Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 1–57

IMAGE INVERSE EN THÉORIE DES $\mathscr{D}$-MODULES

par

Philippe Maisonobe & Tristan Torrelli

Résumé. — Dans ce cours, nous exposons les résultats de base sur le foncteur image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-modules. Après quelques généralités, nous donnons les premiers résultats dans le cas d'un morphisme non caractéristique. Puis nous montrons l'existence d'équations fonctionnelles de Bernstein associées à une section d'un $\mathscr{D}$-module holonome. Nous en déduisons que les foncteurs image inverse et cohomologie locale préservent l'holonomie. Nous montrons ensuite que ces foncteurs commutent. Enfin, nous étudions le morphisme canonique entre l'image inverse des solutions et les solutions de l'image inverse. Ces résultats sont à la base de la notion d'irrégularité d'un $\mathscr{D}$-module holonome.

***Abstract* (Inverse image in the theory of $\mathscr{D}$-Modules).** — This course deals with basic properties of the inverse image functor in $\mathscr{D}$-modules theory. After some generalities, we give the first results in the case of a non-characteristic morphism. Then we prove the existence of Bernstein functional equations associated with a section of an holonomic $\mathscr{D}$-module. We deduce that the inverse image functor and the local cohomology functor preserve holonomicity. Moreover, we prove that these two functors commute. Finally, we study the canonical morphism between the inverse image of the solutions and the solutions of the inverse image. These results are at the origin of the definition of the irregularity of a holonomic $\mathscr{D}$-module.

Table des matières

Introduction 2
I. Définition et généralités 4
II. Images inverses non caractéristiques 11
III. Équations fonctionnelles d'un $\mathscr{D}$-Module holonome 22
IV. Cohomologie locale algébrique 30
V. Images inverses et solutions d'un $\mathscr{D}$-Module 45
Références 57

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32C38.
Mots clefs. — $\mathscr{D}$-module, foncteur image inverse.

Introduction

Le but de ce cours est de donner certains résultats de base sur l'image inverse de systèmes différentiels. Précisons le contenu de chacun des chapitres.

Chapitre I : Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés analytiques complexes. Nous commençons par définir le foncteur image inverse f^*, de la catégorie des $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche vers la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche et Lf^* son foncteur dérivé. Comme $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, le calcul d'une image inverse se ramène aux calculs des images inverses de projections ou d'immersions par des sous-variétés. Nous constatons que l'image inverse par une projection p est de nature triviale : p^* est un foncteur exact qui préserve la cohérence et l'holonomie. De plus, si M est un $\mathscr{D}$-Module à gauche cohérent, la variété caractéristique de p^*M se déduit de celle de M de façon simple. L'image inverse par l'immersion i d'une sous-variété contient donc toute la difficulté.

Dans un système de coordonnées locales, Li^*M est isomorphe à un complexe de Koszul $K^\bullet(M)$ associé à M. Nous constatons que lorsque M est algébriquement supporté par l'image de i, $K^\bullet(M)$ est le complexe de Koszul associé à une suite corégulière. D'autre part, si M est un Module de type fini sur l'anneau des opérateurs *relatifs par rapport à l'image de* i (voir le corollaire I.3.3), $K^\bullet(M)$ est le complexe de Koszul associé à une suite régulière. Dans ces deux cas, Li^*M n'a donc de la cohomologie qu'en un seul degré. Nous terminons le chapitre en donnant le résultat très général suivant : si M et N sont des $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche :

$$Lf^*M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} Lf^*N \simeq Lf^*(M \otimes^L_{\mathscr{O}_Y} N)$$

Chapitre II : Nous étudions ici l'image inverse d'un $\mathscr{D}$-Module à gauche cohérent par un morphisme non caractéristique, et ce d'un point de vue algébrique. Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent et si $i : Y \to X$ est l'immersion d'une sous-variété de X, Y est *non caractéristique pour* M si l'intersection de la variété caractéristique de M et du fibré conormal à Y est contenue dans la section nulle du fibré cotangent à X. Par exemple, si Y est l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$ dans $\mathbf{C}^n$, et si P est l'opérateur $(\partial/\partial x_1)^{r_1} + A_1(\partial/\partial x_1)^{r_1-1} + \cdots + A_{r_1}$ où les A_j sont des opérateurs différentiels indépendants de $(\partial/\partial x_1)$, de degré inférieur ou égal à j, alors l'hypersurface Y est non caractéristique pour le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}P$. On montre alors que l'image inverse par l'immersion i d'une sous-variété non caractéristique est un foncteur exact et préserve la cohérence. De plus, on obtient une majoration de la variété caractéristique de i^*M. Cette majoration est en fait une égalité. Nous donnons l'idée d'une preuve cohomologique de ce résultat. Le point clef de cette preuve est qu'un $\mathscr{D}_X$-Module holonome admet une bonne filtration telle que les sous-modules de son gradué soient tous de dimension $\dim X$; on en déduit alors une filtration de i^*M telle que $\operatorname{gr} i^*M \simeq i^* \operatorname{gr} M$. Ces résultats s'étendent aux images inverses par un morphisme non caractéristique. Comme application, nous donnons une condition nécessaire pour qu'un produit tensoriel de $\mathscr{D}$-Modules à gauche cohérents (resp. holonomes) conserve la cohérence (resp. l'holonomie). Pour cela, nous calculons la variété caractéristique d'un produit externe, ce qui nécessite quelques techniques de divisions introduites dans le cours de F. Castro et M. Granger. Nous définissons enfin les systèmes de Cauchy généralisés relativement à l'hypersurface lisse de $\mathbf{C}^n$ d'équation $x_1 = 0$. Nous montrons qu'un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche cohérent est localement isomorphe à un système de Cauchy généralisé s'il admet une bonne filtration dont le gradué soit un $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_2, \ldots, \xi_n]$-module libre. Nous en déduisons que tout $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche cohérent pour lequel l'hypersurface $x_1 = 0$ est non caractéristique admet une résolution locale de longueur $2n - 1$ par des systèmes de Cauchy généralisés.

Chapitre III : Soit X une variété analytique et $f : X \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Dans ce paragraphe, nous montrons d'abord que toute section m d'un Module holonome M admet localement une équation fonctionnelle non triviale du type $b(s)mf^s \in \mathscr{D}_X[s]mf^{s+1}$ où b est un polynôme d'une variable à coefficients complexes. Nous en déduisons que si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, holonome en dehors de l'hypersurface d'équation $f = 0$, il est holonome et de plus $M[1/f]$ est un Module holonome. Nous démontrons alors en toute généralité la conservation de l'holonomie par image inverse. En fin de chapitre, nous introduisons la notion de $\mathscr{D}$-Module spécialisable le long d'une hypersurface lisse. Toute section m d'un tel Module vérifie localement des équations du type $b(x_1(\partial/\partial x_1))m \in V_{-1}(\mathscr{D})m$, où b est un polynôme non nul, $x_1 = 0$ une équation locale de l'hypersurface et $V_{-1}(\mathscr{D})$ le terme de degré -1 de la filtration croissante de $\mathscr{D}$ par le poids des opérateurs obtenue en donnant le poids -1 à x_1, le poids 1 à $(\partial/\partial x_1)$ et le poids 0 aux autres variables et dérivations élémentaires. Si m est une section d'un Module holonome, nous obtenons une équation de spécialisation directement à partir de l'équation fonctionnelle associée à mx_1^s. En particulier, tout $\mathscr{D}$-Module holonome est spécialisable le long de toute hypersurface lisse.

Chapitre IV : Soit Y un sous-espace analytique d'une variété analytique X. Étant donné un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M, nous montrons que les $\mathscr{O}_X$-Modules $\Gamma_{[Y]}M$ et $M(\star Y)$ sont munis de structures naturelles de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Nous définissons ainsi deux foncteurs de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche : $\Gamma_{[Y]}-$, foncteur de cohomologie locale algébrique à support Y, et $-(\star Y)$. Nous en donnons les premières propriétés : itérations, comportement relatif au produit tensoriel, composition, triangle de Mayer-Vietoris. Lorsque Y est localement intersection complète, nous représentons localement $R\Gamma_{[Y]}M$ par un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Nous calculons ensuite le triangle de cohomologie locale d'un système de Cauchy généralisé. Nous montrons alors que la cohomologie locale conserve toujours l'holonomie et qu'elle préserve la cohérence si Y est une sous-variété non caractéristique. Nous montrons ensuite que les foncteurs image inverse et cohomologie locale commutent : $Lf^*R\Gamma_{[Y]}M \simeq R\Gamma_{[f^{-1}Y]}Lf^*M$, pour tout morphisme f à valeurs dans X, pour tout sous-espace analytique Y et tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M. Le cas d'une projection est simple. Pour une immersion, notre preuve utilise les structures de $\mathscr{D}$-Modules. Nous terminons enfin le paragraphe en identifiant Li^*M et $R\Gamma_{[Y]}M$ pour tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche lorsque $i : Y \to X$ est l'immersion d'une sous-variété lisse.

Chapitre V : Soit $f : X \to Z$ un morphisme entre deux variétés analytiques. En utilisant une résolution du bi-module $\mathscr{D}_{X\to Z}$, nous précisons une flèche naturelle pour tout couple (M, L) de $\mathscr{D}_Z$-Modules à gauche entre $f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M, L)$ et $R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, Lf^*L)$. Si $L = \mathscr{O}_Z$, cette flèche, notée $\mathrm{can}(f, M)$, relie l'image inverse des solutions holomorphes de M et les solutions holomorphes de l'image inverse. Nous montrons que si f est une projection, $\mathrm{can}(f, M)$ est un isomorphisme. Si $i : Y \to X$ désigne l'inclusion d'une sous-variété lisse fermée et M un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules tel que $R\Gamma_{[Y]}M$ est à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente, nous montrons que le morphisme $\mathrm{can}(i, M)$ s'écrit $\mathrm{can}(i, M) = \delta(M) \circ \alpha(Y, M)$ où $\alpha(Y, M)$ le morphisme naturel $R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X)_{|Y} \to R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, \mathscr{O}_X)_{|Y}$ et $\delta(M)$ est un isomorphisme naturel. Si de plus Y est non caractéristique pour M, nous montrons à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevska classique que $\mathrm{can}(i, M)$ et $\alpha(Y, M)$ sont des isomorphismes. Nous établissons ainsi que lorsque le morphisme f est non caractéristique pour un $\mathscr{D}_Z$-Module à gauche cohérent M, les complexes $f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M, \mathscr{O}_Z)$ et $R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, \mathscr{O}_X)$ sont isomorphes. Nous appliquons ce théorème pour montrer que les groupes de cohomologie du complexe des solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}$-Module holonome vérifient des conditions de support. Ce résultat est utilisé dans le cours de L. Narváez-Macarro pour établir que le complexe des solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}$-Module holonome est un faisceau pervers. Signalons que le morphisme α garde un sens relativement à un sous-espace analytique et est utilisé dans le cours de Z. Mebkhout pour définir les Modules holonomes réguliers. Après avoir donné une preuve du théorème de Cauchy-Kovalevska, nous terminons ce paragraphe avec une proposition utile pour comparer les solutions holomorphes relatives et absolues de certains $\mathscr{D}$-Modules à gauche.

Nous remercions M. Granger pour ses remarques sur ce texte.

I. Définition et généralités

1. Définition. — Soit X une variété analytique complexe de dimension n. On désigne par $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions analytiques sur X, $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X, $\mathscr{D}_X(k)$, $k \in \mathbf{N}$, le terme d'ordre k de la filtration canonique de $\mathscr{D}_X$, et $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés analytiques lisses. Le faisceau $\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ est le sous-faisceau filtré croissant du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$:

$$\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X) = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathrm{Diff}^k(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$$

défini par les conditions suivantes :

- $\mathrm{Diff}^0(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X) = \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$
- un opérateur P appartient à $\mathrm{Diff}^k(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$, $k \in \mathbf{N}^*$, si pour tout $g \in f^{-1}\mathscr{O}_Y$, l'application :

$$f^{-1}\mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_X \ ; \ h \longmapsto P(gh) - gP(h)$$

définit un opérateur de $\mathrm{Diff}^{k-1}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$.

Soit ω un point de X. Plaçons nous dans des systèmes de coordonnées locales centrés en ω et $f(\omega)$; le morphisme f est défini par :

$$f : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^p \ ; \ x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (y_1 = f_1(x), \ldots, y_p = f_p(x))$$

Les opérateurs de $\mathrm{Diff}^k(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ se lisent :

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p),|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_p}\right)^{\alpha_p}$$

avec $a_\alpha(x) \in \mathscr{O}_X$. Comme $\mathscr{D}_X$ et $\mathscr{D}_Y$ sont par définition des sous-faisceaux de $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ et $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y)$, on vérifie que $\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche et de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Module à droite.

D'autre part, posons :

$$\mathscr{D}_{X\to Y} = \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y$$

C'est un faisceau filtré croissant :

$$\mathscr{D}_{X\to Y} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y(k)$$

où $\mathscr{D}_Y(k)$ est le terme d'ordre k de la filtration de $\mathscr{D}_Y$ par le degré des opérateurs.

Constatons que l'injection canonique de $\mathscr{D}_{X\to Y}$ dans $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ identifie $\mathscr{D}_{X\to Y}$ et $\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ comme faisceaux filtrés. Le faisceau $\mathscr{D}_{X\to Y}$ est ainsi muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche et de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Module à droite. Dans des systèmes de coordonnées locales, la structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche est définie par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a \otimes P) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \otimes P + \sum_{j=1}^{p} a\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial y_j}P$$

où a et P sont respectivement des sections de $\mathscr{O}_X$ et $f^{-1}\mathscr{D}_Y$.

Définition 1.1. — Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques lisses et M un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche. On appelle *image inverse* de M, le $\mathscr{D}_X$-Module à gauche :

$$f^*M = \mathscr{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} f^{-1}M$$

De plus, si $\phi : M \to N$ est un morphisme de $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche, on définit un morphisme naturel $f^*(\phi) : f^*M \to f^*N$. Ainsi f^* est un foncteur additif exact à droite de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_Y)$ vers $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)$.

Remarquons que f^*M est canoniquement isomorphe à $\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}M$ comme $\mathscr{O}_X$-Module. L'image inverse d'un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche M peut donc être définie comme étant le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}M$ muni de la structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche définie en coordonnées locales par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a \otimes m) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \otimes m + \sum_{j=1}^{p} a \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} m$$

où a et m sont respectivement des sections de $\mathscr{O}_X$ et $f^{-1}M$.

D'autre part, si f est un isomorphisme, par transport des opérateurs différentiels, il est facile de munir $f^{-1}M$ d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. De l'isomorphisme entre $\mathscr{O}_X$ et $f^{-1}\mathscr{O}_Y$, on déduit un isomorphisme de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche et de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Modules à droite entre $\mathscr{D}_{X\to Y}$ et $f^{-1}\mathscr{D}_Y$. Dans ce cas, l'image inverse d'un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche M est naturellement isomorphe à $f^{-1}M$.

Soit $g : Y \to Z$, un morphisme entre deux variétés analytiques complexes lisses. Si M est un $\mathscr{D}_Z$-Module à gauche, alors f^*g^*M est isomorphe successivement à :

$$\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} f^{-1}[\mathscr{O}_Y \otimes_{g^{-1}\mathscr{O}_Z} g^{-1}\mathscr{D}_Z \otimes_{g^{-1}\mathscr{D}_Z} g^{-1}M]$$

puis à :

$$\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}g^{-1}\mathscr{O}_Z} f^{-1}g^{-1}\mathscr{D}_Z \otimes_{f^{-1}g^{-1}\mathscr{D}_Z} f^{-1}g^{-1}M$$

On constate qu'il s'agit d'un isomorphisme de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Ainsi le foncteur $(g \circ f)^*$ est isomorphe au foncteur composé $f^* \circ g^*$.

Rappelons que la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_Y)$ a assez d'objets plats. Les $\mathscr{D}_Y$-Modules plats formant une famille acyclique pour le foncteur f^*, cela assure l'existence du foncteur dérivé :

$$Lf^* : D^-(\mathscr{D}_Y) \longrightarrow D^-(\mathscr{D}_X)$$

où $D^-(\mathscr{D}_X)$ (resp. $D^-(\mathscr{D}_Y)$) désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathscr{D}_X$-Modules (resp. $\mathscr{D}_Y$-Modules) bornés à droite. Comme $\mathscr{D}_Y$ est un $\mathscr{O}_Y$-Module localement libre (donc plat), pour tout $\mathscr{D}_Y$-Module plat M, le Module $f^{-1}\mathscr{D}_Y \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} f^{-1}M$ est $f^{-1}\mathscr{O}_Y$ plat. Ainsi, pour tout entier k et tout complexe $M^\bullet$ de $D^-(\mathscr{D}_Y)$, nous avons les isomorphismes :

$$L^k f^* M^\bullet \simeq \mathrm{Tor}^k_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, f^{-1}M^\bullet)$$

De même, si N est un $\mathscr{D}_Z$-Module à gauche plat, le $(g\circ f)^{-1}\mathscr{D}_Z$-Module $(g\circ f)^{-1}N$ est $(g \circ f)^{-1}\mathscr{O}_Z$ plat. On en déduit alors que, pour $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathrm{Tor}^k_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, f^{-1}(g^*N)) \simeq \mathrm{Tor}^k_{(g\circ f)^{-1}\mathscr{O}_Z}(\mathscr{O}_X, (g\circ f)^{-1}N) = 0$$

Ainsi, si N est un $\mathscr{D}_Z$-Module à gauche plat, pour $k > 0$:

$$L^k f^*(g^*N) = 0$$

et g^*N est donc acyclique pour le foncteur f^*. L'isomorphisme fonctoriel suivant s'en déduit :

$$Lf^* Lg^* \simeq L(g \circ f)^*$$

2. Image inverse par une projection. — Si Z est une variété analytique lisse, nous noterons T^*Z son fibré cotangent et $\operatorname{gr}\mathscr{D}_Z$ le gradué de la filtration canonique de $\mathscr{D}_Z$. Dans ce paragraphe, nous considérerons deux variétés analytiques complexes lisses X et Y, et $p : X \times Y \to Y$, le morphisme de projection.

Remarquons que, pour tout $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche M, $L^k p^* M$ est nul pour $k > 0$, puisque $\mathscr{O}_{X\times Y}$ est un $p^{-1}\mathscr{O}_Y$-Module plat. Le foncteur :

$$p^* : \operatorname{Mod}(\mathscr{D}_Y) \longrightarrow \operatorname{Mod}(\mathscr{D}_{X\times Y})$$

est donc exact.

Associons à p le diagramme commutatif naturel :

$$\begin{tikzcd}
(x,y,0,\eta) & (x,y,\eta) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & (y,\eta) \\
T^*(X\times Y) \arrow[d] & X\times Y \times_Y T^*Y \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[d] & T^*Y \arrow[d] \\
X\times Y \arrow[r, equal] & X\times Y \arrow[r, "p"] & Y
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.1. — *Le foncteur $p^* : \operatorname{Mod}(\mathscr{D}_Y) \to \operatorname{Mod}(\mathscr{D}_{X\times Y})$ est exact. De plus, si M est un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche cohérent de variété caractéristique* $\operatorname{car} M$*, le $\mathscr{D}_{X\times Y}$-Module p^*M est cohérent et sa variété caractéristique est $P\overline{p}^{-1}(\operatorname{car} M)$.*

Démonstration. — Soit $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une bonne filtration de M. Du fait de la platitude de $\mathscr{O}_{X\times Y}$ sur $p^{-1}\mathscr{O}_Y$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application canonique :

$$i_k : \mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}M_k \longrightarrow \mathscr{D}_{X\times Y\to Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{D}_Y} p^{-1}M \ ; \ a\otimes m \longmapsto a \otimes 1 \otimes m$$

est injective. Notons N_k son image. Il résulte de la définition de la structure de $\mathscr{D}_{X\times Y}$-Module de p^*M que :

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} N_k = p^*M \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_{X\times Y}(\ell)N_k \subset N_{k+\ell}$$

pour tout $k, \ell \in \mathbf{N}$. La suite des N_k définit donc une filtration de p^*M comme $\mathscr{D}_{X\times Y}$-Module à gauche. Notons G le gradué de cette filtration. D'autre part, le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}\operatorname{gr}\mathscr{D}_Y$ s'identifie au quotient de $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$ par $\widetilde{\mathscr{I}}$, l'idéal engendré par les symboles principaux des opérateurs nuls sur $p^{-1}\mathscr{O}_Y$; il est donc en particulier $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$-cohérent. Par platitude, G est isomorphe à :

$$\mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}\operatorname{gr} M$$

où $\operatorname{gr} M$ désigne le gradué de M. On constate que c'est un isomorphisme de $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$-Modules. À l'aide d'une présentation de $\operatorname{gr} M$, nous obtenons une suite exacte de $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$-Modules :

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}(\operatorname{gr}\mathscr{D}_Y)^s \longrightarrow \mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}(\operatorname{gr}\mathscr{D}_Y)^\ell \\ \longrightarrow \mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}\operatorname{gr} M \longrightarrow 0\end{aligned}$$

On en déduit que G est un $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$-Module cohérent. Ainsi, $(N_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une bonne filtration de p^*M ; ce qui établit la cohérence de p^*M (voir [**Cimpa1**, th. 1, p. 119]). On pourrait aussi établir cette cohérence plus directement à partir d'une présentation de M.

Par ailleurs, l'anneau $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$ se décompose en somme directe de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels :

$$\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y} = \widetilde{\mathscr{I}} \oplus (\mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}\operatorname{gr}\mathscr{D}_Y)$$

Ainsi l'a nnulateur dans $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$ de G est engendré par $\widetilde{\mathscr{I}}$ et par l'annulateur de G sur $\mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}\operatorname{gr}\mathscr{D}_Y$. C'est donc l'idéal de $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times Y}$ engendré par $\widetilde{\mathscr{I}}$ et $\mathscr{O}_{X\times Y} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_Y} p^{-1}\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_Y}\operatorname{gr}M$. Pour voir ce dernier point, si A est un anneau, on interprète l'annulateur d'un A-module M comme le noyau du morphisme naturel $A \to \operatorname{Hom}_A(M, M)$ et on utilise la platitude de $\mathscr{O}_{X\times Y}$ sur $p^{-1}\mathscr{O}_Y$ et la cohérence de $p^{-1}\operatorname{gr}M$. D'où la proposition.

Si M est un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche, p^*M se décrit en fait de façon très simple. L'injection naturelle de $p^{-1}\mathscr{D}_Y$ dans $\mathscr{D}_{X\times Y}$ permet de définir une injection :

$$\mathscr{D}_{X\times Y\to Y} \longrightarrow \mathscr{D}_{X\times Y}$$

dont l'image est isomorphe au quotient de $\mathscr{D}_{X\times Y}$ par l'idéal $\mathscr{I}$ des opérateurs différentiels nuls sur $p^{-1}\mathscr{O}_Y$. Ainsi, nous avons un isomorphisme de $\mathscr{D}_{X\times Y}$-Modules à gauche et de $p^{-1}\mathscr{D}_Y$-Modules à droite :

$$\mathscr{D}_{X\times Y\to Y} \simeq \mathscr{D}_{X\times Y}/\mathscr{I}$$

Le $\mathscr{D}_{X\times Y}$-Module p^*M est alors isomorphe à :

$$(\mathscr{D}_{X\times Y}/\mathscr{I}) \otimes_{p^{-1}\mathscr{D}_Y} p^{-1}M$$

En particulier, si M est le quotient de $\mathscr{D}_Y$ par un idéal J :

$$p^*(\mathscr{D}_Y/J) \simeq \mathscr{D}_{X\times Y}/(\mathscr{I} + \mathscr{D}_{X\times Y}J)$$

où $\mathscr{D}_{X\times Y}J$ désigne l'idéal de $\mathscr{D}_{X\times Y}$ engendré par $p^{-1}J$.

3. Restriction à une sous-variété lisse. Calculs en coordonnées locales

Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p < n$. Notons i l'injection :

$$\mathbf{C}^{n-p} \longrightarrow \mathbf{C}^n \ ; \ (x_{p+1},\ldots,x_n) \longmapsto (0,\ldots,0,x_{p+1},\ldots,x_n)$$

On constate que :

$$\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}\to\mathbf{C}^n} \simeq i^{-1}\frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{(x_1,\ldots,x_p)\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}$$

Soit M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, considérons les endomorphismes $\mathbf{C}$-linéaires de $i^{-1}M$ de multiplication à gauche par x_j. Ces endomorphismes commutent. Soit $K^\bullet(M)$ leur complexe de Koszul. Son terme général est une somme directe d'exemplaires de $i^{-1}M$:

$$K^{-k}(M) = \bigoplus_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant p} i^{-1}Me_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$$

pour $0\leqslant k\leqslant p$, et $K^{-k}(M)=0$ sinon. Les différentielles $d_k : K^{-k}(M)\to K^{-k+1}(M)$ sont définies par :

$$\mathrm{d}_k(me_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j x_j me_{i_1}\wedge\cdots\wedge \overset{\vee}{e_{i_j}}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$$

Dans le cas particulier où $M=\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$, un calcul élémentaire établit que les endomorphismes de $i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$ de multiplication à gauche par les x_j forment une suite régulière de $i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$. Donc $K^{\bullet}(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$ est une résolution de $i^{-1}(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}/(x_1,\dots,x_p)\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$ par des $i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à droite libres. Il s'agit d'une résolution de $i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à droite et de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}}$-Module à gauche. Nous en déduisons la proposition :

Proposition 3.1. — *Si M est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche, Li^*M est quasi-isomorphe au complexe de Koszul $K^{\bullet}(M)$ des endomorphismes de $i^{-1}M$ de multiplication par x_j, $1\leqslant j\leqslant p$.*

Ainsi, $Li^*\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$ s'identifie à $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}\to\mathbf{C}^n}$, ou encore à $i^{-1}(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}/(x_1,\dots,x_p)\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$, qui n'est pas un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}}$-Module à gauche cohérent. L'image inverse d'un $\mathscr{D}$-Module cohérent n'est donc pas toujours cohérente.

Exemple 1 : $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules supportés par $\{x_1=\cdots=x_p=0\}$. — Nous dirons qu'un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche M est *algébriquement supporté* par $x_1=\cdots=x_p=0$ si toutes ses sections sont localement annulées par une puissance de l'idéal $(x_1,\dots,x_p)\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$.

Corollaire 3.2. — *Si M est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche algébriquement supporté par $x_1=\cdots=x_p=0$, les endomorphismes de $i^{-1}M$ de multiplication par x_j, $1\leqslant j\leqslant p$, forment une suite co-régulière. En particulier, Li^*M est quasi-isomorphe au complexe à un terme placé en degré $-p$:*

$$\{u\in i^{-1}M\ :\ x_ju=0 \textit{ pour } 1\leqslant j\leqslant p\}\,[+p]$$

Démonstration. — Soit m une section locale de M. Par hypothèse, il existe un entier k tel que $x_1^k m=0$. Comme l'opérateur $(\partial/\partial x_1)^k x_1^k - k!$ appartient à $x_1\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$, nous en déduisons que $m\in x_1M$. La multiplication à gauche par x_1 est donc surjective. Le noyau de cette multiplication est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}$-Module à gauche supporté par $x_2=\cdots=x_p=0$. Une récurrence sur p permet donc de conclure.

Exemple 2 : $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules relatifs à une sous-variété

Corollaire 3.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche tel que pour toute section m de M et pour tout entier k, $1\leqslant k\leqslant p$, il existe des opérateurs P_k annulant m de la forme :*

$$P_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{r_k} + A_{1,k}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{r_k-1} + \cdots + A_{r_k,k}$$

où les $A_{j,k}$ sont des opérateurs différentiels indépendants de $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p$. Les endomorphismes de $i^{-1}M$ de multiplication par x_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, forment alors une suite régulière. En particulier, Li^*M est quasi-isomorphe au complexe à un seul terme placé en degré 0 *:*

$$\frac{i^{-1}M}{\sum_{j=1}^{p} x_j i^{-1}M}$$

Démonstration. — Soit m une section de M. Par hypothèse, m est annulée par un opérateur P_1 unitaire de degré r_1 en $(\partial/\partial x_1)$. Constatons que si $x_1 m = 0$, le crochet $[P_1, x_1] = P_1 x_1 - x_1 P_1$ annule aussi la section m. Une récurrence sur r_1 établit alors que m est nulle. La multiplication à gauche par x_1 sur $i^{-1}M$ est donc injective. Comme le quotient $i^{-1}M/x_1 i^{-1}M$ est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}$-Module à gauche vérifiant la même hypothèse que M pour tout entier k, $2 \leqslant k \leqslant p$, le corollaire s'en déduit par récurrence.

Un résultat global. — Soient X une variété analytique complexe lisse et $Z \subset X$ une sous-variété (lisse) de codimension p. Nous noterons $i : Z \to X$, l'inclusion de Z dans X, et $\mathscr{I}_Z \subset \mathscr{O}_X$, le faisceau d'idéaux des fonctions nulles sur Z.

Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. On dit que M est *algébriquement supporté* par Z si toute section de M est localement annulée par une puissance de l'idéal $\mathscr{I}_Z$. Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, cette condition équivaut à ce que le support de M soit contenu dans Z. Associons à notre situation le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T^*Z \arrow[d] & Z \times_X T^*X \arrow[l, "I"'] \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d] & T^*X \arrow[d] \\
Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.4. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche, algébriquement supporté par Z, une sous-variété (lisse) de codimension p. Alors le complexe Li^*M n'a de la cohomologie qu'en degré $-p$. De plus, si M est $\mathscr{D}_X$-cohérent, de variété caractéristique $\operatorname{car} M$, le seul groupe de cohomologie non nul de Li^*M est $\mathscr{D}_Z$-cohérent. Sa variété caractéristique est $I\overline{i}^{-1}(\operatorname{car} M)$.*

Démonstration. — Cette proposition est de nature locale. Il résulte du corollaire 3.2 que dans un système de coordonnées locales où Z est définie par $x_1 = \cdots = x_p = 0$, le complexe Li^*M est isomorphe à :

$$\{u \in i^{-1}M \ : \ x_j u = 0 \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant p\}\,[p]$$

Notre proposition se déduit alors de [**Cimpa1**, prop. 18, p. 129], en procédant par récurrence sur l'entier p.

4. Produit tensoriel de $\mathscr{D}$-Modules et image inverse. — Soit X une variété analytique lisse. Soient M et N deux $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Le produit tensoriel :

$$M \otimes_{\mathscr{O}_X} N$$

est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. En coordonnées locales, cette structure est définie par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(m \otimes u) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}m\Big) \otimes u + m \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}u$$

pour toute section m (resp. u) de M (resp. N). On obtient ainsi un bi-foncteur :

$$\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X) \times \mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X) \ ; \ (M,N) \longmapsto M \otimes_{\mathscr{O}_X} N$$

Ce bi-foncteur donne naissance à un bi-foncteur dérivé :

$$D^-(\mathscr{D}_X) \times D^-(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^-(\mathscr{D}_X) \ ; \ (M,N) \longmapsto M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N$$

Proposition 4.1. — *Soient M et N des éléments de $D^-(\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X))$. Soit $f : \widetilde{X} \to X$ un morphisme de variétés analytiques. Il y a un isomorphisme naturel dans $D^-(\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_{\widetilde{X}}))$:*

$$Lf^*M \otimes^L_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}} Lf^*N \simeq Lf^*(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N)$$

Démonstration. — Soit $P^\bullet$ (resp. $S^\bullet$) un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche plats isomorphe à M (resp. N). Ainsi :

$$Lf^*(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N) \simeq Lf^*(P^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} S^\bullet)^\bullet$$

où $(P^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} S^\bullet)^\bullet$ désigne le complexe simple associé au complexe double $P^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} S^\bullet$. Chaque terme de ce complexe étant $\mathscr{O}_X$-plat, il vient :

$$\begin{aligned} Lf^*(P^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} S^\bullet)^\bullet &\simeq f^*(P^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} S^\bullet)^\bullet \\ &\simeq ((\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}P^\bullet) \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}} (\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}S^\bullet))^\bullet \end{aligned}$$

Comme $P^\bullet$ (resp. $S^\bullet$) est en particulier un complexe de $\mathscr{O}_X$-Modules plats, le complexe $\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}P^\bullet$ (resp. $\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}S^\bullet$) est un complexe de $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}$-Modules plats. On obtient donc :

$$\begin{aligned} Lf^*(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N) &\simeq (\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}P^\bullet) \otimes^\bullet_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}} (\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}S^\bullet) \\ &\simeq Lf^*M \otimes^L_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}} Lf^*N \end{aligned}$$

II. Images inverses non caractéristiques

1. Restrictions non caractéristiques. Définition et exemples. — Soit X une variété analytique complexe lisse et Y une sous-variété lisse de X. On désigne par T^*_YX le *fibré conormal* à Y. C'est la sous-variété du fibré cotangent à X définie par :

$$T^*_YX = \{(x,\ell) \in T^*_xX \ ; \ x \in Y \text{ et } \ell \text{ nulle sur } T_xY\}$$

où T_xY désigne l'espace tangent à Y en x. Remarquons que T^*_XX s'identifie à l'image de la section canonique $X \to T^*X$.

Définition 1.1. — Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent. La sous-variété Y de X est dite *non caractéristique* pour M si :

$$\operatorname{car} M \cap T^*_Y X \subset T^*_X X$$

où $\operatorname{car} M$ désigne la variété caractéristique de M. Dans le cas contraire, nous dirons que Y est *caractéristique* pour M.

Proposition 1.2. — *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche cohérents, et $Y \subset X$ une sous-variété lisse. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Y est non caractéristique pour M*
(2) *Y est non caractéristique pour M' et M''*

Démonstration. — Cela résulte de l'égalité entre variétés caractéristiques :

$$\operatorname{car} M = \operatorname{car} M' \cup \operatorname{car} M''$$

Voir [**Cimpa1**, prop. 14, p. 120].

Proposition 1.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent et Y une sous-variété lisse non caractéristique pour M. Notons i le morphisme d'inclusion de Y dans X. Alors $L^k i^* M = 0$ pour $k \neq 0$.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans un système de coordonnées locales dans lequel :

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n \; ; \; x_1 = \cdots = x_p = 0\}$$

Soit $\pi : (x, \xi) \in T^*\mathbf{C}^n \mapsto (x, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$. La restriction de π à $\operatorname{car} M$ est un morphisme fini. Compte-tenu du caractère conique de $\operatorname{car} M$, nous en déduisons qu'elle admet des équations de la forme :

$$(\xi_j)^r + a_1(x, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)(\xi_j)^{r-1} + \cdots + a_r(x, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n), \; 1 \leqslant j \leqslant p,$$

où les $a_\ell(x, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$ sont des fonctions analytiques en $x, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$, polynomiales et homogènes de degré ℓ — ou nulles — par rapport aux variables $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$. Il en résulte que, pour $1 \leqslant j \leqslant p$, toute section m de M est localement annulée par un opérateur de la forme :

$$P_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{r_j} + A_{1,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{r_j - 1} + \cdots + A_{r_j, j}$$

où les $A_{i,j}$ sont des opérateurs différentiels indépendants de $(\partial/\partial x_j)$, de degré inférieur ou égal à i et de symbole principal indépendant de $\xi_1, \ldots, \xi_p$. Par un théorème de division, on en déduit que M est localement de type fini sur le sous-faisceau d'anneaux de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$ dont les sections sont les opérateurs indépendants de $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p$. Les germes de ce sous-faisceau d'anneaux sont des anneaux noethériens. Nous en déduisons que nous sommes sous les hypothèses du corollaire I.3.3 et le résultat s'en déduit. Une autre preuve consiste à traiter le cas d'une hypersurface avec le corollaire I.3.3

et d'utiliser la proposition I.1.6 pour procéder par récurrence. De plus, le corollaire I.3.3 précise que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une suite régulière de $i^{-1}M$ et que i^*M s'identifie à $i^{-1}M/\sum_{j=1}^{p} x_j i^{-1}M$.

À titre d'exemple, donnons maintenant un procédé simple pour construire des $\mathscr{D}_X$-Modules cohérents admettant une hypersurface lisse donnée comme hypersurface non caractéristique.

Définition 1.4. — Un opérateur différentiel :

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^r + A_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{r-1} + \cdots + A_r$$

où les A_j sont des opérateurs différentiels indépendants de $(\partial/\partial x_1)$, de degré inférieur ou égal à j, est appelé *opérateur de Cauchy le long de* $\{x_1 = 0\}$ de degré r.

Proposition 1.5. — *Soit P un opérateur de Cauchy le long de $\{x_1 = 0\}$ de degré r. Alors l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ est non caractéristique pour le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche cohérent $M = \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}P$. De plus, si i désigne l'inclusion de $\{x_1 = 0\}$ dans $\mathbf{C}^n$, alors l'image inverse de M par i est canoniquement isomorphe à $(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}})^r$.*

Démonstration. — Désignons par $(x, \xi) = (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, les coordonnées canoniques de $T^*\mathbf{C}^n$. L'opérateur P s'écrit :

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^r + A_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{r-1} + \cdots + A_r$$

où $A_j = \sum_{|\alpha| \leqslant j} c_\alpha(x_1, \ldots, x_n)(\partial/\partial x_2)^{\alpha_2} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. Ainsi, le symbole principal $\sigma(P)(x, \xi)$ est un polynôme homogène en ξ de degré r, unitaire en ξ_1. Remarquons que la variété caractéristique de M est :

$$\{(x, \xi) \in T^*\mathbf{C}^n \ ; \ \sigma(P)(x, \xi) = 0\}$$

On en déduit facilement que l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ est non caractéristique pour M. D'après le corollaire I.3.3, l'image inverse de M est donc isomorphe à $i^{-1}M/x_1 i^{-1}M$. Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, posons :

$$\widetilde{A}_j = \sum_{|\alpha| \leqslant j} c_\alpha(0, x_2, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

On obtient facilement l'isomorphisme canonique :

$$i^{-1}M/x_1 i^{-1}M \simeq \frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}[\partial/\partial x_1]}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}\big((\partial/\partial x_1)^r + \widetilde{A}_1(\partial/\partial x_1)^{r-1} + \cdots + \widetilde{A}_r\big)}$$

D'où le résultat, ce dernier $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}$-Module étant clairement canoniquement isomorphe à $(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}})^r$.

Cohérence et variété caractéristique. — Notons $i : Y \to X$ l'inclusion de Y dans X. Considérons le diagramme naturel entre fibrés cotangents suivant :

$$\begin{array}{ccccc} T^*Y & \xleftarrow{\ I\ } & Y \times_X T^*X & \xrightarrow{\ \bar{i}\ } & T^*X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \Longleftarrow\!\!\Longrightarrow & Y & \xrightarrow{\ i\ } & X \end{array}$$

Proposition 1.6. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, de variété caractéristique* $\operatorname{car} M$*. Si Y est non caractéristique pour M, l'image inverse i^*M est un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche cohérent et sa variété caractéristique vérifie l'inclusion :*

$$\operatorname{car} i^*M \subset I\bar{i}^{-1}(\operatorname{car} M)$$

Démonstration. — La question est locale. En utilisant la fonctorialité de l'image inverse, on vérifie qu'il suffit d'établir cette proposition dans le cas où Y est l'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$ dans $X = \mathbf{C}^n$. Dans ce cas, toute section m de M est alors annulée localement par un opérateur de Cauchy le long de $\{x_1 = 0\}$. Sur un voisinage U d'un point de $\{x_1 = 0\}$, à partir d'un système de générateurs de $M|_U$, nous pouvons donc construire une suite exacte de $\mathscr{D}_U$-Modules à gauche :

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\mathscr{D}_U}{\mathscr{D}_U P_j} \xrightarrow{\ \phi\ } M|_U \longrightarrow 0$$

où les P_j sont des opérateurs de Cauchy le long de $\{x_1 = 0\}$. L'hypersurface d'équation $\{x_1 = 0\}$ étant encore non caractéristique pour $\ker \phi$ (proposition 1.2 et proposition 1.5), à diminuer l'ouvert U, on obtient une suite exacte :

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\mathscr{D}_U}{\mathscr{D}_U Q_k} \longrightarrow \sum_{j=1}^{r} \frac{\mathscr{D}_U}{\mathscr{D}_U P_j} \longrightarrow M|_U \longrightarrow 0$$

où les Q_k sont des opérateurs de Cauchy le long de $\{x_1 = 0\}$. Par exactitude (à droite) du foncteur image inverse et compte-tenu de la proposition 1.5, nous en déduisons l'exactitude de la suite de $\mathscr{D}_{Y\cap U}$-Modules à gauche :

$$(\mathscr{D}_{Y\cap U})^{\sum_{k=1}^{s} q_k} \longrightarrow (\mathscr{D}_{Y\cap U})^{\sum_{j=1}^{r} p_j} \longrightarrow (i^*M)|_{Y\cap U} \longrightarrow 0$$

où p_j (resp. q_k) est le degré en $(\partial/\partial x_1)$ de l'opérateur P_j (resp. Q_k). D'où la cohérence de i^*M.

Munissons $\mathscr{D}_U/\mathscr{D}_U P_j$ de la filtration quotient naturelle. Notons $(M|_U(k))$, la filtration de $M|_U$ induite par ϕ. On considère la filtration de $(i^*M)|_{Y\cap U}$ dont le terme d'ordre k est l'image de $i^*(M|_U(k))$ dans $(i^*M)|_{Y\cap U}$ par le morphisme naturel. C'est celle induite par la filtration de $i^*(\mathscr{D}_U/\mathscr{D}_U P_j)$ dont le terme d'ordre k est $i^*((\mathscr{D}_U/\mathscr{D}_U P_j)(k))$. Comme c'est une bonne filtration de $\mathscr{D}_{Y\cap U}$-Module, la filtration de $i^*M|_{Y\cap U}$ est également bonne. D'autre part, il résulte de l'hypothèse sur M que $i^*(\operatorname{gr} M|_U)$ est un $\operatorname{gr} \mathscr{D}|_{Y\cap U}$-Module cohérent. Un calcul de géométrie analytique nous apprend alors que la variété des zéros de l'annulateur dans $\operatorname{gr}\mathscr{D}|_{Y\cap U}$ de $i^*\operatorname{gr} M|_U$ est exactement $I\bar{i}^{-1}(\operatorname{car} M)$. L'inclusion cherchée résulte alors du morphisme naturel surjectif de $(\operatorname{gr}\mathscr{D})|_{Y\cap U}$-Modules :

$$i^*\operatorname{gr} M|_{Y\cap U} \longrightarrow \operatorname{gr} i^*M|_{Y\cap U} \longrightarrow 0$$

Théorème 1.7 **([K3], [K4])**. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, de variété caractéristique* $\operatorname{car} M$. *Si Y est non caractéristique pour M, le $\mathscr{D}_Y$-Module i^*M est cohérent, de variété caractéristique :*

$$\operatorname{car} i^*M = I\bar{i}^{-1}(\operatorname{car} M)$$

Démonstration. — Donnons l'idée d'une démonstration cohomologique de ce résultat (inspirée de celle donnée par J.E. Björk dans [**Bj**]). La proposition est de nature locale et, toujours par fonctorialité, il suffit de montrer la proposition dans le cas où Y est l'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$ dans $X = \mathbf{C}^n$.

Commençons par montrer le résultat sous l'hypothèse A : le $\mathscr{D}_X$-Module M admet une bonne filtration telle que la multiplication par $x_1 : \operatorname{gr} M \to \operatorname{gr} M$ est injective. Reprenons les filtrations de M et i^*M définies à la fin de la preuve de la proposition précédente. Sous l'hypothèse A, on vérifie facilement que le morphisme naturel :

$$i^*\operatorname{gr} M \longrightarrow \operatorname{gr} i^*M$$

est un isomorphisme, d'où la proposition.

Prouvons ensuite le théorème sous l'hypothèse B : le $\mathscr{D}_X$-Module M admet une bonne filtration telle que les sous-modules du gradué $\operatorname{gr} M$ ont la même dimension. Si la multiplication par $x_1 : \operatorname{gr} M \to \operatorname{gr} M$ n'était pas injective, $\operatorname{car} M$ aurait d'après l'hypothèse d'équidimensionalité une composante irréductible Λ supportée par $\{x_1 = 0\}$. Cette composante étant involutive par rapport à la 2-forme canonique de $T^*\mathbf{C}^n$, l'idéal des fonctions nulles sur Λ serait invariant par dérivation par rapport à ξ_1. La composante Λ serait définie par un idéal engendré par x_1 et des fonctions indépendantes de ξ_1, et l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ serait caractéristique pour M. L'hypothèse B entraîne donc l'hypothèse A et la proposition.

Prouvons maintenant le théorème sous l'hypothèse C : tous les sous-Modules de M ont la même codimension k. On rappelle [**Cimpa1**, p. 151] que la codimension de M est le plus petit des entiers i tels que, localement, $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}}(M,\mathscr{D})$ soit différent de zéro. En utilisant la suite spectrale de bidualité [**Cimpa1**, p. 151], on en déduit que M est un sous-Module de

$$E^{k,k} = \mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}}(\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}}(M,\mathscr{D}),\mathscr{D})$$

Utilisons une bonne filtration de $\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}}(M,\mathscr{D})$. Le Module $E^{k,k}$ admet alors [**Cimpa1**, p. 146] une bonne filtration dont le gradué est un quotient d'un sous-module de $\mathscr{E}xt^k_{\operatorname{gr}\mathscr{D}}(\operatorname{gr}\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}}(M,\mathscr{D}),\operatorname{gr}\mathscr{D})$. La codimension de $\operatorname{gr}\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}}(M,\mathscr{D})$ est k. Par un argument d'algèbre commutative que nous admettrons, on peut affirmer que tous les sous-Modules de $\mathscr{E}xt^k_{\operatorname{gr}\mathscr{D}}(\operatorname{gr}\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}}(M,\mathscr{D}),\operatorname{gr}\mathscr{D})$ ont la même codimension k. Il en est donc de même du gradué de $E^{k,k}$. La bonne filtration sur $E^{k,k}$ induit alors une bonne filtration sur M. Le gradué de M pour cette filtration étant alors un sous-Module du gradué de $E^{k,k}$, nous sommes donc sous l'hypothèse B. La proposition est donc prouvée sous l'hypothèse C.

Terminons la preuve du théorème. Pour tout entier j, notons $M_j \subset M$, le plus grand sous-Module cohérent de codimension supérieure ou égale à j. Son existence est montrée dans [**Cimpa1**, th. 9, p. 152]. Soit $\ell \in \mathbf{N}$, le plus grand entier tel que M_ℓ soit non nul. Considérons la suite :

$$0 \longrightarrow M_\ell \longrightarrow M \longrightarrow M/M_\ell \longrightarrow 0$$

L'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ étant non caractéristique pour ces trois $\mathscr{D}$-Modules, nous avons donc la suite exacte de $\mathscr{D}_Y$-Modules :

$$0 \longrightarrow i^*M_\ell \longrightarrow i^*M \longrightarrow i^*M/M_\ell \longrightarrow 0$$

Elle est vraie pour M_ℓ, et par récurrence sur ℓ, pour M/M_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$. La proposition résulte alors des égalités :

$$\operatorname{car} i^*M = \operatorname{car} i^*M_\ell \cup \operatorname{car} i^*M/M_\ell$$
$$I\overline{i}^{-1}(\operatorname{car} M) = I\overline{i}^{-1}(\operatorname{car} M_\ell) \cup I\overline{i}^{-1}\big(\operatorname{car} M/M_\ell\big)$$

De plus, comme tout Module holonome vérifie l'hypothèse C, la remarque suivante résulte de cette preuve.

Remarque 1.8. — Soit M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche holonome. Si la sous-variété Y d'équations $x_1 = \cdots = x_p = 0$ est non caractéristique pour M, il existe une bonne filtration de M telle que $(x_1, \ldots, x_p)$ soit une suite régulière pour le gradué $\operatorname{gr} M$. La restriction i^*M de M à Y possède alors une bonne filtration dont le gradué est isomorphe à $i^* \operatorname{gr} M$.

Remarque 1.9. — Notons que sous les hypothèses du théorème 1.7, nous avons établi dans sa preuve que $\dim(I\overline{i}^{-1}(\operatorname{car} M)) = \dim(\operatorname{car} M) - \operatorname{codim} Y$. Ainsi, $\dim(\operatorname{car} i^*M) = \dim(\operatorname{car} M) - \operatorname{codim} Y$.

2. Images inverses non caractéristiques. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés analytiques complexes lisses. Associons à f le diagramme naturel entre espaces cotangents :

$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[d] & X \times_Y T^*Y \arrow[l, "F"'] \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & T^*Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Définition 2.1. — Soit M un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche cohérent. Notons $\operatorname{car} M$ sa variété caractéristique. On dit que le morphisme f est *non caractéristique* pour M si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- La restriction de F à $\overline{f}^{-1}(\operatorname{car} M)$ est finie (c'est-à-dire propre à fibres de cardinal fini).
- La restriction de F à $\overline{f}^{-1}(\operatorname{car} M)$ est à fibres de cardinal fini.
- Si G_f est le graphe de f dans $X \times Y$:

$$T^*_{G_f} X \times Y \cap \{(x, y, 0, \eta)\,;\,(y, \eta) \in \operatorname{car} M\} \subset T^*_{X \times Y} X \times Y$$

L'équivalence de ces définitions se montre en utilisant que $\operatorname{car} M$ est conique relativement aux fibres du fibré cotangent à X. Remarquons que la dernière condition signifie exactement que le graphe de f est non caractéristique pour $\pi^* M$, π étant la projection de $X \times Y$ sur Y. Factorisons le morphisme f à travers son graphe :

$$X \xrightarrow{\ i\ } X \times Y \xrightarrow{\ \pi\ } Y$$
$$x \longmapsto (x, f(x)) \ \ ; \ \ (x, y) \longmapsto y$$

Le théorème suivant résulte alors de la proposition 1.3, du théorème 1.7 et de la proposition I 2.1.

Théorème 2.2 **([K3])**. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés analytiques complexes lisses et M un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche cohérent. Notons* $\operatorname{car} M$ *la variété caractéristique de M. Supposons que f est non caractéristique pour M. Alors :*

(1) $Lf^* M \simeq f^* M$

(2) *$f^* M$ est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, de variété caractéristique :*

$$F \overline{f}^{-1}(\operatorname{car} M)$$

3. Systèmes de Cauchy généralisés. Définition et premiers résultats

Définition 3.1. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Soient m, $r_1, \ldots, r_m$, des entiers naturels non nuls ; notons $N \in \mathbf{N}^*$ la somme $r_1 + \cdots + r_m$. Soit $\rho(1) < \cdots < \rho(m)$, une suite strictement croissante d'entiers. Soit A une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\mathscr{D}_U$ indépendants de $(\partial/\partial x_1)$, formée de blocs $A_{i,j}$ de taille $r_i \times r_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, dont les coefficients ont leur degré inférieur ou égal à $\rho(i) - \rho(j) + 1$. Par convention i (resp. j) désigne l'indice de la ligne (resp. de la colonne). Le $\mathscr{D}_U$-Module à gauche cohérent :

$$M(A) = \frac{(\mathscr{D}_U)^N}{(\mathscr{D}_U)^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)}$$

est appelé *système de Cauchy généralisé* (le long de $\{x_1 = 0\}$).

Exemple : $N = 3$, $m = 3$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $\rho(1) = 0$, $\rho(2) = 2$, $\rho(3) = 3$

La matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ (\frac{\partial}{\partial x_2})^3 & \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} & x_1 + x_2^2 \\ (\frac{\partial}{\partial x_2})^4 & (\frac{\partial}{\partial x_2})^2 + 1 & \frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

définit un système de Cauchy. Munissons $(\mathscr{D}_U)^N$ de la filtration décalée dont le terme d'ordre k est :

$$F^k(\mathscr{D}_U)^N = (\mathscr{D}_U(k-\rho(1)))^{r_1} \times \cdots \times (\mathscr{D}_U(k-\rho(m)))^{r_m}$$

pour $k \in \mathbf{N}$. Remarquons que la condition portant sur A est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit à droite par A envoie $F^k(\mathscr{D}_U)^N$ sur $F^{k+1}(\mathscr{D}_U)^N$. On munit alors $M(A)$ de la filtration $(F^k M(A))_{k\in\mathbf{N}}$ induite par $(F^k(\mathscr{D}_U)^N)_{k\in\mathbf{N}}$. Considérons la suite exacte de $\mathscr{D}_U$-Modules à gauche :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow (\mathscr{D}_U)^N \xrightarrow{\times(\partial/\partial x_1 - A)} (\mathscr{D}_U)^N \xrightarrow{\pi} M(A) \longrightarrow 0$$

où $\times(\partial/\partial x_1 - A)$ désigne la multiplication à droite par $(\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A$ et π le passage au quotient. Munis des filtrations $F^\bullet$, ces morphismes sont respectivement de degré $+1$ et 0. Pour $r \in \mathbf{Z}$, notons $\operatorname{gr}\mathscr{D}_U[r]$ le $\operatorname{gr}\mathscr{D}_U$-Module gradué dont les éléments homogènes de degré k sont les symboles principaux des opérateurs de degré $k-r$. La suite exacte $(*)$ induit le complexe de $\operatorname{gr}\mathscr{D}_U$-Modules :

$$(**) \quad 0 \to \bigoplus_{i=1}^{m} (\operatorname{gr}\mathscr{D}_U[\rho_i+1])^{r_i} \xrightarrow{\times(\xi_1 - \sigma(A))} \bigoplus_{i=1}^{m} (\operatorname{gr}\mathscr{D}_U[\rho_i])^{r_i} \longrightarrow \operatorname{gr}^F M(A) \to 0$$

où $\sigma(A)$ est la matrice formée des blocs $\sigma(A_{i,j})$ dont les coefficients sont les symboles de degré $\rho(i)-\rho(j)+1$ de $A_{i,j}$ et $\times(\xi_1 - \sigma(A))$ est la multiplication à droite par la matrice $\xi_1 \operatorname{Id}_N - \sigma(A)$. On vérifie alors que la multiplication par $\xi_1 \operatorname{Id}_N - \sigma(A)$ est injective. Nous laissons au lecteur le soin de montrer l'exactitude au milieu de la suite $(**)$ qui est donc une suite exacte de $\operatorname{gr}\mathscr{D}_U$-Modules. Nous en déduisons alors que la racine de l'annulateur de $\operatorname{gr}^F M(A)$ est égale à :

$$\sqrt{\det(\xi_1 \operatorname{Id} - \sigma(A)) \operatorname{gr}\mathscr{D}_U}$$

Ainsi la variété caractéristique de $M(A)$ est définie par l'équation :

$$\det(\xi_1 \operatorname{Id}_N - \sigma(A)) = 0$$

qui est un polynôme homogène en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de degré N, unitaire en ξ_1. L'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$ est donc non caractéristique pour $M(A)$. De plus, $\operatorname{gr}^F M(A)$ est un $\mathscr{O}_U[\xi_2, \ldots, \xi_n]$-Module libre. Nous avons montré la proposition :

Proposition 3.2. — *Soit $M(A)$ un système de Cauchy le long de $\{x_1 = 0\}$.*

(1) *L'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$ est non caractéristique pour $M(A)$.*

(2) *Le gradué $\operatorname{gr}^F M(A)$ pour la filtration $F^\bullet M(A)$ associée à $M(A)$ est un $\mathscr{O}_U[\xi_2, \ldots, \xi_n]$-Module libre.*

Résolution locale par des systèmes de Cauchy. — Reprenons les notations et définitions précédentes. Nous allons préciser quelques résultats sur les restrictions locales à des hypersurfaces non caractéristiques.

Proposition 3.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module cohérent muni d'une bonne filtration. Soit $\operatorname{gr} M_0$ la fibre à l'origine du faisceau $\operatorname{gr} M$.*

a) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *Le* $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$*-module* $\operatorname{gr} M_0$ *est de type fini*
- *Au voisinage de l'origine, l'hypersurface d'équation* $\{x_1=0\}$ *est non caractéristique pour* M.

b) *Si le* $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$*-module* $\operatorname{gr} M_0$ *est libre de type fini,* M *est localement isomorphe à un système de Cauchy généralisé le long de* $\{x_1=0\}$.

Démonstration. — Le point a) résulte du fait que l'hypothèse non caractéristique se traduit par l'existence de polynômes unitaires en la variable ξ_1 dans l'annulateur du gradué de M. Prouvons le point b). Supposons que $\operatorname{gr} M_0$ soit un module libre de type fini sur $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$. Soit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N$ une base homogène de $\operatorname{gr} M_0$. Quitte à réordonner les indices, il existe des entiers non nuls m, $r_1,\dots,r_m\in\mathbf{N}^*$ et une suite d'entiers strictement croissante $\rho(1)<\cdots<\rho(m)$ tels que pour tout k, $1\leqslant k\leqslant m$, le vecteur $\varepsilon_{r_1+\cdots+r_{k-1}+j}$ est homogène de degré $\rho(k)$ pour tout entier j, $1\leqslant j\leqslant r_k$. Alors $\xi_1\varepsilon_j$ s'exprime comme combinaison linéaire homogène des ε_i à coefficients dans $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$. Ainsi $\operatorname{gr} M_0$ admet une présentation graduée :

$$0\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{m}(\operatorname{gr}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}[\rho(j)+1])^{r_j}\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{m}(\operatorname{gr}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}[\rho(j)])^{r_j}\longrightarrow\operatorname{gr} M_0\longrightarrow 0$$

Il résulte de la liberté de $\operatorname{gr} M_0$ que cette suite est exacte. Relevons les ε_i en des éléments e_i de M. Ces sections engendrent M_0, germe à l'origine du $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module M. On obtient la présentation :

$$0\longrightarrow(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0})^N\xrightarrow{\ \times(\partial/\partial x_1-A)\ }(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0})^N\longrightarrow M_0\longrightarrow 0$$

où $N\in\mathbf{N}^*$ est la somme $r_1+\cdots+r_m$ et A est obtenue en relevant les relations entre les ε_i. On vérifie qu'il s'agit d'une suite exacte et que la matrice A a les propriétés de la définition 3.1. La fibre à l'origine de M est donc isomorphe à un système de Cauchy. La cohérence de M permet de déduire l'isomorphisme attendu.

Proposition 3.4. — *Soit* M *un* $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$*-Module à gauche cohérent pour lequel l'hyperplan* H *d'équation* $\{x_1=0\}$ *est non caractéristique. Alors, localement au voisinage de tout point de* H, M *admet une résolution de longueur* $2n-1$ *par des systèmes de Cauchy relativement à* H.

Démonstration. — Sans perte de généralité, nous travaillons sur un voisinage de l'origine. Considérons une bonne filtration sur M. L'hypersurface H étant non caractéristique pour M, le germe $\operatorname{gr} M_0$ du gradué de M est un module de type fini sur $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$ d'après la proposition précédente. Un résultat d'algèbre [**Mat**] assure alors l'existence d'une résolution de $\operatorname{gr} M_0$ de longueur $2n-1$ par des $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$ modules libres. Suivant [**Cimpa1**, prop. 27, p. 145], nous pouvons relever cette résolution en une résolution de M_0 par des modules munis de bonnes filtrations dont les gradués sont des $\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}[\xi_2,\dots,\xi_n]$-modules libres.

D'après la proposition précédente, ces modules sont des germes à l'origine de systèmes de Cauchy. La cohérence de M permet de déduire la résolution attendue à partir de la présentation de la fibre de M en zéro.

4. Application au produit tensoriel de $\mathscr{D}$-Modules. — Si X est une variété analytique lisse, rappelons que $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)$ désigne la catégorie des $\mathscr{D}$-Modules à gauche. Soient X et Y deux variétés analytiques lisses de dimension n et m respectivement. Notons $Z = X \times Y$ et p (resp. q) la projection de Z sur X (resp. Y). Si M (resp. N) est un $\mathscr{D}_X$-Module (resp. $\mathscr{D}_Y$-Module) à gauche, nous noterons :

$$M \boxtimes N = p^* M \otimes_{\mathscr{O}_Z} q^* N \simeq p^{-1} M \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \otimes_{q^{-1}\mathscr{O}_Y} q^{-1} N$$

Le $\mathscr{O}_Z$-Module $M \boxtimes N$ est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{D}_Z$-Module. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ (resp. $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{C}^m$) un système de coordonnées locales de X (resp. Y). Si m' (resp. n') est une section locale de M (resp. N) et h une section locale de $\mathscr{O}_Z$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(m' \otimes h \otimes n') = \frac{\partial}{\partial x_i} m' \otimes h \otimes n' + m' \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} h \otimes n'$$
$$\frac{\partial}{\partial y_j}(m' \otimes h \otimes n') = m' \otimes h \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} n' + m' \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} h \otimes n'$$

En revenant à la définition des opérateurs différentiels, on remarque que $p^*\mathscr{D}_X$ et $q^*\mathscr{D}_Y$ s'injectent canoniquement dans $\mathscr{D}_Z$. On obtient alors une identification entre $\mathscr{D}_X \boxtimes \mathscr{D}_Y$ et $\mathscr{D}_Z$.

Lemme 4.1. — *Le bifoncteur de* $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X) \times \mathrm{Mod}(\mathscr{D}_Y)$ *vers* $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_Z)$ *défini par* $(M, N) \to M \boxtimes N$ *est exact.*

Démonstration. — L'énoncé reste en fait vrai pour le même foncteur de $\mathrm{Mod}(\mathscr{O}_X) \times \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_Y)$ vers $\mathrm{Mod}(\mathscr{O}_Z)$ et la preuve en est identique. Il suffit de montrer que $\mathscr{O}_Z \otimes_{q^{-1}\mathscr{O}_Y} q^{-1}N$ est $p^{-1}\mathscr{O}_X$-plat. Pour ce faire, établissons que pour tout idéal I de $p^{-1}\mathscr{O}_X$, on a une injection :

$$(*) \qquad I \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \otimes_{q^{-1}\mathscr{O}_Y} q^{-1}N \hookrightarrow p^{-1}\mathscr{O}_X \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \otimes_{q^{-1}\mathscr{O}_Y} q^{-1}N$$

Mais $\mathscr{O}_Z$ étant $p^{-1}\mathscr{O}_X$ plat, nous avons la suite exacte :

$$I \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \xhookrightarrow{i} \mathscr{O}_Z \longrightarrow \mathscr{O}_Z/\widetilde{I} \longrightarrow 0$$

où $\widetilde{I}$ désigne l'image de i. Pour montrer $(*)$, il suffit donc de constater que $\mathscr{O}_Z/\widetilde{I}$ est $q^{-1}\mathscr{O}_Y$-plat. Cela résulte du critère de platitude local (voir [**Mat**] th. 22.2 p. 173).

Lemme 4.2. — *Soit M (resp. N) un $\mathscr{D}_X$-Module (resp. $\mathscr{D}_Y$-Module) cohérent. Alors le produit $M \boxtimes N$ est $\mathscr{D}_Z$-cohérent.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{D}_X^{r''} \to \mathscr{D}_X^{r'} \to M \to 0$ et $\mathscr{D}_Y^{\ell''} \to \mathscr{D}_Y^{\ell'} \to N \to 0$, des présentations locales de M et N. Nous construisons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 & 0 & 0 & \\ \mathscr{D}_X^{r''} \boxtimes N \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{D}_X^{r'} \boxtimes N \arrow[r] \arrow[u] & M \boxtimes N \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ \mathscr{D}_X^{r''} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell'} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{D}_X^{r'} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell'} \arrow[r] \arrow[u] & M \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell'} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ \mathscr{D}_X^{r''} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell''} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{D}_X^{r'} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell''} \arrow[r] \arrow[u] & M \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell''} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

Nous en déduisons la suite exacte de $\mathscr{D}_X \boxtimes \mathscr{D}_Y$-Modules suivante :

$$\mathscr{D}_X^{r''} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell'} \oplus \mathscr{D}_X^{r'} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell''} \longrightarrow \mathscr{D}_X^{r'} \boxtimes \mathscr{D}_Y^{\ell'} \longrightarrow M \boxtimes N \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathscr{D}_X \boxtimes \mathscr{D}_Y$ s'identifie à $\mathscr{D}_Z$, on obtient une présentation de $M \boxtimes N$ comme $\mathscr{D}_Z$-Module, qui est donc $\mathscr{D}_Z$-cohérent.

Proposition 4.3. — *Soit M (resp. N) un $\mathscr{D}_X$-Module (resp. $\mathscr{D}_Y$-Module) à gauche cohérent de variété caractéristique* $\operatorname{car} M$ *(resp.* $\operatorname{car} N$*). Identifions $T^*X \times T^*Y$ et T^*Z. Alors $M \boxtimes N$ est $\mathscr{D}_Z$-cohérent, de variété caractéristique* $\operatorname{car} M \times \operatorname{car} N$.

Démonstration. — La cohérence résulte du lemme précédent. En utilisant l'exactitude du bifoncteur $(M, N) \to M \boxtimes N$ et en raisonnant par récurrence sur le nombre de générateurs de M et N, on est ramené à établir ce résultat sur la variété caractéristique de $M \boxtimes N$ dans le cas où M et N sont monogènes.

Soit I (resp. J) un idéal à gauche de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^m,0}$). Le produit $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}/I \boxtimes \mathscr{D}_{\mathbf{C}^m,0}/J$ s'identifie à $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}/I \mathbin{\widehat{+}} J$ où $I \mathbin{\widehat{+}} J$ désigne l'idéal de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}$ engendré par les opérateurs de I et de J. Désignons par $\operatorname{in} I$ (resp. $\operatorname{in} J$) l'idéal de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^m,0}[\eta_1, \ldots, \eta_m]$) engendré par les symboles des éléments de I (resp. de J). Soient $\operatorname{in}(I \mathbin{\widehat{+}} J)$, $\operatorname{in} I \mathbin{\widehat{+}} \operatorname{in} J$ les idéaux de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n+m},0}[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m]$ engendrés respectivement par les symboles des éléments de $I \mathbin{\widehat{+}} J$ et par les éléments de $\operatorname{in} I$ et $\operatorname{in} J$. La proposition résultera de l'égalité :

$$(*) \qquad \operatorname{in}(I \mathbin{\widehat{+}} J) = \operatorname{in} I \mathbin{\widehat{+}} \operatorname{in} J$$

Reprenons les notations du cours de F. Castro et M. Granger. Considérons les formes linéaires L' (resp. L'', L) sur $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^n$ (resp. sur $\mathbf{Q}^m \times \mathbf{Q}^m$, $\mathbf{Q}^{n+m} \times \mathbf{Q}^{n+m}$) définies par $L'(\alpha', \beta') = \sum_{i=1}^n \beta'_i$ (resp. $L''(\alpha'', \beta'') = \sum_{i=1}^m \beta''_i$, $L(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'') = L'(\alpha', \beta') + L''(\alpha'', \beta'')$). Munissons $\mathbf{N}^{2n}$, $\mathbf{N}^{2m}$ de l'ordre lexicographique. Alors, pour $\star \in \{', '', \varnothing\}$, le $L^\star$-symbole principal coïncide avec le symbole principal usuel d'un opérateur. Soit $(P_1, \ldots, P_r)$ (resp. $(Q_1, \ldots, Q_\ell)$) une L'-base standard de I (resp. L''-base standard de J). Alors les symboles principaux $(\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_r))$ (resp. $(\sigma(Q_1), \ldots, \sigma(Q_\ell))$) forment une base standard de $\operatorname{gr} I$ (resp. $\operatorname{gr} J$). D'après la proposition 2.5.1 [**C-G**], les opérateurs $(P_1, \ldots, P_r)$ (resp. $(Q_1, \ldots, Q_\ell)$) forment une

L-base standard de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}I$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}J$), l'idéal de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}$ engendré par les opérateurs de I (resp. J). Soit $U \in (I \mathbin{\widehat{+}} J)$; il s'écrit donc :

$$U = \sum U_i P_i + \sum V_j Q_j$$

Par division des opérateurs V_j par les opérateurs $(P_1, \ldots, P_r)$, on obtient :

$$U = \sum U'_i P_i + \sum W_j Q_j$$

où le nuage de chaque W_j est disjoint de $\cup(\mathrm{Exp}(P_i) + \mathbf{N}^{2n+2m})$. En particulier, si le symbole de $\sum U'_i P_i$ est égal à celui de $\sum W_j Q_j$, ces symboles sont nuls. Ainsi, le symbole de U est dans la somme de l'idéal engendré par les symboles des opérateurs de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}I$ et de l'idéal engendré par les symboles des opérateurs de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}J$. Comme $(P_1, \ldots, P_r)$ (resp. $(Q_1, \ldots, Q_\ell)$) est une L-base standard de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}I$ (resp. de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n+m},0}J$), le symbole de U est donc dans $\mathrm{in}\, I \mathbin{\widehat{+}} \mathrm{in}\, J$. Nous en déduisons le résultat : $\mathrm{in}(I \mathbin{\widehat{+}} J) = \mathrm{in}\, I \mathbin{\widehat{+}} \mathrm{in}\, J$.

On suppose maintenant $X = Y$. Notons δ l'inclusion :

$$X \xrightarrow{\ \delta\ } X \times X \ ; \ x \longmapsto (x, x)$$

Soient M et N deux $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Leur produit tensoriel :

$$M \otimes_{\mathscr{O}_X} N$$

est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche (voir paragraphe I.4). Remarquons que le $\mathscr{D}_X$-Module $\delta^*(M \boxtimes N)$ s'identifie à $M \otimes_{\mathscr{O}_X} N$. Soit $\mathrm{car}\, M$ (resp. $\mathrm{car}\, N$) la variété caractéristique de M (resp. N). Grâce à la proposition précédente, on vérifie que l'hypothèse $\mathrm{car}\, M \cap \mathrm{car}\, N \subset T^*_X X$ se traduit par la condition : $\delta(X) \subset X \times X$ est non caractéristique pour $M \boxtimes N$. La proposition suivante est alors une conséquence directe du théorème 1.7 et de la remarque 1.9.

Proposition 4.4 **([K2])**. — *Soient M, N deux $\mathscr{D}_X$-Modules cohérents, de variété caractéristique* $\mathrm{car}\, M$, $\mathrm{car}\, N$. *Supposons que* $\mathrm{car}\, M \cap \mathrm{car}\, N \subset T^*_X X$. *Alors le produit tensoriel $M \otimes_{\mathscr{O}_X} N$ est $\mathscr{D}_X$-cohérent, de variété caractéristique :*

$$\mathrm{car}\, M \mathbin{\widehat{+}} \mathrm{car}\, N = \{(x, \xi_1 + \xi_2) \ ; \ (x, \xi_1) \in \mathrm{car}\, M, \ (x, \xi_2) \in \mathrm{car}\, N\}$$

et en particulier, de dimension $\dim \mathrm{car}\, M + \dim \mathrm{car}\, N - \dim X$.

III. Équations fonctionnelles d'un $\mathscr{D}$-Module holonome

1. Équations de Bernstein. — Soient X une variété analytique complexe lisse de dimension n et $f : X \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non constante. Si M est un $\mathscr{O}_X$-Module, nous notons par $M[1/f]$ le localisé de M par le système multiplicatif des puissances de f, et :

$$M[1/f, s] = \mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} M[1/f]$$

Soit L un $\mathscr{O}_X[1/f,s]$-Module libre de rang un muni d'un générateur noté f^s ; ainsi $L = \mathscr{O}_X[1/f,s]f^s$. Pour toute section a de $\mathscr{O}_X[1/f,s]$, pour tout entier relatif k, on pose :

$$af^{s-k} = a\frac{1}{f^k}f^s$$

Considérons $\mathscr{D}_X[s] = \mathbf{C}[s]\otimes_{\mathbf{C}}\mathscr{D}_X$, le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathscr{O}_X[s]$. Le faisceau L est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X[s]$-Module à gauche, définie en coordonnées locales par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af^s) = \frac{\partial a}{\partial x_i}f^s + sa\frac{\partial f}{\partial x_i}f^{s-1}$$

pour toute section $a \in \mathscr{O}_X[1/f,s]$.

Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche, $M \otimes_{\mathscr{O}_X} L$ est de façon naturelle un $\mathscr{D}_X[s]$-Module à gauche (voir le sous-paragraphe I.4). On a les isomorphismes naturels de $\mathscr{O}_X[1/f,s]$-Modules :

$$M \otimes_{\mathscr{O}_X} L \simeq M[1/f,s] \otimes_{\mathscr{O}_X[s]} L \simeq M[1/f,s]$$

Pour toute section m de $M[1/f,s]$, nous désignons par mf^s la section $m \otimes f^s$. Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.1 **([K1], [K2])**. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, holonome en dehors de $\{f=0\}$. Soit m une section de M. Localement au voisinage de tout point où m est définie, il existe une équation fonctionnelle dans $M[1/f,s]f^s$:*

$$b(s)mf^s = Pmf^{s+1}$$

où $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ est un polynôme non nul et P une section de $\mathscr{D}_X[s]$.

La preuve nécessite quelques résultats techniques.

Lemme 1.2. — *Soit m une section d'un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent. Le $\mathscr{D}_X$-Module à gauche engendré par mf^s est cohérent.*

Démonstration. — Constatons que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, $\mathscr{D}_X(k)mf^s$ s'écrit :

$$\mathscr{D}_X(k)mf^s = G(k)f^{s-k}$$

où $G(k)$ est un sous $\mathscr{O}_X$-Module de type fini de $\mathscr{D}_X(k)m \oplus \cdots \oplus \mathscr{D}_X(0)ms^k$. Ce dernier terme étant un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, $G(k)$ est donc $\mathscr{O}_X$-cohérent. Ainsi, $\mathscr{D}_X(k)mf^s$ est le quotient d'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent par ses éléments de f-torsion. Il est donc cohérent [**Cimpa1**, lemme 1, p. 117]. Par suite, $(\mathscr{D}_X(k)mf^s)_{k\in\mathbf{N}}$ est une bonne filtration de $\mathscr{D}_X mf^s$. La cohérence de $\mathscr{D}_X mf^s$ s'en déduit [**Cimpa1**, cor. 1, p. 121].

Lemme 1.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, holonome en dehors de $\{f=0\}$. Soit* $\operatorname{car} M$, *sa variété caractéristique. Quitte à se restreindre à un voisinage de $\{f=0\}$, l'ensemble :*

$$\operatorname{car} M \cap \{(x, \lambda\,\mathrm{d}f)\ ;\ x \in X - f^{-1}(0)\ ;\ \lambda \in \mathbf{C}\}$$

est contenu dans $T^*_X X$.

Démonstration. — Par hypothèse, les composantes de $\operatorname{car} M$ de dimension supérieure ou égale à $n+1$ sont contenues dans $\{f=0\}$. Notons $(\Lambda_\beta)_{\beta\in B}$ les composantes irréductibles de dimension n de $\operatorname{car} M$ et π la projection canonique $T^*X \to X$. D'après le théorème d'involutivité, ces composantes sont lagrangiennes. Ainsi, la projection $Y_\beta \subset X$ de Λ_β est un sous-espace analytique et $\Lambda_\beta = T^*_{Y_\beta}X$, l'adhérence de l'ensemble des vecteurs conormaux à la partie lisse de Y_β [**Cimpa1**, prop. 20, p. 133]. En résumé :

$$\operatorname{car} M \subset \bigcup_{\beta\in B} T^*_{Y_\beta}X \cup \pi^{-1}(f^{-1}(0))$$

Soit $B' = \{\beta \in B\,;\, Y_\beta \not\subset f^{-1}(0)\}$. Considérons alors une stratification localement finie de X par des variétés analytiques complexes lisses $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ vérifiant la condition a de Whitney (voir [**Cimpa1**, p. 94], par exemple), et telle que $\{f=0\}$ (resp. Y_β pour $\beta \in B'$) soit une réunion de strates. Notons $\widehat{T}^*_{X_\alpha}X$, l'ensemble des vecteurs conormaux à X_α. Il résulte de la condition a que :

$$\operatorname{car} M \subset \bigcup_{\alpha\in A'} \widehat{T}^*_{X_\alpha}X \cup \pi^{-1}(f^{-1}(0))$$

où $A' = \{\alpha \in A\,;\, X_\alpha \cap f^{-1}(0) = \varnothing\}$. Soit $\alpha \in A'$. Quitte à se restreindre à un voisinage de $f^{-1}(0)$, nous pouvons supposer que $f|_{X_\alpha}$ est une submersion. Sinon, il existe un chemin analytique $\gamma(t)$ avec $\gamma(0) \in f^{-1}(0)$ et $\gamma(t)$ point critique de $f|_{X_\alpha}$ pour t petit non nul. Par suite, $t \mapsto f(\gamma(t))$ est constante, donc nulle ; ce qui contredit $X_\alpha \cap f^{-1}(0) = \varnothing$. Le lemme en résulte.

Proposition 1.4. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module cohérent à gauche, holonome en dehors de $\{f=0\}$. Pour toute section m de M :*

$$\dim \mathscr{D}_X m f^s \leqslant \dim X + 1$$

Démonstration. — D'après le lemme des petits chemins, nous pouvons supposer que 0 est la seule valeur critique de f, quitte à se restreindre à un voisinage de $\{f=0\}$. Un calcul en coordonnées locales permet alors de vérifier facilement les deux points suivants :

(1) en dehors de $\{f=0\}$, $\mathscr{D}_X f^s = \mathscr{O}_X[1/f, s]f^s$

(2) en dehors de $\{f=0\}$, la variété caractéristique de $\mathscr{D}_X f^s$ est :

$$\operatorname{car} \mathscr{D}_X f^s = \{(x, \lambda\, \mathrm{d}f(x))\ ;\ x \in X - f^{-1}(0)\ ,\ \lambda \in \mathbf{C}\}$$

qui est de dimension $\dim X + 1$.

On déduit alors du lemme 1.3 (voir la proposition II.4.4) qu'en dehors de $\{f=0\}$, le produit tensoriel $M \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X[1/f,s]f^s$ est un $\mathscr{D}_X$-Module cohérent de dimension : $\dim \operatorname{car} M + \dim X + 1 - \dim X = n+1$. Ainsi, pour toute section m de M, le $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent $\mathscr{D}_X m f^s$ est de dimension $n+1$ en dehors de $\{f=0\}$. En suivant [**Cimpa1**, th. 9, p. 152], considérons $\mathscr{L} \subset \mathscr{D}_X m f^s$, le plus grand sous $\mathscr{D}_X$-Module cohérent de $\mathscr{D}_X m f^s$ de dimension inférieure ou égale à $n+1$. Nous venons de montrer que le quotient $\mathscr{D}_X mf^s/\mathscr{L}$ est supporté par l'hypersurface $\{f = 0\}$. En appliquant le théorème des zéros de Hilbert à l'image de $\mathscr{O}_X mf^s$ dans $\mathscr{D}_X mf^s/\mathscr{L}$ au voisinage de tout point où m est définie, il existe donc un entier k tel que $mf^{s+k} \in \mathscr{L}$; en particulier $\mathscr{D}m\otimes f^{s+k}$ est de dimension au plus égale à $n+1$. En constatant que les $\mathscr{D}_X$-Modules $\mathscr{D}_X mf^s$ et $\mathscr{D}_X m\otimes f^{k+s}$ sont isomorphes, nous en déduisons que $\mathscr{D}_X mf^s$ est de dimension inférieure ou égale à $n + 1$, comme annoncé.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.1.

Démonstration. — Au voisinage d'un point du complémentaire de $\{f = 0\}$, l'assertion est évidente. Pour traiter l'autre cas, considérons la fonction holomorphe :

$$g : X \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}\ ;\ (x, u) \longmapsto e^u f(x)$$

Notons $p : X \times \mathbf{C} \to X$, la première projection. D'après le paragraphe I.2, l'image inverse $p^*M = \mathscr{O}_{X\times\mathbf{C}} \otimes_{p^{-1}\mathscr{O}_X} p^{-1}M$, est un $\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}$-Module cohérent et holonome en dehors de $p^{-1}(f^{-1}(0))$, donc de $g^{-1}(0)$.

Soit m une section de M définie au voisinage d'un point ω de $\{f = 0\}$. Notons $m' = 1 \otimes m$, la section de p^*M définie au voisinage de $(\omega, 0)$. Remarquons que :

$$\frac{\partial}{\partial u} m' g^s = sm' g^s$$

Ainsi, au voisinage de $(\omega, 0)$:

$$\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}[s]m'g^s = \mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}m'g^s$$

Considérons alors, au voisinage de $(\omega, 0)$, la suite exacte de $\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}$-Modules cohérents :

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}[s]m'g^{s+1} \xrightarrow{\ i\ } \mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}[s]m'g^s \longrightarrow N = \frac{\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}[s]m'g^s}{\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}[s]m'g^{s+1}} \longrightarrow 0$$

Les deux $\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}$-Modules de gauche sont isomorphes, de dimension inférieure à $\dim X + 2$ d'après la proposition précédente. Il s'ensuit [**Cimpa1**, prop. 26, p. 144] que N est un $\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}$-Module holonome au voisinage de $\{g = 0\}$. L'endomorphisme de multiplication par s du $\mathscr{D}_{X\times\mathbf{C}}$-Module N admet donc localement un polynôme minimal [**Cimpa1**, prop. 23, p. 140]. Nous avons ainsi prouvé l'existence d'une équation fonctionnelle au voisinage de $(\omega, 0)$ de la forme :

$$b(s)(1 \otimes m \otimes g^s) = \sum P_j(x, u, \partial/\partial x) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^j 1 \otimes m \otimes g^{s+1}$$

où $b(s) \in \mathbf{C}[s] - \{0\}$ et les P_j sont des germes d'opérateurs différentiels indépendants de $(\partial/\partial u)$. En utilisant le morphisme naturel :

$$\mathscr{O}_{X\times\mathbf{C},(\omega,0)} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\omega}} M_\omega[1/g, s]g^s \xrightarrow{\text{« } u = 0 \text{ »}} M_\omega[1/f, s]f^s$$

il vient :

$$b(s)mf^s = \sum P_j(x, 0, \partial/\partial x)(s + 1)^j mf^{s+1}$$

D'où le théorème.

2. Application : localisation et images inverses d'un $\mathscr{D}$-Module holonome

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction holomorphe complexe non constante sur une variété analytique complexe lisse X.

Proposition 2.1 (**[K2]**). — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, holonome en dehors de $\{f=0\}$. Alors le $\mathscr{D}_X$-Module à gauche $M[1/f]$ est holonome (en particulier cohérent).*

Démonstration. — Par exactitude du foncteur de localisation, il suffit de prouver le résultat dans le cas où M est monogène, c'est à dire de la forme $M=\mathscr{D}_X m$. Pour $\lambda\in\mathbf{C}$, considérons le $\mathscr{D}_X[s]$-Module à gauche :

$$N_\lambda=\frac{\mathscr{D}_X[s]mf^s}{(s-\lambda)\mathscr{D}_X[s]mf^s}$$

En donnant à s le poids un, on associe à $\mathscr{D}_X[s]$ une filtration qui prolonge la filtration usuelle par l'ordre de $\mathscr{D}_X$. On peut définir la notion de bonne filtration pour un $\mathscr{D}_X[s]$-Module à gauche et montrer que tout $\mathscr{D}_X[s]$-Module à gauche qui possède une bonne filtration est cohérent (ou encore localement de présentation finie). En reprenant la preuve du lemme 1.2, on établit que $\mathscr{D}_X[s]mf^s$ est $\mathscr{D}_X[s]$-cohérent ; donc les N_λ, $\lambda\in\mathbf{C}$, le sont aussi. Comme N_λ est annulé par $s-\lambda$, on peut construire localement des présentations du $\mathscr{D}_X$-Module à gauche N_λ, qui est donc cohérent. D'autre part, en dehors de $\{f=0\}$, nous avons :

$$\mathscr{D}_X[s]mf^s=M\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X[1/f,s]f^s$$

Par suite, en dehors de $\{f=0\}$:

$$N_\lambda\simeq M\otimes\frac{\mathscr{O}_X[1/f,s]f^s}{(s-\lambda)\mathscr{O}_X[1/f,s]f^s}$$

Un calcul direct montre qu'en dehors de $\{f=0\}$, le $\mathscr{D}_X$-Module

$$\frac{\mathscr{O}_X[1/f,s]f^s}{(s-\lambda)\mathscr{O}_X[1/f,s]f^s}$$

est holonome de variété caractéristique T^*_XX. D'après la proposition II.4.4, N_λ est donc un $\mathscr{D}_X$-Module holonome en dehors de $\{f=0\}$. Notons mf^λ la classe de $m\otimes f^s$ dans N_λ. Par le même argument que dans la preuve de la proposition 1.4, il existe un entier k tel que $\mathscr{D}_Xmf^{\lambda+k}$ est holonome, où $mf^{\lambda+k}$ désigne la classe de $m\otimes f^{s+k}$ dans N_λ. Considérons alors le morphisme surjectif de $\mathscr{D}_X$-Modules :

$$\frac{\mathscr{D}_Xmf^s}{\mathscr{D}_Xmf^{s+k}}\longrightarrow\frac{N_\lambda}{\mathscr{D}_Xmf^{\lambda+k}}\longrightarrow 0$$

Le $\mathscr{D}_X$-Module $\mathscr{D}_Xmf^s/\mathscr{D}_Xmf^{s+k}$ est le quotient de deux $\mathscr{D}_X$-Modules isomorphes de dimension inférieure ou égale à $n+1$ d'après la proposition 1.4. Ce quotient est donc un $\mathscr{D}_X$-Module holonome. Nous en déduisons que N_λ est un $\mathscr{D}_X$-Module holonome. D'autre part, il existe une équation de Bernstein locale associée à la section m (théorème 1.1) :

$$b(s)m \otimes f^s = P(x, s, \partial/\partial x)m \otimes f^{s+1}$$

Soit r un entier positif tel que, $b(-r-k-1) \neq 0$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$. À l'aide de l'équation fonctionnelle, on vérifie que :

$$\mathscr{D}_X(m/f^r) = \mathscr{D}_X m[1/f] = M[1/f]$$

(voir [**Cimpa1**, th. 11, p. 155-56]). Cela assure la finitude de $M[1/f]$ comme $\mathscr{D}_X$-Module. Sa cohérence s'obtient en exhibant une bonne filtration de $\mathscr{D}_X(m/f^r)$. Enfin, la surjection de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche :

$$N_{-r} \longrightarrow \mathscr{D}_X(m/f^r) = M[1/f]$$

permet de conclure que $M[1/f]$ est holonome (voir [**Cimpa1**, remark 14, p. 157]).

Proposition 2.2 **([K2])**. — *Soit $g : X \to Y$ un morphisme analytique entre deux variétés analytiques complexes lisses. Soit $M^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche dont les groupes de cohomologie non nuls sont en nombre fini et holonomes. Alors les groupes de cohomologie non nuls du complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules $Lg^*M^\bullet$ sont en nombre fini et holonomes.*

Démonstration. — Soit $X \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{\pi} Y$, la factorisation de g par son graphe. Par fonctorialité de l'image inverse, il vient :

$$Lg^*M^\bullet = Li^*(L\pi^*M^\bullet)$$

D'après la proposition I.2.1, le foncteur π^* est exact et transforme $\mathscr{D}_Y$-Module holonome en $\mathscr{D}_X$-Module holonome. Ainsi, le complexe $L\pi^*M^\bullet = \pi^*M^\bullet$ est un complexe dont les groupes de cohomologie non nuls sont en nombre fini et holonomes. Il suffit donc de montrer la proposition quand g est une immersion d'une sous-variété lisse et fermée. La proposition résulte du lemme suivant en faisant une récurrence sur le nombre de groupes de cohomologie non nuls et sur la codimension de l'image de g.

Lemme 2.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module holonome. Soit i l'injection :*

$$\mathbf{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{C}^n \;\; ; \;\; (x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (0, x_2, \ldots, x_n)$$

Les groupes de cohomologie du complexe :

$$Li^*M : \;\; i^{-1}M \xrightarrow{x_1} i^{-1}M$$

sont des $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}$-Modules holonomes.

Démonstration. — Considérons le morphisme de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules :

$$c : M \longrightarrow M[1/x_1] \;\; ; \;\; m \longmapsto m/1$$

D'après la proposition 2.1, c'est un morphisme entre deux $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules holonomes. Le noyau de c est constitué des sections de M qui sont localement annulées par une puissance de x_1. En utilisant la proposition I.3.1, nous avons les identifications suivantes :

- $L^{-1}i^* \ker c = \{m \in i^{-1} \ker c \; ; \; x_1 m = 0\}$
- $L^{-1}i^* M = \{m \in i^{-1} M \; ; \; x_1 m = 0\}$
- $L^{-1}i^*(M[1/x_1]/M) = \{m \in i^{-1}(M[1/x_1]/M) \;\; ; \;\; x_1 m = 0\}$
- $L^0 i^* M = i^{-1}(M/x_1 M)$

On vérifie facilement que le morphisme naturel de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}$-Modules de $L^{-1}i^* \ker c$ vers $L^{-1}i^* M$ est un isomorphisme. Puis on vérifie la même assertion pour le morphisme :

$$L^0 i^* M \longrightarrow L^{-1}i^*(M[1/x_1]/M) \;\; ; \;\; \dot{m} \longmapsto \frac{\dot{m}}{x_1}$$

Or $L^{-1}i^* \ker c$ et $L^{-1}i^*(M[1/x_1]/M)$ sont les groupes de cohomologie non nuls de l'image inverse par i de deux $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules holonomes supportés par $\{x_1 = 0\}$. Le lemme est donc une conséquence directe de la proposition I.3.4.

3. $\mathscr{D}$-Modules spécialisables le long d'une hypersurface. — Soit H une hypersurface lisse d'une variété analytique complexe lisse X. Soit $\mathscr{J} \subset \mathscr{O}_X$, l'idéal des fonctions nulles sur H. Par convention, nous posons $\mathscr{J}^{-\ell} = \mathscr{O}_X$ pour tout $\ell \in \mathbf{N}$.

Notation 3.1. — Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on note $V_k(\mathscr{D}_X) \subset \mathscr{D}_X$ le sous-faisceau de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels :

$$V_k(\mathscr{D}_X) = \{P \in \mathscr{D}_X \;\; ; \;\; \forall \, \ell \in \mathbf{Z} \;\; : \;\; P(\mathscr{J}^{\ell}) \subset \mathscr{J}^{\ell - k}\}$$

Cette famille de faisceaux vérifie :

(1) $\mathscr{D}_X = \cup_{k \in \mathbf{Z}} V_k(\mathscr{D}_X)$
(2) $\forall \, (k, \ell) \in \mathbf{Z}^2 \;\; : \;\; V_k(\mathscr{D}_X) V_\ell(\mathscr{D}_X) \subset V_{k+\ell}(\mathscr{D}_X)$
(3) $\forall \, k \in \mathbf{Z} \;\; : \;\; V_k(\mathscr{D}_X) \subset V_{k+1}(\mathscr{D}_X)$

Cette filtration est appelée *filtration de Malgrange-Kashiwara.* Au voisinage d'un point $\omega \in H$, considérons un système de coordonnées locales tel que H soit l'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$ de $X = \mathbf{C}^n$. Remarquons que :

- $x_1 \in V_{-1}(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$ et $(\partial/\partial x_1) \in V_1(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$
- pour ℓ entier positif, $V_{-\ell}(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}) = x_1^{\ell} V_0(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$
- pour ℓ entier positif, $V_\ell(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}) = \sum_{j=0}^{\ell} (\partial/\partial x_1)^j V_0(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$
- les éléments de $V_0(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$ sont les opérateurs s'écrivant :

$$\sum_{j=0}^{r} P_j \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^j$$

où les $P_j \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$ sont indépendants de $(\partial/\partial x_1)$.

L'opérateur $x_1(\partial/\partial x_1)$ définit au voisinage de ω un élément de $V_0(\mathscr{D}_X)$ dont la classe modulo $V_{-1}(\mathscr{D}_X)$ ne dépend pas du choix des coordonnées. On note E cet opérateur, appelé *opérateur d'Euler* au voisinage de ω.

Définition 3.2. — Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent et $H \subset X$ une hypersurface lisse. On dit que M est *spécialisable le long de* H si toute section m de M vérifie :

$$b(E)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$$

au voisinage de tout point de H où elle est définie, où E est un opérateur d'Euler associé à H et $b \in \mathbf{C}[s]$ un polynôme non nul.

Proposition 3.3. — *Les $\mathscr{D}_X$-Modules holonomes sont spécialisables le long de toute hypersurface lisse.*

Démonstration. — Le problème étant local, nous pouvons supposer que $X = \mathbf{C}^n$ et que H est l'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$. D'après le théorème 1.1, pour toute section m définie sur un voisinage de l'origine, il existe une équation fonctionnelle dans $M \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}} \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1, s]x_1^s$:

$$b(s)mx_1^s = Pmx_1^{s+1} \tag{$*$}$$

où b est un polynôme non nul et P une section locale de $\mathscr{D}_X[s]$. Pour poursuivre la preuve, nous avons besoin de deux résultats techniques.

Lemme 3.4. — *Soient $(m_1, \ldots, m_N)$, des sections de $M[1/x_1]$. Alors :*

$$\sum_{j=0}^{N} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^j (m_j x_1^s) = 0 \Longleftrightarrow m_j = 0 \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant N$$

Démonstration. — Ce lemme résulte de l'identification entre $M \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}} \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1, s]$ et $M[1/x_1, s]$.

Lemme 3.5. — *Soit $m \in M[1/x_1]$ et $k \in \mathbf{N}$. Alors :*

$$s^k m \otimes x_1^s = \Big[\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}x_1\Big)^k m\Big]x_1^s + \sum_{i=1}^{k} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^i (m_i x_1^s)$$

où $m_i \in M[1/x_1]$.

Démonstration. — C'est un calcul immédiat.

Dans l'identité $(*)$, écrivons l'opérateur P sous la forme :

$$P = \sum_{j=0}^{\ell} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^j \Big(\sum_{i=0}^{k} A_{i,j} s^i\Big)$$

où $A_{i,j} \in \mathscr{D}_X$ est un germe d'opérateur indépendant de $(\partial/\partial x_1)$. Grâce aux lemmes précédents, nous en déduisons l'équation fonctionnelle dans $M[1/x_1]$:

$$0 = b\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}x_1\Big)m - \sum_{i=0}^{k} A_{i,0}x_1\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}x_1\Big)^i m$$

Ainsi, l'élément de M :

$$b\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}x_1\Big)m - \sum_{i=0}^{k} A_{i,0}x_1\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}x_1\Big)^i m$$

est annulé par une puissance de x_1, donc par $(\partial/\partial x_1)^r x_1^r$ pour tout entier r assez grand. Comme $(\partial/\partial x_1)^r x_1^r$ est un polynôme en $x_1(\partial/\partial x_1)$, il existe donc un polynôme $c(s)$ non nul tel que $c(x_1(\partial/\partial x_1))m \in V_{-1}(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})m$ au voisinage de l'origine. D'où la proposition.

IV. Cohomologie locale algébrique

1. Définitions et premières propriétés. — Soient X une variété analytique complexe, et $Y \subset X$, un sous-espace analytique non nécessairement lisse. Soit $\mathscr{J} \subset \mathscr{O}_X$, un idéal cohérent dont le lieu des zéros de ses sections est Y. Suivant A. Grothendieck, on peut définir deux foncteurs de $\mathrm{Mod}(\mathscr{O}_X)$, la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules, vers elle-même :

$$\begin{aligned} -(\star Y) : \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_X) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_X)\\ M &\longmapsto M(\star Y) = \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M)\\ \Gamma_{[Y]} : \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_X) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_X)\\ M &\longmapsto \Gamma_{[Y]}M = \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, M)\end{aligned}$$

Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. Soient ξ un champ de vecteurs sur X, ϕ une section de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, M)$ et $k \in \mathbf{N}$. L'application :

$$\xi\phi\ :\ \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{k+1} \longrightarrow M\ ;\ \dot{\lambda} \longmapsto \lambda\xi(\phi(\dot{1}))$$

définit un élément de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{k+1}, M)$. Après passage à la limite inductive, on obtient alors une action de ξ sur $\Gamma_{[Y]}M$. Cette action des champs de vecteurs permet de munir $\Gamma_{[Y]}M$ d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. Une autre façon de décrire cette structure est de constater que $\Gamma_{[Y]}M$ s'identifie à l'ensemble des sections de M annulées par une puissance de $\mathscr{J}$; ce qui est un sous $\mathscr{D}_X$-Module à gauche de M. De même, si ϕ est une section de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M)$, on définit $\xi\phi \in \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^{k+1}, M)$ par :

$$(\xi\phi)(a) = \xi(\phi(a)) - \phi(\xi(a))$$

pour toute section $a \in \mathscr{J}^{k+1}$. Par passage à la limite inductive, cela définit une action des champs de vecteurs sur $M(\star Y)$. On vérifie encore qu'elle permet de doter $M(\star Y)$

d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. Ainsi les foncteurs $\Gamma_{[Y]}$ et $-(\star Y)$ s'étendent à la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche.

Remarquons qu'à isomorphisme près, ces foncteurs ne dépendent pas du choix de l'idéal cohérent $\mathscr{J}$.

Les foncteurs $M \to \Gamma_{[Y]}M$ et $M \to M(\star Y)$, de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche vers elle-même, sont exacts à gauche et donnent naissance aux foncteurs :

$$M^\bullet \longmapsto R\Gamma_{[Y]}M^\bullet \;\; ; \;\; D^+(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^+(\mathscr{D}_X)$$
$$M^\bullet \longmapsto RM^\bullet(\star Y) \;\; ; \;\; D^+(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^+(\mathscr{D}_X)$$

de la catégorie dérivée des complexes bornés à gauche de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche vers elle-même.

Le lemme suivant établit que ces foncteurs dérivés peuvent être obtenus par oubli de la structure de $\mathscr{D}_X$-Module.

Lemme 1.1. — *Tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M injectif (resp. à fibres $\mathscr{D}_X$-injectives), est un $\mathscr{O}_X$-Module injectif (resp. à fibres $\mathscr{O}_X$-injectives).*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que les deux foncteurs de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, M)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} -, M)$ sont isomorphes, et que $\mathscr{D}_X$ est un $\mathscr{O}_X$-Module plat (car localement libre comme $\mathscr{O}_X$-Module). On procède de même pour montrer l'énoncé concernant les fibres.

Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche, considérons la suite exacte de $\mathscr{O}_X$-Modules :

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, M) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, M) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M)$$

pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Par passage à la limite inductive, on obtient une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-Modules. En constatant que c'est aussi une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-Modules, nous avons donc les morphismes naturels de foncteurs :

$$\Gamma_{[Y]}M \longrightarrow M \longrightarrow M(\star Y)$$

D'autre part, si I est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche injectif, d'après le lemme 1.1, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la suite de $\mathscr{O}_X$-Modules :

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, I) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, I) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, I) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ainsi, la suite de $\mathscr{D}_X$-Modules :

$$0 \longrightarrow \Gamma_{[Y]}I \longrightarrow I \longrightarrow I(\star Y) \longrightarrow 0$$

est exacte. Nous avons donc le triangle naturel de $D^+(\mathscr{D}_X)$:

$$R\Gamma_{[Y]}M^\bullet \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow RM^\bullet(\star Y)$$

Définition 1.2. — Soit $M \in D^+(\mathscr{D}_X)$. On appelle *triangle de cohomologie locale* associé à M, le triangle naturel de $D^+(\mathscr{D}_X)$:

$$R\Gamma_{[Y]}M \longrightarrow M \longrightarrow RM(\star Y)$$

Lemme 1.3. — *Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche à fibres $\mathscr{O}_X$-injectives, il est acyclique pour les foncteurs $\Gamma_{[Y]}$ et $-(\star Y)$.*

Démonstration. — En effet, $\mathscr{J}$ étant $\mathscr{O}_X$-cohérent, pour tout $x \in X$, $j \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$:

$$R^j \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, M)_x \simeq R^j \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x^k, M_x)$$
$$R^j \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M)_x \simeq R^j \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{J}_x^k, M_x)$$

En passant à la limite inductive, on obtient les isomorphismes :

$$(R^j\Gamma_{[Y]}M)_x \simeq \varinjlim_k R^j \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x^k, M_x)$$
$$(R^jM(\star Y))_x \simeq \varinjlim_k R^j \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{J}_x^k, M_x)$$

Le lemme s'en déduit.

Lemme 1.4. — *Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche à fibres $\mathscr{O}_X$-injectives, les $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche $\Gamma_{[Y]}M$ et $M(\star Y)$ sont à fibres $\mathscr{O}_X$-injectives.*

Démonstration. — Pour l'injectivité des fibres de $\Gamma_{[Y]}M$, on se reportera à [**H**, lemme 3.2, p. 213]. L'injectivité des fibres de $M(\star Y)$ se déduit alors de la suite :

$$0 \longrightarrow \Gamma_{[Y]}M \longrightarrow M \longrightarrow M(\star Y) \longrightarrow 0$$

qui est exacte lorsque M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche à fibres $\mathscr{D}_X$-injectives.

Lemme 1.5. — *Un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche injectif (resp. $\mathscr{O}_X$-Module injectif) est à fibres $\mathscr{D}_X$-injectives (resp. $\mathscr{O}_X$-injectives).*

Démonstration. — Désignons par $\mathscr{A}$ le faisceau d'anneaux $\mathscr{D}_X$ ou $\mathscr{O}_X$. Soit M un $\mathscr{A}$-Module injectif et $x \in X$. Pour montrer que M_x est $\mathscr{A}_x$-injective, il suffit de montrer que si J est un idéal de $\mathscr{A}_x$, le morphisme naturel $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{A}_x, M_x) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_x}(J, M_x)$ est surjectif. Construisons sur un voisinage ouvert de x un faisceau $\mathscr{J}$ qui soit $\mathscr{A}$-cohérent de fibre J en x. Comme le morphisme naturel $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{J}, M)_x \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_x}(J, M_x)$ est un isomorphisme, la surjectivité cherchée résulte alors du fait que la restriction d'un faisceau de $\mathscr{A}$-Modules injectif à un ouvert est un faisceau injectif.

Proposition 1.6. — *Soient Y_1 et Y_2 deux sous-espaces analytiques fermés de X. Pour tout $M^\bullet \in D^+(\mathscr{D}_X)$, il existe des isomorphismes fonctoriels :*

$$R\Gamma_{[Y_1]}(R\Gamma_{[Y_2]}M) \simeq R\Gamma_{[Y_1\cap Y_2]}M$$
$$R(RM(\star Y_1))(\star Y_2) \simeq RM(\star(Y_1 \cup Y_2))$$
$$R\Gamma_{[Y_1]}(RM(\star Y_2)) \simeq R(R\Gamma_{[Y_1]}M)(\star Y_2)$$

Démonstration. — Soit I un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche injectif. D'après les lemmes précédents les faisceaux $\Gamma_{[Y_i]}I$ et $I(\star Y_i)$ sont à fibres injectives et donc acycliques pour les foncteurs $\Gamma_{[Y_j]}-$ et $-(\star Y_j)$, $\{i,j\} = \{1,2\}$. La proposition résulte alors des isomorphismes naturels entre $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche :

(1) $\Gamma_{[Y_1]}(\Gamma_{[Y_2]}M) \simeq \Gamma_{[Y_1\cap Y_2]}M$
(2) $(M(\star Y_1))(\star Y_2) \simeq M(\star(Y_1 \cup Y_2))$
(3) $\Gamma_{[Y_1]}(M(\star Y_2)) \simeq (\Gamma_{[Y_1]}M)(\star Y_2)$

pour tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M.

Proposition 1.7. — *Soit $Y \subset X$ un sous-espace analytique fermé et $M^\bullet \in D^+(\mathscr{D}_X)$. Alors :*

$$R\Gamma_{[Y]}(RM^\bullet(\star Y)) = R(R\Gamma_{[Y]}M^\bullet)(\star Y) = 0$$

Démonstration. — Pour tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche N, nous avons l'identité :

$$(\Gamma_{[Y]}N)(\star Y) = 0$$

Cela résulte du fait que les éléments de $\Gamma_{[Y]}N$ sont localement annulés par une puissance assez grande de $\mathscr{J}$. Notre assertion s'en déduit en remplaçant N par une résolution injective de $M^\bullet$.

Lemme 1.8. — *Soit Y un sous-espace analytique d'une variété analytique X. Pour tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M et tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche plat N, les morphismes naturels de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche suivants :*

$$\Gamma_{[Y]}M \otimes_{\mathscr{O}_X} N \longrightarrow \Gamma_{[Y]}(M \otimes_{\mathscr{O}_X} N)$$
$$M(\star Y) \otimes_{\mathscr{O}_X} N \longrightarrow (M \otimes_{\mathscr{O}_X} N)(\star Y)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, il y a un morphisme naturel de $\mathscr{O}_X$-Modules :

$$(*) \qquad \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, M) \otimes_{\mathscr{O}_X} N \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k, M \otimes_{\mathscr{O}_X} N)$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, il suffit de le faire localement. Nous pouvons donc supposer que $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k$ admet la présentation :

$$\mathscr{O}_X^r \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^k \longrightarrow 0$$

Or, pour tout entier $\ell \in \mathbf{N}^*$, il y a l'isomorphisme naturel :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^\ell, M) \otimes_{\mathscr{O}_X} N \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^\ell, M \otimes_{\mathscr{O}_X} N)$$

De la platitude de N, on déduit que $(*)$ est un isomorphisme. En passant à la limite inductive, on montre que le morphisme naturel de $\mathscr{O}_X$-Modules :

$$\Gamma_{[Y]}M \otimes_{\mathscr{O}_X} N \longrightarrow \Gamma_{[Y]}(M \otimes_{\mathscr{O}_X} N)$$

est un isomorphisme. On vérifie alors que ce morphisme est un morphisme de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. L'autre isomorphisme s'établit de façon analogue.

Lemme 1.9. — *Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche injectif et N est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche plat, alors le $\mathscr{O}_X$-Module $M \otimes_{\mathscr{O}_X} N$ est à fibres injectives.*

Démonstration. — Le problème est local. Supposons que $X = \mathbf{C}^n$ et montrons que la fibre en 0 de $M \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}} N$ est injective. Il s'agit d'établir que pour tout idéal $I \subset \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}$, le morphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}, (M \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}} N)_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}}(I, (M \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}} N)_0)$$

est surjectif. Comme le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-Module N_0 est plat et l'idéal I est de type fini, il suffit donc de constater la surjectivité du morphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}, M_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}} N_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}}(I, M_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}} N_0$$

Cela résulte du fait que M_0 est $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}$-injectif puisque $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-injectif (voir les lemmes 1.1 et 1.5).

Notons $D^b(\mathscr{D}_X)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche.

Proposition 1.10. — *Soient M et N deux complexes de $D^b(\mathscr{D}_X)$. Pour tout sous-espace analytique Y de X, il existe un isomorphisme naturel entre les triangles distingués de $D^b(\mathscr{D}_X)$ suivants :*

$$\begin{array}{ccccc}
R\Gamma_{[Y]}M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N & \longrightarrow & M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N & \longrightarrow & RM(\star Y) \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R\Gamma_{[Y]}(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N) & \longrightarrow & M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N & \longrightarrow & R(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N)(\star Y)
\end{array}$$

Démonstration. — Soit $M^\bullet$ (resp. $N^\bullet$) un complexe constitué d'objets $\mathscr{D}_X$-injectifs (resp. $\mathscr{D}_X$-plats) isomorphe à M (resp. N). Alors :

$$R\Gamma_{[Y]}(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N) = R\Gamma_{[Y]}(M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet)^\bullet$$

où $(M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet)^\bullet$ est le complexe simple associé au complexe double $M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet$. D'après le lemme 1.9, ce dernier complexe est à fibres injectives, donc :

$$R\Gamma_{[Y]}(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N) = \Gamma_{[Y]}(M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet)^\bullet$$

D'après le lemme 1.8, il existe un isomorphisme naturel :

$$(\Gamma_{[Y]}M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet)^\bullet \longrightarrow \Gamma_{[Y]}(M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet)^\bullet$$

Mais $N^\bullet$ étant formé d'objets plats et $M^\bullet$ d'objets injectifs :

$$(\Gamma_{[Y]}M^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} N^\bullet)^\bullet = R\Gamma_{[Y]}M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N$$

Ainsi le morphisme naturel :

$$R\Gamma_{[Y]}M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N \longrightarrow R\Gamma_{[Y]}(M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} N)$$

est bien un isomorphisme. On procédera de même pour le foncteur $-(\star Y)$.

Soient Y_1 et Y_2 deux sous-espaces analytiques fermés d'une variété analytique lisse X.

Proposition 1.11. — *Soit $M \in D^+(\mathscr{D}_X)$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. Il existe des triangles naturels :*

$$R\Gamma_{[Y_1\cap Y_2]}M \longrightarrow R\Gamma_{[Y_1]}M \oplus R\Gamma_{[Y_2]}M \longrightarrow R\Gamma_{[Y_1\cup Y_2]}M$$
$$RM(\star(Y_1\cap Y_2)) \longrightarrow RM(\star Y_1) \oplus RM(\star Y_2) \longrightarrow RM(\star(Y_1\cup Y_2))$$

Démonstration. — On reportera à [**Cimpa2**, p. 41]. Ces triangles sont appelés triangles de Mayer-Vietoris.

Remarque 1.12. — Les propositions 1.6, 1.7, 1.10 et 1.11 sont aussi vérifiées dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules. Les preuves sont identiques.

2. Cas particuliers et exemples

Le cas d'une hypersurface. — Soit $Y \subset X$, un sous-espace analytique de codimension un. Soit $\mathscr{J} \subset \mathscr{O}_X$, l'idéal définissant Y. C'est un idéal localement principal, donc localement libre. Par suite, si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche, pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$:

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M)$$

En particulier, le complexe $RM(\star Y)$ est concentré en degré 0 et

$$RM(\star Y) \simeq M(\star Y) = \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^k, M)$$

Le complexe $R\Gamma_{[Y]}M$ est alors isomorphe au complexe à deux termes muni de la flèche naturelle de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M(\star Y) \longrightarrow 0$$

où M est placé en degré zéro.

Le cas d'une intersection complète locale. — Dans ce paragraphe, nous supposerons que Y est un sous-espace analytique de $\mathbf{C}^n$ défini par les équations $f_1 = \cdots = f_p = 0$, où pour tout $x \in \mathbf{C}^n$, la suite des germes en x des fonctions f_i est une suite régulière de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,x}$. Sans changer les résultats de cette section, on pourrait remplacer $\mathbf{C}^n$ par un ouvert de $\mathbf{C}^n$.

Pour un entier naturel k, notons $\mathscr{L}_k \subset \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$, l'idéal engendré par $f_1^k, \dots, f_p^k$. Soit $\mathscr{J}$ un idéal cohérent dont le lieu des zéros est Y. Pour tout entier k, il existe des entiers $k', k'' \in \mathbf{N}^*$ tels que $\mathscr{L}_k \subset \mathscr{J}^{k'}$ et $\mathscr{J}^k \subset \mathscr{L}_{k''}$. On vérifie alors que, si M est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche :

$$\varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}}(\mathscr{L}_k, M) \quad \text{et} \quad \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_k, M)$$

sont munis d'une structure de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche de la même façon que $M(\star Y)$ et $\Gamma_{[Y]}M$. Les morphismes canoniques de foncteurs de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$-Modules ou des $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche :

$$M(\star Y) \longrightarrow \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}}(\mathscr{L}_k, M)$$
$$\Gamma_{[Y]}M \longrightarrow \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_k, M)$$

sont des isomorphismes.

Pour tout $\ell \in \mathbf{N}^*$, soit $\Lambda^\ell(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$, le $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$-Module libre engendré par $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}$ pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant p$. Quand $\ell = 0$, on pose $\Lambda^0(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) = \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$. Soit $\phi_{\ell+1,k}$: $\Lambda^{\ell+1}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \to \Lambda^\ell(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$, le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$-Modules défini par :

$$\phi_{\ell+1,k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\ell+1}}) = \sum_{r=1}^{\ell+1} (-1)^r f_{i_r}^k e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \overset{\vee}{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\ell+1}}$$

Comme pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{C}^n$, les germes en x des f_i^k forment une suite régulière, le complexe :

$$0 \to \Lambda^p(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \xrightarrow{\phi_{p,k}} \Lambda^{p-1}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \xrightarrow{\phi_{p-1,k}} \cdots \xrightarrow{\phi_{1,k}} \Lambda^0(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_k \to 0$$

est une résolution de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_k$. C'est le complexe de Koszul associé à la suite régulière $(f_1^k, \ldots, f_p^k)$. Le morphisme naturel $\pi : \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_{k+1} \to \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_k$ se relève en un morphisme de résolutions :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Lambda^{\ell+1}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r, "\phi_{\ell+1,k}"] & \Lambda^\ell(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^0(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_k \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \Lambda^{\ell+1}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r, "\phi_{\ell+1,k+1}"'] \arrow[u, "h_{\ell+1,k+1}"'] & \Lambda^\ell(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r] \arrow[u, "h_{\ell,k+1}"'] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^0(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{L}_{k+1} \arrow[r] \arrow[u, "\pi"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où $h_{\ell,k+1} : \Lambda^\ell(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \to \Lambda^\ell(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$ est le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$-Modules libres défini par $h_{\ell,k+1}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}) = f_{i_1} \cdots f_{i_\ell} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}$. On en déduit que $R\Gamma_{[Y]}M$ est isomorphe à la limite inductive des complexes :

$$(\diamond k) \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant p} M \xrightarrow{\phi_{\ell,k}^*} \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{\ell+1} \leqslant p} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

Donnons un résultat dans le cas particulier où Y est une hypersurface.

Lemme 2.1. — *Soient f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^n$ non constante, définissant $Y \subset \mathbf{C}^n$, et M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche. Considérons le système inductif de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$-Modules :*

$$h_k : M \longrightarrow M$$

où h_k est la multiplication par f. La limite inductive de ce système est isomorphe à $M(\star Y)$ et s'identifie à $M[1/f]$ comme $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche, le localisé de M suivant les puissances de f, muni de sa structure naturelle de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche.

Le lecteur vérifiera ce lemme qui précise le premier exemple. Nous avons alors :

Proposition 2.2. — *Sous les hypothèses de la sous-section 2, $R\Gamma_{[Y]}M$ est isomorphe au complexe de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche :*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{1\leqslant i_1<\cdots<i_\ell\leqslant p} M[1/f_{i_1}\cdots f_{i_\ell}] \xrightarrow{\lim \phi^*_{\ell,k}} \bigoplus_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell+1}\leqslant p} M[1/f_{i_1}\cdots f_{i_{\ell+1}}] \longrightarrow \cdots$$

où la source du morphisme $\lim \phi^*_{1,k}$ est placée en degré 0 ; pour $1 \leqslant \ell \leqslant p$ et des indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant p$, l'image de $m \in M[1/f_{i_1}\cdots f_{i_\ell}]$ par le morphisme $\phi^*_{\ell,k}$ a pour composante dans $M[1/f_{i_1}\cdots f_{i_{r-1}} f_j f_{i_r}\cdots f_{i_\ell}]$ le terme $(-i)^r m$, pour tout indice j tel qu'il existe un indice r, $1 \leqslant r \leqslant \ell$, avec $i_{r-1} < j < i_r$.

Démonstration. — Le fait que les différentielles du complexe sont des morphismes de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche se justifie en le vérifiant pour un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche injectif, puis en prenant une résolution injective de M.

Remarque 2.3. — Si de plus $(f_1,\ldots,f_p)$ est une suite régulière pour M, tous les complexes $(\diamond k)$ ont leur cohomologie concentrée en degré p, donc $R\Gamma_{[Y]}M$ aussi ; nous avons alors :

$$R^p\Gamma_{[Y]}M \simeq \frac{M[1/f_1\cdots f_p]}{\sum_j M[1/f_1\cdots \check{f}_j\cdots f_p]}$$

où le terme de droite est muni de sa structure naturelle de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche.

Remarque 2.4. — Si $(g_1,\ldots,g_p)$ est une autre suite régulière de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ définissant Y qui soit aussi une suite régulière pour M, on a donc un isomorphisme naturel de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche :

$$\frac{M[1/f_1\cdots f_p]}{\sum_j M[1/f_1\cdots \check{f}_j\cdots f_p]} \simeq \frac{M[1/g_1\cdots g_p]}{\sum_j M[1/g_1\cdots \check{g}_j\cdots g_p]}$$

Soient $k,\ell \in \mathbf{N}^*$ deux entiers. Supposons qu'il existe une $p\times p$ matrice A à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ telle que :

$$(g_1^\ell,\ldots,g_p^\ell) = A(f_1^k,\ldots,f_p^k)^{\mathrm{t}}$$

Alors, pour tout $m \in M$, l'image de la classe de $m/f_1^k\cdots f_p^k$ par cet isomorphisme est $\det(A)m/g_1^\ell\cdots g_p^\ell$, où $\det(A) \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ désigne le déterminant de la matrice A.

Exemples

Exemple 1. — Considérons $Z \subset \mathbf{C}^n$, le sous-espace vectoriel défini par les équations : $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Le complexe $R\Gamma_{[Z]}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ est concentré en degré p et :

$$R^p\Gamma_{[Z]}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n} \simeq \frac{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1\cdots x_p]}{\sum_j \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1\cdots \check{x}_j\cdots x_p]}$$

Ce $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche est engendré par la classe de $1/x_1 \cdots x_p$. De plus, le morphisme de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche :

$$\frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(x_1, \ldots, x_p, \partial/\partial x_{p+1}, \ldots, \partial/\partial x_n)} \longrightarrow \frac{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1 \cdots x_p]}{\sum_j \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1 \cdots \overset{\vee}{x_j} \cdots x_p]}$$

est un isomorphisme.

Exemple 2. — Soient N un entier naturel non nul et A une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\mathscr{D}_{\mathrm{rel}}$, le sous-faisceau de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$ des opérateurs indépendants de $\partial/\partial x_1$. Soit $Z \subset \mathbf{C}^n$, l'hyperplan défini par $x_1 = 0$. Soit M le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module cohérent :

$$M = \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)}$$

On se propose de déterminer un représentant du triangle de cohomologie locale :

$$R\Gamma_{[Z]}M \longrightarrow M \longrightarrow RM(\star Z)$$

Considérons M_0, le germe à l'origine de M. C'est un module de type fini sur l'anneau noethérien $\mathscr{D}_{\mathrm{rel},0}$. Par suite, toute section m de M_0 est annulée par un opérateur différentiel unitaire en $\partial/\partial x_1$. Il résulte du corollaire I.3.3 que $x_1 m = 0$ entraîne $m = 0$. Ainsi, l'endomorphisme de faisceau :

$$M \longrightarrow M \;\; ; \;\; m \longmapsto x_1 m$$

est injectif. Le triangle de cohomologie locale se réduit donc à la suite exacte de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M[1/x_1] & \longrightarrow & M[1/x_1]/M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M(\star Z) & \longrightarrow & R^1\Gamma_Y M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On a l'isomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules :

$$M[1/x_1] \simeq \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1])^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1])^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)}$$

Soit $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\}$ la base canonique de $(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N$. Des relations :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{Id}_N - A\Big)\Big(\frac{\varepsilon_i}{x_1^r}\Big) = -r\Big(\frac{\varepsilon_i}{x_1^{r+1}}\Big) + \Big(\frac{\varepsilon_i}{x_1^r}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{Id}_N - A\Big)$$

on déduit que $M[1/x_1]$ est engendré par $\{\dot{\varepsilon_1}/x_1, \ldots, \dot{\varepsilon_N}/x_1\}$ comme $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module. Nous avons ainsi un morphisme surjectif de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules :

$$\frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)x_1} \longrightarrow M[1/x_1]$$

dont on laisse au lecteur le soin de montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. D'autre part, nous avons la suite exacte de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche :

$$0 \longrightarrow \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)} \longrightarrow \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)x_1} \longrightarrow \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N x_1} \longrightarrow 0$$

D'après ce qui précède, elle représente donc le triangle de cohomologie locale algébrique de M à support dans Z.

3. Les cas holonome et non caractéristique. — Lorsque Y est l'hypersurface de $\mathbf{C}^n$ d'équation $x_1 = 0$, nous avons montré que $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(\star Y)$ est isomorphe à $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1]$. Ce $\mathscr{D}_X$-Module n'étant pas de type fini, il n'est donc en particulier pas cohérent. Ainsi, si M est un $\mathscr{D}_X$-Module cohérent, $R\Gamma_{[Y]}M$ et $RM(\star Y)$ ne sont pas nécessairement à cohomologie cohérente. Notons $D_h^+(\mathscr{D}_X)$ la catégorie dérivée des complexes bornés à gauche de $\mathscr{D}_X$-Modules à cohomologie holonome.

Proposition 3.1 **([Meb1], [K2])**. — *Soit $M^\bullet \in D_h^+(\mathscr{D}_X)$. Pour tout sous-espace analytique Y de X, les complexes de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche $R\Gamma_{[Y]}M^\bullet$ et $RM^\bullet(\star Y)$ sont dans $D_h^+(\mathscr{D}_X)$.*

Démonstration. — À l'aide du triangle de cohomologie locale et de sa suite exacte longue associée, il suffit de montrer que, pour tout sous-espace analytique Y, $R\Gamma_{[Y]}M^\bullet \in D_h^+(\mathscr{D}_X)$. Or, si Y_1 et Y_2 sont deux sous-espaces analytiques de X, $R\Gamma_{[Y_1]}(R\Gamma_{[Y_2]}M^\bullet) \simeq R\Gamma_{[Y_1\cap Y_2]}M^\bullet$. La proposition étant de nature locale, il suffit donc de traiter le cas d'une hypersurface. Compte-tenu du triangle de cohomologie locale, il s'agit de montrer que si Y est une hypersurface, alors $RM^\bullet(\star Y) \in D_h^+(\mathscr{D}_X)$. Dans ce cas, le foncteur $-(\star Y)$ est exact. Nous sommes ramenés à vérifier que si M est un $\mathscr{D}_X$-Module holonome et Y une hypersurface, $M(\star Y)$ est holonome. C'est justement ce qu'affirme la proposition III.2.1.

Proposition 3.2. — *Soit $Z \subset X$ une sous-variété analytique lisse. Soit $M^\bullet$ un complexe de $D^+(\mathscr{D}_X)$ dont les groupes de cohomologie sont des $\mathscr{D}_X$-Modules cohérents pour lesquels Z est une sous-variété non caractéristique. Alors les complexes de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche $R\Gamma_{[Z]}M^\bullet$ et $RM^\bullet(\star Z)$ ont leurs groupes de cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérents.*

Démonstration. — Le problème est local et nous pouvons supposer que $Z \subset \mathbf{C}^n$ est l'intersection transverse d'une sous-variété Z_1 d'équation $x_1 = 0$ et d'une sous-variété Z_2. Soit M un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module cohérent pour lequel Z est une sous-variété non caractéristique. D'après le corollaire I.3.3, la multiplication par $x_1 : M \to M$ est injective. Nous avons établi au paragraphe 2 que $R\Gamma_{[Z_1]}M[+1]$ est alors isomorphe au $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module $M[1/x_1]/M$. Montrons donc sa cohérence.

Soit i l'inclusion de Z_1 dans $\mathbf{C}^n$. Comme Z_1 est non caractéristique pour M, l'image inverse Li^*M est isomorphe au $\mathscr{D}_{Z_1}$-Module cohérent suivant convenablement décalé :

$$L^{-1}i^*M = \ker(\, x_1 \,:\, M_{|Z_1} \longrightarrow M_{|Z_1})$$

dont nous connaissons la variété caractéristique (voir le corollaire I.3.3). D'autre part, $N = M[1/x_1]/M$ est supporté par l'hypersurface lisse Z_1. Observons que le $\mathscr{D}_{Z_1}$-Module :

$$\overline{N} = \ker(\, x_1 \,:\, N_{|Z_1} \longrightarrow N_{|Z_1})$$

est isomorphe à $L^{-1}i^*M$. D'après le paragraphe III.3 page 128 de [**Cimpa1**], N est déterminé à partir de $\overline{N}$ et nous obtenons que $M[1/x_1]/M$ est cohérent de variété caractéristique :

$$\{(x_1, x', \xi_1, \xi') \in T^*\mathbf{C}^n \,|\, x_1 = 0 \text{ et } \exists\, \xi_1'' \in \mathbf{C}\,;\, (0, x', \xi_1'', \xi') \in \operatorname{car} M\}$$

La proposition se déduit de ce cas par récurrence. Cette preuve peut servir d'introduction au paragraphe 5.

Soit $Z \subset X$ une sous-variété (lisse). Considérons le diagramme commutatif naturel :

$$\begin{tikzcd} T^*Z \arrow[d] & Z \times_X T^*X \arrow[l, "I"'] \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d] & T^*X \arrow[d] \\ Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

La preuve de la proposition 3.2 nous permet de donner en fait un résultat plus précis :

Proposition 3.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module cohérent pour lequel Z est une sous-variété non caractéristique. Alors le complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche $R\Gamma_{[Z]}M$ n'a de la cohomologie qu'en degré p. Le $\mathscr{D}_X$-Module $R^p\Gamma_{[Z]}M$ est cohérent de variété caractéristique $\overline{i}I^{-1}I\overline{i}^{-1}(\operatorname{car} M)$.*

4. Commutation des foncteurs cohomologie locale et image inverse

Proposition 4.1 **([Meb2])**. — *Soient $f : \widetilde{X} \to X$ un morphisme de variétés analytiques lisses, $Z \subset X$ un sous-espace analytique, et $M \in D^b(\mathscr{D}_X)$ un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Notons $\widetilde{Z} \subset \widetilde{X}$ l'espace analytique $f^{-1}(Z)$. Il existe un isomorphisme naturel entre les triangles :*

$$\begin{tikzcd} Lf^*R\Gamma_{[Z]}M \arrow[r] \arrow[d] & Lf^*M \arrow[r] \arrow[d] & Lf^*RM(\star Z) \arrow[d] \\ R\Gamma_{[\widetilde{Z}]}Lf^*M \arrow[r] & Lf^*M \arrow[r] & R(Lf^*M)(\star\widetilde{Z}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Quitte à considérer f comme la composée de l'immersion du graphe de f et de la projection de $\widetilde{X} \times X$ vers X, il suffit de traiter le cas d'une projection et celui d'une immersion d'une sous-variété lisse fermée.

a) L'application f est une projection. Supposons donc que $\widetilde{X} = X \times Y$, où Y est une variété lisse, et que f soit la projection de $X \times Y$ sur X. Notons $\mathscr{J}_Z$ l'idéal de définition de Z. L'image inverse $f^* \mathscr{J}_Z$ s'identifie à un idéal de $\mathscr{O}_{X\times Y}$ qui définit $\widetilde{Z}$, noté $\mathscr{J}_{\widetilde{Z}}$. Le foncteur f^* étant exact, il vient :

$$Lf^*(R\Gamma_{[Z]}M) = f^*(R\Gamma_{[Z]}M) = f^* R \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k, M)$$

qui est encore égal à :

$$R \varinjlim_k f^* \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k, M)$$

puisque l'image inverse commute à la limite inductive. D'autre part, pour tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche N, il existe une flèche naturelle :

$$f^* \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k, N) \longrightarrow \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X\times Y}}(f^*(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k), f^*N)$$

Or $f^*(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k)$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{X\times Y}/\mathscr{J}_{\widetilde{Z}}^k$. Nous en déduisons une flèche naturelle :

$$f^* R \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k, M) \longrightarrow R \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X\times Y}}(\mathscr{O}_{X\times Y}/\mathscr{J}_{\widetilde{Z}}^k, f^*M)$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, soit $L^\bullet(k)$ une résolution locale de $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_Z^k$ par des $\mathscr{O}_X$-Modules libres. Ces résolutions s'organisent en un système projectif. Comme $f^*L^\bullet(k)$ est une résolution libre de $\mathscr{O}_{X\times Y}/\mathscr{J}_{\widetilde{Z}}^k$, la flèche précédente est un isomorphisme local, donc un isomorphisme. On obtient donc :

$$Lf^*(R\Gamma_{[Z]}M) \simeq R \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X\times Y}}(\mathscr{O}_{X\times Y}/\mathscr{J}_{\widetilde{Z}}^k, Lf^*M) \simeq R\Gamma_{[\widetilde{Z}]} Lf^*M$$

On procède de même pour l'isomorphisme $Lf^*RM(\star Z) \simeq R(Lf^*M)(\star \widetilde{Z})$.

b) L'application $f : \widetilde{X} \to X$ est une immersion lisse fermée. Identifions $f(\widetilde{X}) \subset X$ à $\widetilde{X}$ (en particulier $\widetilde{Z} = \widetilde{X} \cap Z$). Soit $\mathscr{J}_{\widetilde{X}} \subset \mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{J}_{\widetilde{Z}} \subset \mathscr{O}_{\widetilde{X}}$) l'idéal de définition de $\widetilde{X}$ (resp. $\widetilde{Z}$). On a l'isomorphisme :

$$Lf^* R\Gamma_{[Z]}M \simeq f^{-1}\big((\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_{\widetilde{X}}) \otimes^L_{\mathscr{O}_X} R\Gamma_{[Z]}M\big)$$

Mais comme $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_{\widetilde{X}}$ est algébriquement supporté par $\widetilde{X}$, dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules, nous avons les identifications suivantes (voir la remarque 1.12) :

$$(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_{\widetilde{X}}) \otimes^L_{\mathscr{O}_X} R\Gamma_{[Z]}M \simeq R\Gamma_{[\widetilde{X}]}\big((\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_{\widetilde{X}}) \otimes^L_{\mathscr{O}_X} R\Gamma_{[Z]}M\big) \simeq (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}_{\widetilde{X}}) \otimes^L_{\mathscr{O}_X} R\Gamma_{[\widetilde{Z}]}M$$

Le morphisme naturel :

$$(*) \qquad Lf^* R\Gamma_{[\widetilde{Z}]}M \longrightarrow Lf^* R\Gamma_{[Z]}M$$

est donc un isomorphisme. Soit $I^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules injectifs isomorphes à M dans $D^b(\mathscr{D}_X)$. Ainsi :

$$Lf^* R\Gamma_{[\widetilde{Z}]} M \simeq Lf^*(\Gamma_{[\widetilde{Z}]} I^\bullet)$$

Comme $\Gamma_{[\widetilde{Z}]} I^\bullet$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules algébriquement supportés par $\widetilde{X}$, nous avons :

$$(**) \qquad Lf^*(\Gamma_{[\widetilde{Z}]} I^\bullet) = L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{Z}]} I^\bullet)\,[d]$$

où d est la codimension de $\widetilde{X}$ dans X (corollaire I.3.2). D'autre part, pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{Z}]} I^j)$ et $\Gamma_{[\widetilde{Z}]}(L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j))$ s'injectent dans $L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j)$. Pour montrer que ces sous-Modules sont isomorphes, il suffit de le faire localement. Or, localement, si N est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche algébriquement supporté par $\widetilde{X}$, $L^{-d} f^* N$ est l'ensemble des sections de N annulées par les équations de $\widetilde{X}$ (corollaire I.3.2). Nous en déduisons l'isomorphisme :

$$L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{Z}]} I^\bullet) \simeq \Gamma_{[\widetilde{Z}]}(L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^\bullet))$$

Remarquons que, pour $i > 0$, $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$:

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}/\mathscr{J}^k_{\widetilde{Z}}, L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j)) = 0$$

En effet, si $P^\bullet$ est une résolution locale $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}$-libre de $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}/\mathscr{J}^k_{\widetilde{Z}}$, nous avons les isomorphismes :

$$\begin{aligned} R\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}/\mathscr{J}^k_{\widetilde{Z}}, L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j)) &\simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}}(P^\bullet, L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j)) \\ &\simeq \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{O}_X}(P^\bullet, f^{-1}(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j)) \end{aligned}$$

Mais comme $\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j$ est à fibres injectives, ce dernier complexe n'a de la cohomologie qu'en degré 0 et est donc isomorphe au complexe à un terme placé en degré zéro :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}/\mathscr{J}^k_{\widetilde{Z}}, L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^j))$$

Cela établit la nullité des groupes d'extension annoncée. On en déduit l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Gamma_{[\widetilde{Z}]}(L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^\bullet))[d] &\simeq R\Gamma_{[\widetilde{Z}]}(L^{-d} f^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^\bullet))[d] \\ &\simeq R\Gamma_{[\widetilde{Z}]} Lf^*(\Gamma_{[\widetilde{X}]} I^\bullet) \simeq R\Gamma_{[\widetilde{Z}]} Lf^*(R\Gamma_{[\widetilde{X}]} M) \end{aligned}$$

D'après l'isomorphisme $(*)$ appliqué à $Z = X$, ce dernier complexe n'est autre que $R\Gamma_{[\widetilde{Z}]} Lf^* M$. Nous obtenons ainsi (grâce à $(**)$) un isomorphisme naturel :

$$Lf^* R\Gamma_{[Z]} M \simeq R\Gamma_{[\widetilde{Z}]} Lf^* M$$

L'autre formule s'obtient de la même façon.

Le lecteur vérifiera que les isomorphismes donnés sont bien des isomorphismes de $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}$-Modules.

5. Immersion lisse fermée et cohomologie locale. — Dans ce paragraphe, X désigne une variété analytique complexe lisse et $Y \subset X$ une sous-variété lisse fermée de codimension p. On note $i : Y \to X$, l'immersion de Y dans X.

Rappel sur $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$. — Soit ω_X (resp. ω_Y) le faisceau des formes différentielles de degré maximum sur X (resp. Y). Rappelons la correspondance entre les $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche et à droite ([**Cimpa1**, prop. 15, p. 122]).

Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. On rappelle que ω_X est naturellement un $\mathscr{D}_X$-Module à droite. Le $\mathscr{O}_X$-Module $\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} M$ est alors un $\mathscr{D}_X$-Module à droite. Cette structure de $\mathscr{D}_X$-Module à droite est définie en posant pour tout champ de vecteurs ξ, pour toute forme $\omega \in \omega_X$ et pour toute section $m \in M$:

$$(\omega \otimes m)\xi = \omega\xi \otimes m - \omega \otimes \xi m$$

Inversement, si N est un $\mathscr{D}_X$-Module à droite, $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, N)$ est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. Sa structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche est définie en posant pour tout champ de vecteurs ξ, pour tout $\phi \in \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, N)$ et pour toute forme $\omega \in \omega_X$:

$$(\xi\phi)(\omega) = \phi(\omega\xi) - \phi(\omega)\xi$$

Posons :

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow Y} = i^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X) \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y$$

Remarquons que le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X)$ a deux structures de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche : une structure 1 qui provient de la structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche de $\mathscr{D}_X$ et une structure 2 qui provient de la structure de $\mathscr{D}_X$-Module à droite de $\mathscr{D}_X$. Nous considérons :

$$i^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X) \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$$

comme l'image inverse du $\mathscr{D}_X$-Module à gauche $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X)$ munie de la structure 2 de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche. Cette image inverse est alors munie d'une structure de $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche et d'une structure de $i^{-1}\mathscr{D}_X$-Module à gauche provenant de la structure 1 sur $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X)$. Le faisceau $\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}$ est donc un $i^{-1}\mathscr{D}_X$-Module à gauche et un $\mathscr{D}_Y$-Module à droite.

Dans un système de coordonnées locales où Y est défini par les équations $x_1 = \cdots = x_p = 0$ dans $X = \mathbf{C}^n$, nous avons l'identification :

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \simeq \frac{i^{-1}\mathscr{D}_X}{i^{-1}\mathscr{D}_X(x_1,\ldots,x_p)}$$
$$\text{« } ((dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \mapsto 1) \otimes 1 \otimes dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) \text{ »} \quad \longmapsto \dot{1}$$

où le terme de droite est muni de sa structure naturelle de $i^{-1}\mathscr{D}_X$-Module à gauche et de $\mathscr{D}_Y$-Module à droite.

Étudions comment cet isomorphisme se transporte par changement de coordonnées. Soit donc :

$$h : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n \;\; ; \;\; x = (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto y = (h_1(x),\ldots,h_n(x))$$

un difféomorphisme de $\mathbf{C}^n$ laissant Y invariant. Les fonctions $h_1, \dots, h_p$ sont donc dans l'idéal $(x_1, \dots, x_p)\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$. Par suite, il existe des fonctions $a_{i,j}(x)$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, telles que :

$$h_k(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i a_{k,i}(x)$$

pour $1 \leqslant k \leqslant p$. Le difféomorphisme h induit le difféomorphisme :

$$h' : Y \longrightarrow Y \ ; \ \ x' = (x_{p+1}, \dots, x_n) \longmapsto y' = (h_{p+1}(0, x'), \dots, h_n(0, x'))$$

Nous avons alors l'isomorphisme de $i^{-1}\mathscr{D}_X$-Modules à gauche et de $\mathscr{D}_Y$-Modules à droite suivant, qui commute aux identifications locales avec $\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}$:

$$\frac{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(x_1, \dots, x_p)} \xrightarrow{\ \simeq\ } \frac{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(y_1, \dots, y_p)}$$

$$1 \longmapsto \operatorname{jac}(h)(h^{-1}(y))/\operatorname{jac}(\dot{h'})(h'^{-1}(y_{p+1}, \dots, y_n)) = \det A(\dot{h}^{-1}(y))$$

où $\operatorname{jac}(h)$ (resp. $\operatorname{jac}(h')$) désigne le jacobien du difféomorphisme h (resp. h') et A est la $p \times p$ matrice $(a_{i,j}(x))$.

Image directe de l'image inverse. — Rappelons qu'un $\mathscr{D}_X$-Module est dit algébriquement supporté par Y si ses sections sont localement annulées par une puissance de l'idéal $\mathscr{J}$ définissant Y. Si M désigne un $\mathscr{D}_X$-Module algébriquement supporté par Y, d'après le corollaire I.3.2, on a : $Li^*M \simeq L^{-p}i^*M[p]$. D'autre part, le foncteur i_+ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}_Y$-Modules et celle des $\mathscr{D}_X$-Modules supportés par Y (**[Cimpa2]**, th. 1 page 9). Le foncteur $M \to L^{-p}i^*M$ en est un quasi-inverse. On pourra d'ailleurs noter que si M est un $\mathscr{D}_X$-Module, il existe un isomorphisme naturel :

$$L^{-p}i^*M \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\omega_Y, i^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}, M \otimes \omega_X))$$

Proposition 5.1. — *Soit M un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Il existe un isomorphisme naturel :*

$$\Phi(M) \ : \ i_+(Li^*M) \longrightarrow R\Gamma_{[Y]}M[+p]$$

Démonstration. — Constatons d'abord que $Li^*(RM(\star Y)) = 0$. Cela résulte par exemple de la proposition 4.1 (le lecteur pourra en donner une preuve directe). Nous avons donc un isomorphisme naturel de $\mathscr{D}_Y$-Modules :

$$Li^*(R\Gamma_{[Y]}M) \xrightarrow{\ \simeq\ } Li^*M$$

Soit $J^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules injectifs isomorphe à M. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{[Y]}M &= \Gamma_{[Y]}J^\bullet \\ Li^*(R\Gamma_{[Y]}M) &= Li^*(\Gamma_{[Y]}J^\bullet) \simeq L^{-p}i^*(\Gamma_{[Y]}J^\bullet[+p]) \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} i_+(Li^*(R\Gamma_{[Y]}M)) &= i_+(L^{-p}i^*(\Gamma_{[Y]}J^\bullet)[+p]) \\ &\simeq \Gamma_{[Y]}J^\bullet[+p] \\ &\simeq R\Gamma_{[Y]}M[+p] \end{aligned}$$

D'où l'isomorphisme annoncé. En particulier pour $M = \mathscr{O}_X$, nous obtenons :

Corollaire 5.2. — $i_+(\mathscr{O}_Y) \simeq R^p\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X$

Dans un système de coordonnées locales, nous avons vu à la section 2 que $R^p\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X$ s'identifie à :

$$\frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(x_1,\dots,x_p,\partial/\partial x_{p+1},\dots,\partial/\partial x_n)}$$

D'autre part, nous avons l'isomorphisme :

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \simeq \frac{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(x_1,\dots,x_p)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} i_+(\mathscr{O}_Y) &\simeq \frac{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(x_1,\dots,x_p)} \otimes_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}}} \frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}}}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-p}}(\partial/\partial x_{p+1},\dots,\partial/\partial x_n)} \\ &\simeq \frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}(x_1,\dots,x_p,\partial/\partial x_{p+1},\dots,\partial/\partial x_n)} \end{aligned}$$

On obtient ainsi un isomorphisme local entre $i_+(\mathscr{O}_Y)$ et $R^p\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X$, et on peut vérifier qu'il coïncide en fait avec l'isomorphisme du corollaire précédent.

V. Images inverses et solutions d'un $\mathscr{D}$-Module

1. Un morphisme fonctoriel. — Soit $f : X \to Z$ un morphisme analytique entre deux variétés analytiques X et Z. Soient M et N deux complexes bornés de $\mathscr{D}_Z$-Modules à gauche. Nous allons montrer qu'il existe une flèche naturelle de complexes de faisceaux de $\mathbf{C}_X$-espaces vectoriels :

$$f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M,N) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, Lf^*N)$$

Cette flèche est définie par M. Kashiwara et P. Schapira dans [**K-S**].

Lemme 1.1. — *Il existe une résolution de $\mathscr{D}_{X\to Z}$ par des $(\mathscr{D}_X, f^{-1}\mathscr{D}_Z)$ bi-Modules qui sont des $f^{-1}\mathscr{D}_Z$-Modules plats.*

Démonstration. — Nous pouvons considérer $\mathscr{D}_{X\to Z}$ comme un $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} f^{-1}\mathscr{D}_Z$-Module. Une résolution plate en est une résolution par des $(\mathscr{D}_X, f^{-1}\mathscr{D}_Z)$ bi-modules. Une telle résolution convient, puisqu'un $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} f^{-1}\mathscr{D}_Z$-Module plat est $f^{-1}\mathscr{D}_Z$-Module plat.

Soit $I^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_Z$-Modules à gauche injectifs quasi-isomorphe à N. Soit $P^\bullet$ une résolution de $\mathscr{D}_{X\to Z}$ par des $(\mathscr{D}_X, f^{-1}\mathscr{D}_Z)$ bi-modules qui sont $f^{-1}\mathscr{D}_Z$ plats. Soit $J^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche injectifs isomorphe au complexe simple $(P^\bullet \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Z} f^{-1}I^\bullet)^\bullet$ associé au complexe double $(P^\bullet \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Z} f^{-1}I^\bullet)$. Nous avons alors les morphismes canoniques :

$$\begin{aligned}
f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M,N) &\xrightarrow{\ \simeq\ } f^{-1}\,\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_Z}(M,I^\bullet)\\
&\longrightarrow \mathscr{H}om^\bullet_{f^{-1}\mathscr{D}_Z}(f^{-1}M, f^{-1}I^\bullet)\\
&\longrightarrow \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_X}((P^\bullet \otimes f^{-1}M)^\bullet, (P^\bullet \otimes f^{-1}I^\bullet)^\bullet)\\
&\longrightarrow \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_X}((P^\bullet \otimes f^{-1}M)^\bullet, J^\bullet)\\
&\xrightarrow{\ \simeq\ } R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, Lf^*N)
\end{aligned}$$

Le lecteur pourra vérifier que ce morphisme est indépendant des résolutions choisies ; nous le noterons :

$$\operatorname{can}(f,M,N)\ : f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M,N) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, Lf^*N)$$

Si $N = \mathscr{O}_Z$, $Lf^*N = \mathscr{O}_X$ et nous obtenons un morphisme entre le complexe des solutions holomorphes de M et celui de son image inverse. Nous le notons $\operatorname{can}(f,M)$:

$$\operatorname{can}(f,M)\ : f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M,\mathscr{O}_Z) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, \mathscr{O}_X)$$

D'autre part, si $g : Y \to X$ est un morphisme analytique :

$$\operatorname{can}(g, Lf^*M, Lf^*N)\circ g^{-1}\operatorname{can}(f,M,N) \simeq \operatorname{can}(f\circ g, M, N)$$

Le morphisme $\operatorname{can}(f,M,N)$ peut donc se calculer en écrivant f comme la composée d'une immersion et d'une projection. Traitons le cas de la projection.

Proposition 1.2. — *Soient X et Y deux variétés analytiques complexes. Désignons par $\pi : X\times Y \to X$ la première projection. Alors :*

$$\operatorname{can}(\pi,M)\ : \pi^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M,\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\ \simeq\ } R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X\times Y}}(L\pi^*M, \mathscr{O}_{X\times Y})$$

est un isomorphisme pour tout complexe borné M de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche dont les groupes de cohomologie sont des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche cohérents.

Démonstration. — Rappelons que π^* est un foncteur exact. Le morphisme $\operatorname{can}(\pi,M)$ étant défini globalement, il suffit de vérifier la proposition localement. D'après le lemme du way-out [**Cimpa2**, II.5, p. 86], il suffit de faire cette vérification pour

$X = \mathbf{C}^n$, $Y = \mathbf{C}^p$ et $M = \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$. Considérons $(x_1, \dots, x_n)$ (resp. $(y_1, \dots, y_p)$) un système de coordonnées locales de X (resp. de Y). Nous avons :

$$\pi^*(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}) \simeq \frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p}}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p}(\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p)}$$

Le complexe de Koszul $K(\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p, \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p})$ est donc une résolution de $\pi^*(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})$ par des $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p}$-Modules libres. On en déduit que :

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p}}(\pi^*(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}), \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p})$$

est isomorphe au complexe de Koszul $K(\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p})$. Ce complexe étant isomorphe à $\pi^{-1}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$, le résultat s'en déduit.

2. Cas d'une immersion lisse fermée. — Soient X une variété analytique lisse, et $Y \subset X$ une sous-variété lisse fermée de codimension p. Notons $i : Y \to X$ le morphisme d'inclusion.

Soit M un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Par fonctorialité du morphisme can, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X)_{|Y} \arrow[r, "\alpha(Y,M)"] \arrow[d, "\mathrm{can}(i,M)"'] & R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, \mathscr{O}_X)_{|Y} \arrow[d, "\mathrm{can}(i, R\Gamma_{[Y]}M)"] \\
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(Li^*M, \mathscr{O}_Y) \arrow[r, "\alpha'(Y,M)"'] & R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(Li^*(R\Gamma_{[Y]}M), \mathscr{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, \mathscr{O}_X)_{|Y} \arrow[d, "\mathrm{can}(i, R\Gamma_{[Y]}M)"'] & R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X)_{|Y} \arrow[l, "\beta(Y,M)"'] \arrow[d, "\mathrm{can}(i, R\Gamma_{[Y]}M, R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X)"] \\
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(Li^*(R\Gamma_{[Y]}M), \mathscr{O}_Y) & R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(Li^*(R\Gamma_{[Y]}M), Li^*(R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X)) \arrow[l, "\beta'(Y,M)"]
\end{tikzcd}$$

Étudions ces diagrammes. Tout d'abord, la nullité de $Li^*(RM(\star Y))$ implique que $\alpha'(Y, M)$ et $\beta'(Y, M)$ sont des isomorphismes.

D'autre part, le morphisme $\mathrm{can}(i, R\Gamma_{[Y]}M, R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X)$:

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X)_{|Y} \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(Li^*(R\Gamma_{[Y]}M), Li^*(R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X))$$

est un isomorphisme sous l'hypothèse du lemme 2.1. En effet, soit $I^\bullet$ (resp. $J^\bullet$) une résolution injective de M (resp. $\mathscr{O}_X$). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, R\Gamma_{[Y]}\mathscr{O}_X)_{|Y} &\simeq R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, \mathscr{O}_X)_{|Y} \\
&\simeq \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_X}(\Gamma_{[Y]}I^\bullet, J^\bullet)_{|Y} \\
&= \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_X}(\Gamma_{[Y]}I^\bullet, \Gamma_{[Y]}J^\bullet)_{|Y} \\
&= \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_Y}(L^p i^*\Gamma_{[Y]}I^\bullet, L^p i^*\Gamma_{[Y]}J^\bullet)
\end{aligned}$$

Or $L^p i^* \Gamma_{[Y]} J^\bullet$ est un complexe de $\mathscr{D}_Y$-Modules injectifs, car pour tout entier k :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(N, L^p i^* \Gamma_{[Y]} J^k) = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(i_+ N, J^k)$$

ainsi :

$$\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_Y}(L^p i^* \Gamma_{[Y]} I^\bullet, L^p i^* \Gamma_{[Y]} J^\bullet) = R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(Li^*(R\Gamma_{[Y]} M), Li^*(R\Gamma_{[Y]} \mathscr{O}_X))$$

On vérifie ensuite par un calcul en coordonnées locales que ce morphisme correspond bien au morphisme $\mathrm{can}(i, R\Gamma_{[Y]} M, R\Gamma_{[Y]} \mathscr{O}_X)$.

Lemme 2.1. — *Si M est un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-Modules tel que $R\Gamma_{[Y]} M$ soit à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente, le morphisme naturel :*

$$R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]} M, \mathscr{O}_X) \longleftarrow R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]} M, R\Gamma_{[Y]} \mathscr{O}_X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de montrer que si N est $\mathscr{D}_X$-Module cohérent supporté par Y, le morphisme naturel

$$R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, \mathscr{O}_X) \longleftarrow R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, R\Gamma_{[Y]} \mathscr{O}_X)$$

est un isomorphisme. Considérons $I^\bullet$ une résolution injective de $\mathscr{O}_X$ comme $\mathscr{D}_X$-Modules. D'après les lemmes IV.1.1 et IV.1.3 :

$$R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, R\Gamma_{[Y]} \mathscr{O}_X) = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, \Gamma_{[Y]} I^\bullet)$$

Nous utilisons ici l'hypothèse sur N puisque nous savons seulement que $\Gamma_{[Y]} I^\bullet$ est un complexe dont les fibres sont des $\mathscr{O}_{X,x}$-modules injectifs. Comme N est supporté par Y, le complexe $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, \Gamma_{[Y]} I^\bullet)$ est égal à $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, I^\bullet)$ qui coïncide avec $R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(N, \mathscr{O}_X)$; d'où l'assertion.

En particulier, le morphisme $\beta(Y, M)$ est un isomorphisme lorsque M satisfait aux hypothèses du lemme précédent. Nous avons alors la proposition :

Proposition 2.2. — *Si M est un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-Modules tel que $R\Gamma_{[Y]} M$ soit à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente, le morphisme* $\mathrm{can}(i, M)$ *s'écrit :*

$$\mathrm{can}(i, M) = \delta(M) \circ \alpha(Y, M)$$

où $\delta(M)$ est l'isomorphisme :

$$\alpha'(Y, M)^{-1} \beta'(Y, M)\, \mathrm{can}(i, R\Gamma_{[Y]} M, R\Gamma_{[Y]} \mathscr{O}_X) \beta(Y, M)^{-1}$$

3. Exemples. — Reprenons l'exemple 2 du paragraphe IV.2 :

$$M = \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id} - A)}$$

où N est un entier naturel non nul et A une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\mathscr{D}_{\mathrm{rel}}$, le sous-faisceau de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$ constitué des opérateurs indépendants de $(\partial/\partial x_1)$. Soit $Z \subset \mathbf{C}^n$, l'hyperplan de coordonnées $\{x_1 = 0\}$. Nous avons montré que le triangle de cohomologie locale associé à Z est représenté par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id} - A)} \longrightarrow \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id} - A)x_1} \longrightarrow \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N x_1} \longrightarrow 0$$

En relevant des résolutions libres de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche des termes extrêmes, nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \oplus (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\cdot \begin{pmatrix} (\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A & 0 \\ -1 & x_1 \end{pmatrix}"'] & (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \oplus (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}"] & (\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "P \mapsto Px_1"] \arrow[d] & \dfrac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N((\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A)x_1} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n})^N x_1 \operatorname{Id}_N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où les lignes et les colonnes sont des suites exactes de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Modules à gauche. Appliquons le foncteur $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(-, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z$; nous obtenons la suite exacte de complexes verticaux :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \arrow[l] \arrow[u] & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \arrow[l] \arrow[u] & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \arrow[l] \arrow[u, "(\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A"] & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \arrow[l] \arrow[u, "\begin{pmatrix} (\partial/\partial x_1)\operatorname{Id}_N - A & 0 \\ -1 & x_1 \end{pmatrix}"] & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z \arrow[l] \arrow[u, "x_1"'] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

qui représente le triangle :

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})_{|Z} \longleftarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(RM(\star Z),\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})_{|Z} \longleftarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R\Gamma_{[Z]}M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})_{|Z}[-1]$$

Décrivons dans ce cas particulier les morphismes introduits au paragraphe 2.

Le morphisme $\alpha(Z,M)$. — Désignons par $\alpha^i(M)$ le morphisme induit par $\alpha(Z,M)$ sur le $i^{ème}$ groupe de cohomologie. Une chasse dans le diagramme établit que $\alpha^i(M)=0$ pour $i\neq 0$ et que $\alpha^0(M)$ s'identifie au morphisme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R^1\Gamma_{[Z]}M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z \arrow[d, "\wr"] \\
R^0\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & R^0\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R\Gamma_{[Z]}M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z \arrow[d, "\wr"] \\
\{f\in\mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}|_Z\ ;\ (\partial/\partial x_1\,\mathrm{Id}_N - A)f=0\} \arrow[r, "f\mapsto \dot f"] & \mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}x_1|_Z
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\beta(Z,M)$. — Il s'identifie au morphisme :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R^1\Gamma_{[Z]}M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z \arrow[d, "\wr"] & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R^1\Gamma_{[Z]}M,R^1\Gamma_{[Z]}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})_{|Z} \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] \\
(\mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}x_1)|_Z & \{(\dot{a/x_1})\in(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1]/\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})^N|_Z\ ;\ a\in\mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}\} \arrow[l] \\
\dot a & (\dot{a/x_1}) \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Cette flèche est comme prévu un isomorphisme (voir le paragraphe 2).

Le morphisme $\mathrm{can}(i,R\Gamma_{[Z]}M,R\Gamma_{[Z]}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$. — La multiplication par x_1 dans M étant injective, le complexe Li^*M est isomorphe au complexe à un terme : $(M/x_1M)|_Z$ placé en degré zéro. Ce module étant isomorphe à $\mathscr{D}^N_{\mathbf{C}^{n-1}}$, le morphisme $\mathrm{can}(i,R\Gamma_{[Z]}M,R\Gamma_{[Z]}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$ s'identifie donc à :

$$\begin{tikzcd}
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R\Gamma_{[Z]}M,R\Gamma_{[Z]}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z \arrow[d, "\wr"] & R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(Li^*M,\mathscr{O}_Z) \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(R^1\Gamma_{[Z]}M,\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1]/\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})|_Z \arrow[d, "\wr"] & R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}}(\mathscr{D}^N_{\mathbf{C}^{n-1}},\mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1}}) \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] \\
\{(\dot{a/x_1})\in(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}[1/x_1]/\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})^N|_Z\ ;\ a\in\mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^n}\} & \mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^{n-1}} \arrow[l] \\
b/x_1 & b \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

C'est bien un isomorphisme.

Le morphisme $\operatorname{can}(i, M)$. — Faisons l'hypothèse supplémentaire sur M suivante : $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \simeq R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$. Cette hypothèse est vérifiée quand l'hypersurface Z est non caractéristique pour M, donc par exemple si M est un système de Cauchy généralisé (voir le paragraphe suivant). On a alors :

$$\begin{array}{ccc}
i^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & i^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(i^{-1}M, i^{-1}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) & \to & \mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(i^{-1}M, i^{-1}\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}}(i^*M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1}}) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}}(i^*M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1}})
\end{array}$$

Le morphisme $\operatorname{can}(i, M)$ s'identifie donc au morphisme :

$$\begin{array}{ccc}
i^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}}(M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) & \longrightarrow & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^{n-1}}}(i^*M, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1}}) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\{f \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N|_Z ; (\partial/\partial x_1 \operatorname{Id}_N - A)f = 0\} & \longrightarrow & \mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1}}^N \\
f & \longmapsto & f(0, x_2, \ldots, x_n)
\end{array}$$

4. Théorème de Cauchy et le cas non caractéristique

Le cas non caractéristique. — Soient N, m, $r_1, \ldots, r_m$, des entiers naturels non nuls ; on note $N \in \mathbf{N}^*$ la somme $r_1 + \cdots + r_m$. Soit $\rho(1) < \cdots < \rho(m)$, une suite strictement croissante d'entiers non nuls. Soit A une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$ indépendants de $(\partial/\partial x_1)$, formée de blocs $A_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, de taille $r_i \times r_j$, dont les coefficients ont leur degré inférieur ou égal à $\rho(i) - \rho(j) + 1$. Rappelons que le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-module à gauche :

$$M(A) = \frac{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0})^N}{(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0})^N((\partial/\partial x_1) \operatorname{Id}_N - A)}$$

est un germe à l'origine de *système de Cauchy généralisé* (le long de l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$), associé à A. Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, notons $e_i \in M(A)$, la classe du $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $(\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0})^N$.

Soient $f \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}^N$ et $u_0 \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1},0}^N$. Si $m = 1$, $M(A)$ correspond exactement au système considéré au paragraphe 5. Il résulte du théorème de Cauchy-Kovalevska — dont nous donnons une preuve au paragraphe 5 — que le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} u = Au + f \\ u(0, x_2, \ldots, x_n) = u_0 \end{cases}$$

a une unique solution.

Si $m > 1$, en rajoutant des générateurs au $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-Module à gauche $M(A)$, nous pouvons montrer l'existence d'un entier ℓ, d'un *système de Cauchy généralisé* $M(A')$ avec $m' = 1$ et d'une suite exacte de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-Modules à gauche :

$$0 \longrightarrow \left(\frac{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}}{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}\partial/\partial x_1}\right)^\ell \longrightarrow M(A') \longrightarrow M(A) \longrightarrow 0$$

Compte-tenu de la présentation de $M(A)$ donnée au paragraphe II.3, nous en déduisons :

Théorème 4.1. — *Soit $M(A)$ un système de Cauchy généralisé. Alors, il y a un isomorphisme :*

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}}(M(A),\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}}(M(A),\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0})$$

De plus, le morphisme naturel :

$$\begin{aligned}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}}(M(A),\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}) &\longrightarrow \mathscr{O}^N_{\mathbf{C}^{n-1},0}\\ \phi &\longmapsto (\phi_1(0,x'),\dots,\phi_N(0,x'))\end{aligned}$$

où $\phi_i = \phi(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, et $x' = (x'_2,\dots,x'_n)$, est un isomorphisme.

Montrons maintenant :

Proposition 4.2 **([K4])**. — *Soit $Y \subset X$ une sous-variété fermée de X ; notons $i : Y \to X$ le morphisme d'inclusion. Soit M un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche dont les groupes de cohomologie sont $\mathscr{D}_X$-cohérents et admettent Y comme sous-variété non caractéristique. Alors, les morphismes naturels :*

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M,\mathscr{O}_X)|_Y \xrightarrow{\alpha(Y,M)} R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M,\mathscr{O}_X)|_Y$$

et

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M,\mathscr{O}_X)|_Y \xrightarrow{\operatorname{can}(i,M)} R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(i^*M,\mathscr{O}_Y)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — On peut utiliser le lemme du way-out. Le problème étant local, nous pouvons donc supposer que Y est une intersection d'hypersurfaces lisses : $Y = \cap_{i=1}^p Y_i$. Constatons que si Y est non caractéristique pour M, alors la sous-variété $\cap_{i=2}^p Y_i$ l'est aussi pour $R\Gamma_{[Y_1]}M$. Ainsi, il suffit de prouver la proposition lorsque M est un système de Cauchy généralisé (proposition II.3.4) ; ce qui se déduit des calculs du paragraphe 3 et du théorème de Cauchy-Kovalevska (théorème 4.1).

Plus généralement, en factorisant un morphisme par l'immersion de son graphe, on obtient le résultat suivant à partir des propositions 1.2 et 4.2 :

Proposition 4.3. — *Soit M un $\mathscr{D}_Z$-Module cohérent et $f : X \to Z$ un morphisme non caractéristique pour M. Alors le morphisme* $\operatorname{can}(f,M)$ *:*

$$f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M,\mathscr{O}_Z) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M,\mathscr{O}_X)$$

est un isomorphisme.

Application aux conditions de support des solutions d'un module holonome. — Soient X une variété analytique de dimension n et $Y \subset X$ un sous-espace analytique. On appelle *espace conormal relatif à* Y *dans* X l'adhérence dans T^*X du fibré conormal à la partie lisse de Y ; on le note $T^*_Y X$. Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module holonome. Sa variété caractéristique s'écrit comme une réunion localement finie d'espaces conormaux :

$$\operatorname{car} M = \cup T^*_{X_\alpha} X$$

Considérons la projection $\pi : \operatorname{car} M \to X$. Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, posons $\Sigma_k = \{x \in X \ ; \ \dim \pi^{-1}(x) \geqslant k\}$. Par semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme, ce sont des espaces analytiques. La variété caractéristique de M étant équidimensionnelle de dimension n, Σ_k est de dimension inférieure ou égale à $n-k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit $x \notin \Sigma_k$. Alors la dimension de $\pi^{-1}(x)$ est inférieure à $k-1$. Il existe donc un sous-espace affine H de dimension $k-1$ passant par x et tel que $T^*_H X \cap \operatorname{car} M \subset T^*_X X$ au voisinage de x. D'après la proposition 4.3, nous avons donc l'isomorphisme :

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X)|_H \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_H}(i^*M, \mathscr{O}_H)$$

où i désigne l'inclusion de H dans X. Le $\mathscr{D}_X$-Module M et le $\mathscr{D}_H$-Module i^*M étant cohérents, on a l'isomorphisme :

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X,x}}(M_x, \mathscr{O}_{X,x}) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{H,x}}((i^*M)_x, \mathscr{O}_{H,x})$$

D'après des résultats classiques d'algèbre homologique [**Cimpa1**, th. 7, p. 149], ce complexe n'a donc des groupes de cohomologie non nuls qu'en degré inférieur ou égal à $k-1$. Nous avons ainsi montré que le faisceau $\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X)$ est supporté par Σ_k, c'est-à-dire par un espace analytique de dimension au plus $n-k$.

Proposition 4.4. — *Soit M un $\mathscr{D}_X$-Module holonome. Les supports des faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X)$ sont contenus dans des sous-espaces analytiques de X de dimension inférieure ou égale à $n-k$.*

D'après le théorème de constructibilité de Kashiwara ([**Cimpa2**] [**K2**]), le complexe des solutions d'un module holonome est constructible. Dans son exposé, L. Narváez-Macarro montre que le dual du complexe des solutions d'un Module holonome est le complexe des solutions du $\mathscr{D}$-Module dual. Cette proposition établit donc que le complexe des solutions d'un $\mathscr{D}$-Module holonome est pervers.

5. Une preuve du théorème de Cauchy-Kovalevska. — Cette preuve est largement inspirée de celle donnée par F. Trèves dans [**T**]. Notons $B_\varepsilon \subset \mathbf{C}^{n-1}$ la boule ouverte de rayon $\varepsilon \in \mathbf{R}^{*,+}$ de centre l'origine et $D_\eta \subset \mathbf{C}$ celle de rayon $\eta \in \mathbf{R}^{*,+}$ de centre l'origine. On désignera par $\overline{H}^{n,m}_{\eta,\varepsilon}$ (resp. $\overline{H}^{n,m}_{\varepsilon}$) l'ensemble des m-uplets de fonctions holomorphes sur $D_\eta \times B_\varepsilon$ (resp. B_ε) se prolongeant de façon continue sur le produit des boules fermées $\overline{D}_\eta \times \overline{B}_\varepsilon$ (resp. $\overline{B}_\varepsilon$).

Nous souhaitons résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0 u + f \\ u|_{x_1=0} = u_0 \end{cases}$$

où $A_j = (a_{j,k,\ell}(x))$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq 1$, est une matrice $m \times m$ à coefficients dans $\overline{H}^{n,1}_{\eta_1,\varepsilon_1}$, ε_1 et η_1 deux réels strictement positifs, $f \in \overline{H}^{n,m}_{\eta_1,\varepsilon_1}$ et $u_0 \in \overline{H}^{n,m}_{\varepsilon_1}$. Notons $f_1, \ldots, f_m$, les composantes de f et $u_{0,1}, \ldots, u_{0,n}$, celles de u_0. Posons :

$$\|A_j\|_{\eta_1,\varepsilon_1} = \sup_{k,\ell} \sup_{x \in D_{\eta_1} \times B_{\varepsilon_1}} |a_{j,k,\ell}(x)|$$

$$\|f\|_{\eta_1,\varepsilon_1} = \sup_{i} \sup_{x \in D_{\eta_1} \times B_{\varepsilon_1}} |f_i(x)|$$

$$\|u_0\|_{\varepsilon_1} = \sup_{i} \sup_{x' \in B_{\varepsilon_1}} |u_{0,i}(x')|$$

$$A = \sum_{j=2}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial}{\partial x_1} - A$$

Lemme 5.1. — *Pour tout* $\varepsilon', \varepsilon, \eta', \eta \in \mathbf{R}^{+,*}$ *tels que* $0 < \varepsilon' < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $0 < \eta' < \eta \leqslant \eta_1$, *l'opérateur :*

$$A : \overline{H}^{n,m}_{\eta,\varepsilon} \longrightarrow \overline{H}^{n,m}_{\eta',\varepsilon'}$$

est continu, de norme majorée par $C/(\varepsilon - \varepsilon')$, *où :*

$$C = \sum_{j=2}^{n} \|A_j\|_{\eta_1,\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \|A_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

L'opérateur :

$$B : \overline{H}^{n,m}_{\eta,\varepsilon} \longrightarrow \overline{H}^{n,m}_{\eta',\varepsilon'}$$

est continu, de norme majorée par $(1 + C)/\inf(\varepsilon - \varepsilon', \eta - \eta')$.

Démonstration. — Il résulte des formules de Cauchy que l'opérateur de dérivation $\partial/\partial x_j : \overline{H}^{n,m}_{\eta,\varepsilon} \to \overline{H}^{n,m}_{\eta',\varepsilon'}$ (resp. $\partial/\partial x_1$) est linéaire, continu, de norme majorée par $1/(\varepsilon - \varepsilon')$ (resp. $1/(\eta - \eta')$) pour $j \geqslant 2$ (resp. j=1). Le lemme s'en déduit.

Soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ et $0 < \eta' < \eta \leqslant \eta_1$. On considère l'opérateur :

$$T \; : \; \overline{H}^{n,m}_{\eta,\varepsilon} \longrightarrow \overline{H}^{n,m}_{\eta',\varepsilon'} \;\; ; \;\; w \longmapsto \int_0^{x_1} A(u, x') w(u, x') \, \mathrm{d}u$$

Lemme 5.2. — *Soit* $w_0 \in \overline{H}^{n,m}_{\eta_1,\varepsilon_1}$. *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *pour tout* $\eta \in \,]0, \eta_1[$ *et pour tout* $d \in \,]0, \varepsilon_1[$, $T^k w_0$ *appartient à* $\overline{H}^{n,m}_{\eta,\varepsilon_1 - d}$ *et :*

$$\|T^k w_0\|_{\eta,\varepsilon_1 - d} \leqslant (Ce\eta/d)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

De même, si on pose $D = 1 + C$ *et si* $d < \eta_1$, *alors* $B^k w_0$ *appartient à* $\overline{H}^{n,m}_{\eta_1 - d,\varepsilon_1 - d}$ *et :*

$$\|B^k w_0\|_{\eta_1 - d,\varepsilon_1 - d} \leqslant k!(De/d)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur k. Supposons que pour tout complexe t vérifiant $0 \leqslant |t| < \eta_1$:

$$T^k w_0 \in \overline{H}^{n,m}_{|t|,\varepsilon_1 - d + \frac{d}{k+1}}$$

$$\|T^k w_0\|_{|t|,\varepsilon_1 - d + \frac{d}{k+1}} \leqslant \left(\frac{Ce|t|}{d - \frac{d}{k+1}} \right)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\|T^{k+1} w_0\|_{\eta,\varepsilon_1 - d} &\leqslant \int_0^\eta \frac{C}{\frac{d}{k+1}} \left(\frac{Cet'}{d - \frac{d}{k+1}} \right)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1} dt' \\
&\leqslant \frac{(k+1)C}{d} \left(\frac{Ce}{d} \right)^k \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \frac{1}{k+1} \eta^{k+1} \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1} \\
&\leqslant \frac{C^{k+1}}{d^{k+1}} e^k \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \eta^{k+1} \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1} \leqslant \left(\frac{Ce}{d} \eta \right)^{k+1} \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

De même, supposons que :

$$\|B^k w_0\|_{\eta_1 - d + \frac{d}{k+1},\varepsilon_1 - d + \frac{d}{k+1}} \leqslant k! \left(\frac{De}{d - \frac{d}{k+1}} \right)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\|B^{k+1} w_0\|_{\eta_1 - d,\varepsilon_1 - d} &\leqslant \frac{D}{\frac{d}{k+1}} \frac{k! D^k e^k}{d^k k^k} (k+1)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1} \\
&\leqslant (k+1)! \left(\frac{D}{d} \right)^{k+1} e^k \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1} \\
&\leqslant (k+1)! \left(\frac{De}{d} \right)^{k+1} \|w_0\|_{\eta_1,\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

***Proposition 5.3* (théorème de Cauchy-Kovalevska).** — *Soient $u_0 \in \overline{H}^{n,m}_{\varepsilon_1}$ et $f \in \overline{H}^{n,m}_{\eta_1,\varepsilon_1}$. Posons :*

$$M = \|u_0\|_{\varepsilon_1} + \eta_1 \|f\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

Si $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon_1[$ et $\eta_0 \in]0, \inf\{\eta_1, (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/Ce\}[$, alors le système :

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} Bu = f \\ u|_{x_1 = 0} = u_0 \end{cases}$$

a une unique solution dans $\overline{H}^{n,m}_{\varepsilon_0,\eta_0}$ et :

$$\|u\|_{\varepsilon_0,\eta_0} \leqslant M \frac{1}{1 - Ce\eta_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^{-1}}$$

Démonstration. — Posons $w_0 = u_0 + \int_0^{x_1} f(t,x')dt$. Alors, $w_0 \in \overline{H}^{n,m}_{\eta'_1,\varepsilon_1}$, où $\eta'_1 < \eta_1$ et $\|w_0\|_{\eta'_1,\varepsilon_1} \leqslant M$. D'après le lemme 5.2, $w_k = T^k w_0$ est le terme général d'une série normalement convergente de l'espace de Banach $\overline{H}^{n,m}_{\eta_0,\varepsilon_0}$. On pose $u = \sum_{k\geqslant 0} w_k$. Nous avons :

$$\sum_{i=0}^{k} w_i = u_0 + \int_0^{x_1} f(t,x')\,\mathrm{d}t + \int_0^{x_1} A\big(\textstyle\sum_0^{k-1} w_i\big)\,\mathrm{d}t$$

Par suite $u = u_0 + \int_0^{x_1} f(t,x')\,\mathrm{d}t + \int_0^{x_1} Au\ \mathrm{d}t$. En conséquence, u est une solution dans $\overline{H}^{n,m}_{\varepsilon_0,\eta_0}$ du système (†). L'unicité est claire, car u_0 permet de déterminer la valeur en $(0,z)$, $z \in B_{\varepsilon_0}$, des dérivées partielles de u ; par récurrence, on montre que cela détermine les dérivées partielles u.

Proposition 5.4. — *Soit $v \in \mathbf{C}\{x_1,x'\}^m$. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe des éléments $v_i \in \mathbf{C}\{x_1,x'\}^m$ uniques tels que $Bv_i = 0$ et $v = \sum_{i\geqslant 0}(x_1^i/i!)v_i$.*

Démonstration. — Si les v_i existent, il vérifient :

$$Bv_i(x_1,x') = 0 \quad ; \quad v_i(0,x') = (B^i v)(0,x')$$

D'après ce qui précède, ils sont uniques. Montrons donc leur existence. Quitte à choisir ε_1 et η_1 assez petits, v admet un représentant dans $\overline{H}^{n,m}_{\eta_1,\varepsilon_1}$, que nous noterons encore v. De plus, d'après le lemme 5.2, pour $d = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$:

$$\|B^k v(0,x')\|_{\varepsilon_0} \leqslant k!(De/d)^k \|v\|_{\eta_1,\varepsilon_1}$$

Soit d' assez petit. D'après la proposition 5.3, le système :

$$Bv_i(x_1,x') = 0 \quad ; \quad v_i(0,x') = (B^i v)(0,x')$$

admet une unique solution dans $\overline{H}^{n,m}_{\eta_1-d',\varepsilon_0-d'}$ qui vérifie :

$$\|v_i\|_{\eta_1-d',\varepsilon_0-d'} \leqslant i!(De/d)^i \|v\|_{\eta_1,\varepsilon_1} \frac{1}{1 - Ce((\eta_1/d') - 1)}$$

Ainsi, $\sum_{i\geqslant 0}(x_1^i/i!)v_i(x_1,x')$ est normalement convergente pour x_1 assez petit. Notons $\lambda(x_1,x')$ sa somme. Il reste à voir que λ convient, c'est-à-dire coïncide avec v. Nous avons :

$$\lambda(0,x') = v_0(0,x') = v(0,x')$$

et

$$B\lambda = \sum \frac{x_1^{i-1}}{(i-1)!} v_i$$

Par suite :

$$B\lambda(0,x') = v_1(0,x') = Bv(0,x')$$

D'où $(\partial\lambda/\partial x_1)(0,x') = (\partial v/\partial x_1)(0,x')$. En itérant, on montre ainsi que la série de Taylor de λ coïncide avec celle de v. D'où la conclusion.

Remarque 5.5. — Cette proposition permet d'exprimer le lien entre les solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}$-Module non caractéristique le long d'une hypersurface et ses solutions lorsqu'il est considéré comme Module sur l'anneau des opérateurs différentiels relatifs.

Références

[Bj] J.-E. Björk – *Analytic $\mathscr{D}$-modules and applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993.

[C-G] F.J. Castro-Jiménez & M. Granger – « Explicit Calculations in Rings of Differential Operators », ce volume.

[H] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, 1977.

[K1] M. Kashiwara – « B-functions and holonomic systems », *Invent. Math.* **38** (1976), p. 33–53.

[K2] ———, « On the holonomic systems of differential equations II », *Invent. Math.* **49** (1978), p. 121–135.

[K3] ———, *Systems of microdifferential equations*, Progress in Math., vol. 34, Birkhäuser, Basel, Boston, 1983.

[K4] ———, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Mémoires, vol. 63, Société Mathématique de France, Paris, 1995, English translation of the Master thesis, Tokyo, 1970.

[K-S] M. Kashiwara & P. Schapira – *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.

[Cimpa1] Ph. Maisonobe & C. Sabbah (éds.) – *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, $\mathscr{D}$-modules cohérents et holonomes*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45, Hermann, Paris, 1993.

[Cimpa2] ——— (éds.) – *Éléments de la théorie des systèmes différentiels, Images directes et constructibilité*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993.

[Mat] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Stud. in Adv. Math., vol. 8, Cambridge University Press, 1986.

[Meb1] Z. Mebkhout – « Local cohomology of analytic spaces », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **12** (1977), p. 247–256.

[Meb2] ———, « Une autre équivalence de catégories », *Compositio Math.* **51** (1984), p. 63–68.

[T] F. Trèves – *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, 1975.

Ph. Maisonobe, UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France • *E-mail :* `phm@math.unice.fr`

T. Torrelli, UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France • *E-mail :* `torelli@math.unice.fr`