur $\mathscr{O}_X$; u est une section horizontale sur $X-Y$ de la connexion :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X[*Y]}(\overline{G},\overline{G'})$$

donc s'exprime, dans des bases de G et G' sur X par une matrice S à coefficients holomorphes sur $X-Y$. Soient Ω et Ω' les formes des connexions dans ces bases respectives de G et G' ; on a (en écrivant que u commute à ∇) :

$$dS = S\Omega - \Omega' S$$

Il nous faut prouver que S est holomorphe sur X et, par le théorème des singularités inexistantes (ou de Hartogs), il suffit de le faire au voisinage de tout point de la partie lisse de Y, un point z_o de Y_1' par exemple. Nous avons alors, dans des coordonnées adaptées :

$$\Omega = N^1\frac{dx_1}{x_1}+M^2dx_2+\cdots+M^n dx_n$$
$$\Omega' = N'^1\frac{dx_1}{x_1}+M'^2dx_2+\cdots+M'^n dx_n$$

avec des matrices $N^1, N'^1, M^2, M'^2,\dots$ holomorphes. $dS=S\Omega-\Omega'S$ implique :

$$x_1\frac{dS}{dx_1} = SN^1 - N'^1 S$$

D'où, en choisissant des normes sur les matrices :

$$|x_1|\cdot\left\|\frac{dS}{dx_1}\right\| \leqslant C\|S\|$$

sur $X-Y_1$ au voisinage du point considéré z_o de Y_1' (C étant une constante). Par les mêmes calculs qu'en dimension 1 pour la preuve du théorème de Fuchs (exercice : intégrer sur les rayons), on prouve que S est à croissance modérée, donc méromorphe.

Pour prouver qu'en réalité S est holomorphe, on va prendre les développements en séries de Laurent et on va identifier le premier terme non nul dans l'égalité ; notons les premiers termes de N^1 et N'^1 :

$$R_1 = N^1(0, x_2, \ldots, x_n), \quad R'_1 = N'^1(0, x_2, \ldots, x_n)$$

ce sont justement les résidus des connexions sur Y_1 ;

$$S = \sum_{j=r}^{\infty} S_j x_1^j, \quad \text{avec : } S_r \neq 0$$

On trouve :

$$rS_r = S_r R_1 - R'_1 S_r$$

soit encore :

$$(R'_1 + rI)S_r = S_r R_1$$

Dans cette formule, si m et m' sont les rangs des fibrés G et G', I est la matrice identité de rang m', la matrice R_1 est carrée de rang m, la matrice R'_1 est carrée de rang m', enfin la matrice S_r a m' lignes et m colonnes. On peut alors conclure « $r = 0$ » grâce au résultat de l'exercice suivant :

Exercice. — Soient $A \in \mathrm{End}(\mathbf{C}^{m'})$, $B \in \mathrm{End}(\mathbf{C}^m)$ et $C \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{m'})$ non nulle vérifiant $AC = CB$; alors A et B ont une valeur propre commune.

L'unicité du prolongement de u (c'est-à-dire de S) est évidente. Lorsqu'on part d'un isomorphisme u, le prolongement est un isomorphisme.

3.4. Existence et unicité globales

Existence. — D'après ce qui précède, on peut recouvrir Y par des ouverts U_i (isomorphes à des polydisques), et construire sur chacun une connexion méromorphe à pôle logarithmique le long de Y, (G_i, ∇_i), à monodromie donnée, donc, par les théorèmes 2 et 3, prolongeant la restriction de (F, ∇) à $U_i - Y$; nous disposons donc en plus d'un isomorphisme φ_i entre ces deux connections au-dessus de cet ouvert $U_i - Y$. Par le lemme 4, (quitte à recouvrir $U_i \cap U_j$ lui-même par des polydisques) on construit un unique isomorphisme $\phi_{i,j}$ de (G_i, ∇_i) sur (G_j, ∇_j) au-dessus de $U_i \cap U_j$ prolongeant $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Encore par unicité, la condition de cocycle est satisfaite ($\phi_{k,i} \circ \phi_{j,k} \circ \phi_{i,j} = \mathrm{Id}$ au-dessus de l'intersection de trois ouverts) ; par conséquent, les connexions (G_i, ∇_i) sur U_i, et la connexion (F, ∇) sur $X - Y$ se recollent au moyen des $\phi_{i,j}$ et φ_i en la connexion (G, ∇) cherchée.

Unicité. — Enfin, si (G, ∇) et (G', ∇') sont deux connexions méromorphes à pôle logarithmique le long de Y (satisfaisant à la condition demandée concernant les valeurs propres des résidus) et u un morphisme entre les deux au-dessus de $X - Y$, il est clair que l'existence et l'unicité du prolongement local de u (lemme 4) entraîne l'existence et l'unicité du prolongement global.

Corollaire 2. — *Si Y est un diviseur à croisements normaux de la variété X, le foncteur de restriction induit une équivalence de la catégorie des connexions intégrables à pôle logarithmique le long de Y et satisfaisant à la condition sur les valeurs propres des résidus, vers la catégorie des connexions holomorphes intégrables sur $X - Y$.*

Problème. — On prend $X = \mathbf{C}^2, Y = f^{-1}(0)$ avec :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$$

À une matrice $R \in \mathrm{End}(\mathbf{C}^m)$ on associe la connexion méromorphe $(\mathscr{O}^m_{\mathbf{C}^2}, \nabla)$ dont la forme dans la base canonique est :

$$\Omega = R\frac{df}{f}$$

Toute connexion holomorphe intégrable sur $X - Y$ est elle isomorphe à la restriction d'une telle connexion (pour une certaine valeur de R) ?

On peut généraliser la question en prenant $f = f_1 \cdots f_s$ produit de polynômes irréductibles, $Y = f^{-1}(0)$ n'ayant encore que des points doubles ordinaires ; on prendra alors :

$$\Omega = R_1\frac{df_1}{f_1} + \cdots + R_s\frac{df_s}{f_s}$$

avec, $R_1, \ldots, R_s$ dans $\mathrm{End}(\mathbf{C}^m)$.

Quelle est la condition d'intégrabilité de Ω ? Chercher des conditions nécessaires ou suffisantes sur le groupe fondamental de $X - Y$ (ou mieux, sur f), pour pouvoir représenter ainsi toutes les connexions holomorphes sur $X - Y$.

4. Énoncé de la correspondance de Riemann-Hilbert

Nous terminons ce cours en donnant l'énoncé du théorème de correspondance de Riemann-Hilbert ; pour la preuve, se reporter à B. Malgrange ([**M**] pp. 161 à 165).

Théorème 6. — *Soient X une variété analytique complexe, Y une hypersurface de X. Le foncteur de restriction :*

$$(\overline{F}, \nabla) \longmapsto (\overline{F}, \nabla) \,|_{X-Y}$$

est une équivalence de la catégorie des connexions méromorphes intégrables et régulières à pôles le long de Y, vers la catégorie des connexions holomorphes intégrables sur $X - Y$.

La preuve de « l'essentielle surjectivité » utilise donc le théorème de résolution des singularités d'Hironaka ; soit $\pi : X' \to X$ un morphisme propre tel que $Y' = \pi^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux de X' et π induise un isomorphisme de $X' - Y'$ sur $X - Y$.

Étant donné une connexion holomorphe sur $X - Y$, on prend « en haut » son prolongement de Deligne et on en prend l'image directe par π ; la difficulté est de montrer que cette image directe est bien une connexion régulière.

En ce qui concerne le prolongement d'un morphisme défini sur $X - Y$ entre deux connexions régulières, la preuve est directe et n'utilise pas la désingularisation.

Signalons que Z. Mebkhout donne une preuve du théorème utilisant seulement la résolution des courbes planes (voir le cours de Z. Mebkhout à cette même école de Séville).

Corollaire 3. — *Soit X un polydisque de $\mathbf{C}^n$ centré à l'origine, et $(\overline{F}, \nabla)$ une connexion méromorphe intégrable et régulière à pôles le long de l'hypersurface Y définie par $x_1 \cdots x_p = 0$. Alors $(\overline{F}, \nabla)$ est isomorphe à une connexion à pôles logarithmiques $(\mathscr{O}_X^m, \nabla)$ dont la forme dans la base canonique est :*

$$\Omega = R_1 \frac{dx_1}{x_1} + \cdots + R_p \frac{dx_p}{x_p}$$

où $R_1, \ldots, R_p$ sont des matrices de $\mathrm{End}(\mathbf{C}^m)$.

Cela généralise donc le théorème 4 à la dimension quelconque.

On obtient plus généralement que si $(\overline{F}, \nabla)$ est une connexion méromorphe intégrable et régulière à pôles le long de l'hypersurface Y d'une variété X, alors $\overline{F}$ est effectif (admet un réseau) :

- si Y est à croisements normaux, on a :

$$\overline{F} = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} G$$

où G est un fibré holomorphe (en particulier $\overline{F}$ est localement libre).

- dans le cas général, on sait seulement l'existence du réseau G ($\mathscr{O}_X$-cohérent) par la désingularisation et le théorème de Grauert.

Références

[C] F. Castro – « Exercices sur le complexe de de Rham et l'image directe des $\mathscr{D}$-modules », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, Images directes et constructibilité* [**MS2**], p. 15–45.

[D] P. Deligne – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[GM] M. Granger & Ph. Maisonobe – « A basic course on differential modules », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, $\mathscr{D}$-modules cohérents et holonomes* [**MS1**], p. 103–168.

[MS1] Ph. Maisonobe & C. Sabbah (éds.) – *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, $\mathscr{D}$-modules cohérents et holonomes*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45, Hermann, Paris, 1993.

[MS2] ______ (éds.) – *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, Images directes et constructibilité*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993.

[M] B. Malgrange – « Chap. IV : Regular connexions after Deligne », in *Algebraic $\mathscr{D}$-modules*, Perspectives in Math., vol. 2, Academic Press, Boston, 1987, p. 151–172.

[MN] Z. Mebkhout & L. Narváez-Macarro – « Le théorème de constructibilité de Kashiwara », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, Images directes et constructibilité* [**MS2**], p. 47–98.

[S] C. Sabbah – « Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, $\mathscr{D}$-modules cohérents et holonomes* [**MS1**], p. 1–80.

J. Briançon, UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France • *E-mail :* briancon@math.unice.fr