Naissance des fibrés et homotopie

Beno Eckmann*

Home is where one starts from. As one grows older
the world becomes stranger, the pattern more complicated
of dead and living

T.S. Eliot

Résumé

Il s'agit d'un épisode de l'histoire des mathématiques bien délimité dans son sujet et dans le temps : les origines de la théorie homotopique des espaces fibrés, de 1935 à 1950 environ (les débuts de la théorie des fibrés vectoriels, avec groupe de structure, etc. ne sont pas abordés). Durant cette période, la combinaison des idées de Hurewicz sur les groupes d'homotopie avec la notion de fibré suggérée par les « fibrations de Hopf » a livré une foule de résultats inattendus. Beaucoup de développements ultérieurs d'une importance fondamentale en topologie, en algèbre et au-delà, trouvent leur origine dans cet épisode.

Abstract

This is about an episode in the history of mathematics, very much restricted in content and in time: the origins of the homotopy theory of fibre spaces, roughly from 1935 to 1950 (the beginnings of the theory of vector bundles — fibre bundles, structure group, etc. — are not treated). During that period, the combination of Hurewicz's ideas concerning homotopy groups with the concept of fibre space suggested by the "Hopf fibrations" has led to a great

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A60, 55-03
*Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zentrum, Ch–8092 Zürich, Suisse

> number of unexpected results. Many later developments of fundamental importance in topology, algebra, and mathematics in general have their origin in this episode.

Dans cet exposé je traite un épisode de l'histoire des mathématiques bien délimité dans son sujet et dans le temps : les origines de la théorie homotopique des espaces fibrés, de 1935 à 1950 environ. Je le raconte plus ou moins comme je l'ai vécu moi-même – donc de façon assez personnelle.

Deux avertissements :

1. Les débuts de la théorie des fibrés vectoriels (avec groupe de structure, « fibre bundles », « sphere bundles ») qui datent à peu près de la même période, ne seront pas abordés. Je me borne aux résultats et problèmes liés à l'homotopie.
2. En parlant de « nous » je pense d'un côté au groupe des élèves de Heinz Hopf, de l'autre aux trois auteurs ou groupe d'auteurs qui ont développé indépendamment le sujet, les communications ayant été interrompues par la guerre : Ehresmann et Feldbau [1941], Hurewicz et Steenrod [1941], et moi-même [Eckmann 1941-42a]. Quant aux références j'ai la chance de pouvoir utiliser la bibliographie de l'ouvrage monumental de Dieudonné : *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960* [Dieudonné 1989].

Les débuts étaient simples. Nous avons réalisé que l'on pouvait combiner les idées de Hurewicz [1935, 1936] sur les groupes d'homotopie avec la notion de fibré suggérée par les fibrations de Hopf [1935]. Il en sortait une foule de résultats nouveaux et de problèmes intéressants. On peut dire que beaucoup de développements ultérieurs en topologie, algèbre et dans bien d'autres disciplines ont leur origine dans cet épisode ; ils ont créé un réseau toujours plus complexe de disciplines et de relations entre elles – tout en contribuant à l'unité des mathématiques.

1. Fibrations de Hopf et généralisation

1.1. Le terme « fibration » au sens de cet exposé apparaît pour la première fois en 1935 dans le mémoire de « Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension ». En annexe on trouve les « fibrations de

Hopf » de sphères en sphères

$$p: \quad S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n, \text{ fibre } S^1$$
$$p: \quad S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P^n, \text{ fibre } S^3$$
$$p: \quad S^{15} \longrightarrow \mathbb{O}P^1, \text{ fibre } S^7$$

Elles s'obtiennent en représentant la sphère par des coordonnées $z_0, z_1, ..., z_n$, respectivement nombres complexes, quaternions, et octonions (nombres de Cayley), et en passant aux coordonnées homogènes $z_0 : z_1 : ... : z_n$. $\mathbb{C}P^n$ est l'espace projectif complexe, $\mathbb{H}P^n$ l'espace projectif quaternionien, et $\mathbb{O}P^1$ la droite projective des octonions – dans ce dernier cas, seul $n = 1$ est possible puisque les octonions ne sont pas associatifs. Le cas $n = 1$ donne les fibrations $S^3 \longrightarrow S^2$ et $S^7 \longrightarrow S^4$ et $S^{15} \longrightarrow S^8$. La projection p est une application continue, et la préimage $p^{-1}(x)$ d'un point x est S^1, S^3, S^7 respectivement. Ainsi les sphères en question sont décomposées de façon très spéciale en sphères S^1, S^3, ou S^7.

1.2. Sans en avoir donné une définition, Hopf appelait simplement ces décompositions des fibrations. Cette expression avait été utilisée auparavant par Seifert [1932] dans un cas assez particulier concernant les variétés à 3 dimensions, où interviennent des fibres « exceptionnelles » ; ce concept est resté intéressant jusqu'à ce jour. Peu après nous avons remarqué qu'il s'agissait d'une situation que l'on rencontrait en géométrie dans beaucoup d'autres cas : on était en présence d'une application continue $p: \ E \longrightarrow B$ où toutes les préimages $p^{-1}(b) = F_b, \ b \in B$ sont homéomorphes entre elles, et où chaque point $b \in B$ a un voisinage U tel que $p^{-1}(U)$ est homéomorphe, grâce à p, à $U \times F_b$. On dit que E est un espace fibré (localement trivial), B est la base, p la projection, et les F_b sont les fibres, homéomorphes à une fibre-type F.

1.3. Exemples typiques :

1. E est l'espace des vecteurs tangents unités d'une variété différentiable B de dimension n (munie d'une métrique riemannienne), F_b l'ensemble des vecteurs tangents unités en b, $F = S^{n-1}$.
2. E est un groupe de Lie, F un sous-groupe fermé, B l'espace homogène correspondant.
3. $E = V_{n,m}$, $(m \leq n)$, l'espace des m-repères orthonormés dans $\mathbb{R}^n$, $B = V_{n,m-1}$ obtenu en omettant le dernier vecteur, et $F = S^{n-m}$. Analogue unitaire dans $\mathbb{C}^n$, et d'autres obtenus en remplaçant $m - 1$ par $m - k$.
4. Cas particulier de 2) et 3). $E = U(n)$, $\ F = U(n-1)$ et $B = S^{2n-1}$, et de manière analogue pour les groupes orthogonaux.

Dans tous ces cas la projection p est l'application évidente.

2. Groupes d'homotopie

En 1935 également, puis en 1936, apparaissaient les Notes de Hurewicz « Beiträge zur Topologie der Deformationen ». Il fut vite évident qu'il s'agissait d'une chose très différente de ce qu'on avait fait auparavant en topologie algébrique (dite « combinatoire » à l'époque) – à l'exception du groupe fondamental dont les groupes d'homotopie $\pi_n(X), n = 1, 2, 3, \ldots$ étaient, bien sûr, une généralisation. Déjà inventés par Čech [1932], ces groupes étaient redéfinis et utilisés par Hurewicz avec des résultats inattendus. D'autre part ils nous apparurent, un peu plus tard, merveilleusement adaptés aux fibrations pour les questions homotopiques.

2.1. Rappelons d'abord rapidement les définitions. On considère des espaces X pointés, c'est-à-dire munis d'un point-base x_0. Les applications ainsi que les homotopies sont continues et pointées (respectant les point-bases). Les éléments de $\pi_n(X)$ sont les classes d'homotopie des applications $S^n \longrightarrow X$, le point-base de S^n étant s_0. Soit h une application standard du cube unité I^n dans S^n qui est un homéomorphisme de l'intérieur de I^n sur $S^n - s_0$ et qui envoie le bord $\dot{I}^n$ de I^n sur s_0 ; par l'intermédiaire de h on peut identifier $\pi_n(X)$ à l'ensemble des classes d'homotopie $I^n, \dot{I}^n \longrightarrow X, x_0$. En choisissant une direction distinguée on décompose I^n en $I^1 \times I^{n-1}$. L'opération de groupe est alors définie par $f+g$ comme suit : $I = \{0 \leq t \leq 1\}$ est divisé en $I_1 = \{0 \leq t \leq 1/2\}$ et $I_2 = \{1/2 \leq t \leq 1\}$. On comprime alors f sur $I_1^1 \times I^{n-1}$ et g sur $I_2^1 \times I^{n-1}$ et l'on obtient $f + g$. Pour $n = 1$ c'est bien l'addition (non-commutative en général) du groupe fondamental $\pi_1(X)$. La définition est compatible avec les homotopies, et les axiomes de groupe se vérifient exactement comme pour $\pi_1(X)$. En particulier, l'élément neutre est la classe de l'application constante (sur le point-base). De façon générale, quel que soit l'espace qu'on applique dans X, une application de cette classe est dite « homotope à zéro ». Pour simplifier la présentation je me permets de ne pas toujours distinguer entre une application f et sa classe d'homotopie.

Une application $h : X \longrightarrow Y$ induit, par composition $S^n \longrightarrow X \longrightarrow Y$, un homomorphisme $h_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$. On voit facilement que pour un revêtement $\overline{X} \longrightarrow X$ les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ et $\pi_n(\overline{X})$ sont isomorphes pour $n \geq 2$. Par exemple $\pi_n(S^1) = \pi_n(\mathbb{R}) = 0$ pour $n \geq 2$. D'autres propriétés élementaires : $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$ (par approximation simpliciale on est dans $S^n - s_0$ qui est contractile), et $\pi_i(X \times Y) = \pi_i(X) \times \pi_i(Y)$. Si X est simplement connexe, alors l'homotopie pointée est équivalente à l'homotopie libre.

2.2. Si X est un H-espace, c.-à-d. un espace muni d'une multiplication notée $x \cdot x'$, continue avec élément neutre e à homotopie près, on constate sans peine que

$$(f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2,$$

toujours à homotopie près. D'où, e étant l'application constante,

$$(f + e) \cdot (e + g) = f + g = f \cdot g,$$
$$(e + g) \cdot (f + e) = f + g = g \cdot f.$$

Il s'ensuit que $f+g$ peut être donné par la multiplication dans X, et que $f+g = g+f$. Ainsi pour un groupe topologique G, $\pi_1(G)$ est abélien – ce qui était bien connu avant. Mais de façon générale, pour X arbitraire, les applications $I^n, \dot{I}^n \longrightarrow X, x_0$ peuvent être identifiées aux applications $I^{n-1}, \dot{I}^{n-1} \longrightarrow \Omega X, x_0$ où ΩX est l'espace des applications $I, \dot{I} \longrightarrow X, x_0$ (l'espace des lacets de X en x_0). On a donc $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$ pour $n \geq 2$. Mais ΩX est un H–espace par la composition des lacets.

Les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont donc abéliens pour tout X et pour tout $n \geq 2$. On dit que pour cette raison, lorsque ces groupes furent présentés par Čech en 1932, on ne croyait pas qu'ils pourraient être intéressants.

2.3. *Deux « miracles » :*

1. Avec surprise nous avions constaté que l'on pouvait donner une démonstration très simple et transparente du fait que

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z},$$

l'isomorphisme étant donné en associant à $f : S^n \longrightarrow S^n$ son degré. En effet, par les méthodes d'approximation simpliciale on voit sans peine que le degré est un invariant d'homotopie, et que l'on a :

a) l'application degré : $\pi_n(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme, et

b) $\pi_n(S^n)$ est engendré par l'identité (degré $= 1$).

En d'autres termes, on retrouve le théorème de Hopf [1933] qui dit que deux applications $S^n \longrightarrow S^n$ ayant même degré sont homotopes.

2. A l'aide de la suite exacte des fibrations, dont il sera question dans la section suivante, on constate que

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z},$$

engendré par la fibration de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$. Donc, en particulier, il existe une infinité d'applications non-homotopes $S^3 \longrightarrow S^2$. Ce fait avait été établi en

1931 par Hopf [1931] dans son célèbre travail où il a introduit l'« invariant de Hopf » ; la nouvelle démonstration était très différente, à la fois plus simple et plus précise. Dans la suite exacte

$$\ldots \longrightarrow \pi_3(S^1) \longrightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \longrightarrow \pi_2(S^1) \longrightarrow \ldots$$

on voit que $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ est isomorphe à $\pi_3(S^2)$ en vertu de la projection $p : S^3 \longrightarrow S^2$ qui est la fibration de Hopf ; et l'identité de S^3 étant le générateur de $\pi_3(S^3)$, celui de $\pi_3(S^2)$ est la projection p_* de l'identité, donc simplement p.

3. La suite exacte des fibrés

Ce que l'on appela plus tard la suite exacte d'une fibration $p : E \longrightarrow P$ avec fibre F était d'abord formulé sans flêches, simplement comme une série d'isomorphismes reliant les groupes d'homotopie de E, de B, et de F. Je me permets d'utiliser ici d'emblée les suites exactes qui sont beaucoup plus commodes (L'histoire des suites exactes est assez complexe et curieuse ; je n'entre pas dans ce sujet.)

3.1. On a des homomorphismes induits

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B),$$

où p est la fibration, et $i : F \longrightarrow E$ l'inclusion dans E de la fibre F au-dessus du point-base de B ; le point-base de E est choisi dans F. Pour définir un homomorphisme $\Delta : \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F)$, et pour montrer que la longue suite ainsi obtenue

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \ldots$$

est exacte (à chaque étape image = noyau) on se sert de la propriété appelée *relèvement des homotopies :*

Lemme 3.1. — *Soient $f' : X \longrightarrow E$ et $f = pf' : X \longrightarrow B$. Alors toute homotopie H de f peut se relever en une homotopie H' de f' telle que $H = pH'$.*

En fait les seuls espaces X qui interviennent sont les sphères S^n et les cubes I^n. Admettons ce Lemme ; je reviens dans **3.3.** sur sa démonstration. Le Lemme est suggéré par le cas classique où il s'agit d'un revêtement (fibre discrète) et où le relèvement existe et est même unique. Notons une conséquence immédiate :

Si $f = pf'$ et si f est homotope à g, alors il existe $g' : X \longrightarrow E$, homotope à f', telle que $g = pg'$.

Autrement dit : « Toute application dans B homotope à une projection est une projection. En particulier, toute application homotope à zéro est une projection ».

3.2. Un élément de $\pi_n(B)$ peut être représenté par une application f de I^n dans B telle que le bord de I^n, qui est une sphère S^{n-1}, est envoyé sur le point-base. Comme I^n est contractile, f est une projection $f = pf'$ où f' applique I^n dans E et son bord S^{n-1} dans F. Toutes les classes d'applications f' de ce type de I^n dans E, avec l'addition analogue à celle de $\pi_n(E)$, forment le groupe d'homotopie *relatif* $\pi_n(E \bmod F)$ de E modulo F. Il est appliqué par p_* dans $\pi_n(B)$, et ce qui vient d'être dit montre que p_* est surjectif; l'injectivité découle immédiatement du Lemme. On a donc

$$\pi_n(E \bmod F) = \pi_n(B).$$

L'homomorphisme Δ est alors défini par le passage de $f : I_n \longrightarrow B$ à f' ci-dessus suivi de la restriction de f' à S^{n-1}.

Le fait que la suite longue est exacte se vérifie facilement dans chacune des trois étapes. Par exemple, si pour $f : S^n \longrightarrow E$ on a $p_* f = 0$ alors l'homotpie à zéro de pf se relève et f est homotope à une application $S^n \longrightarrow F$, donc est une image par i_*. Je laisse au lecteur le soin d'examiner ce qui ce passe en petite dimension.

3.3. Tout cela nous paraissait évident, en particulier le Lemme. Mais naturellement il y avait quelque-chose à démontrer, moyennant une hypothèse à vérifier dans les exemples intéressants.

L'hypothèse que j'avais choisie était celle d'une *rétraction.* On suppose que tout $b \in B$ possède un voisinage $U(b)$ tel qu'il existe une rétraction $R(x, b)$ de $p^{-1}(U(b))$ sur F_b dépendant continûment de b :

$$R(x, b) \in F_b \text{ pour tout } x \in p^{-1}(U(b)),\ R(x, b) = x \text{ si } x \in F_b.$$

Dans les exemples très concrets mentionnés en **1.3.**, E, B et F sont des variétés différentiables; on peut les munir d'une métrique riemannienne et construire facilement une telle rétraction à l'aide des géodésiques orthogonales à chaque fibre.

Si une rétraction $R(x, b)$ est donnée, on choisit $y \in F_b$ et on pose, pour tout $b' \in U(b)$

$$t(b') = R(y, b').$$

Alors t est une application de $U(b)$ dans E qui est un homéomorphisme de $U(b)$ sur un ensemble $V(y)$ transversal aux fibres $F_{b'}$. Ce « relèvement d'un voisinage autour d'un point y arbitraire » permet de relever morceau par morceau une homotopie et de démontrer ainsi le Lemme.

Remarque 3.2. — Pour établir le Lemme et la suite exacte d'homotopie il suffit de considérer une application $p : E \longrightarrow B$, d'appeler « fibres » les images inverses $p^{-1}(b)$, et de supposer l'existence d'une rétraction $R(x,b)$; il n'est pas nécessaire qu'il s'agisse d'un fibré localement trivial au sens de **1.2.**. Serre [1951] est allé encore plus loin et a seulement supposé l'existence d'un relèvement pour les applications $I^n \longrightarrow B$.

4. Résultats

Le Lemme et la suite exacte d'homotopie établis, les résultats tombaient du ciel ! Les cas immédiats étaient simplement basés sur ce qui était connu, de façon élémentaire, sur les groupes d'homotopie des sphères : $\pi_i(S^1) = 0$ pour $i \geq 2$, $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$, et $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

4.1. Les fibrations de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$ avec fibre S^1, $S^7 \longrightarrow S^4$ avec fibre S^3, et $S^{15} \longrightarrow S^8$ avec fibre S^7, donnent

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}, \pi_7(S^4) \supset \mathbb{Z}, \text{ et } \pi_{15}(S^8) \supset \mathbb{Z},$$

le générateur de $\mathbb{Z}$ correspondant à la projection.

4.2. Les fibrations $S^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^k$, $k \geq 1$ avec fibre S^1 donnent

$$\pi_2(\mathbb{C}P^k) = \mathbb{Z}, \text{ et } \pi_i(\mathbb{C}P^k) = \pi_i(S^{2k+1}),\ i > 2.$$

4.3. Les fibrations $U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ avec fibre $U(n-1)$ donnent

$$\pi_s((U(n))) = \pi_s(U(\frac{s+1}{2})),\ n \geq \frac{s+1}{2} \text{ pour } s = \text{impair},$$

$$\pi_s(U(n)) = \pi_s(U(\frac{s+2}{2})),\ n \geq \frac{s+2}{2} \text{ pour } s = \text{pair}.$$

C'est ce que l'on appela plus tard la stabilité des $\pi_s((Un))$. Pour les premières valeurs de s les groupes stables s'obtenaient facilement : $\pi_1(U(n)) = \pi_1((U(1)) = \mathbb{Z}$, engendré par l'identité $S^1 \longrightarrow U(1)$. Pour $s = 2$ on a

$$\pi_2(U(n)) = \pi_2(U(2)) = \pi_2(SU(2)) = \pi_2(S^3) = 0,$$

et pour $s = 3$ de façon analogue

$$\pi_3(U(n)) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z},\ n \geq 2.$$

Pour $s > 3$ cela s'avérait bien plus difficile. En examinant de très près l'homomorphisme Δ dans la suite exacte de la fibration en question j'arrivais [Eckmann 1941-42b] à déterminer $\pi_4 = 0$ et $\pi_5 = \mathbb{Z}$.

4.4. Le Lemme s'applique, naturellement, non seulement aux groupes d'homotopie, mais également à toutes sortes de questions d'homotopie pour les applications de X dans la base B d'une fibration $E \longrightarrow B$. Considérons trois exemples :

a) $X = I^n$. Alors toute application $f : I^n \longrightarrow B$ est une projection pf'. Ce résultat presque trivial dans le cas de la fibration 3) dans **1.3.** paraît être la première conséquence du Lemme pour un problème d'analyse (théorème de Wazewski, mentionné dans [Eckmann 1941-42a] : compléter une matrice réelle orthogonale $n \times (m-1)$, $m < n$, qui est une fonction continue dans I^n, par une ligne supplémentaire).

b) $X = B$ et $f =$ identité. Un relèvement de f s'appelle une *section* de la fibration ; les champs de vecteurs ou de repères tangents à une variété en constituent un cas particulier. De la suite exacte on déduit une condition nécessaire pour l'existence d'une section : les $\pi_n(E)$ se décomposent en somme directe de $\pi_n(B)$ et de $\pi_n(F)$. On arrive ainsi à établir des cas intéressants de non-existence de sections. Dans Eckmann [1942–43a] j'ai montré, à l'aide d'arguments plus compliqués adaptés à ce cas, que les sphères de dimension $4k+1$, $k > 0$ n'admettent pas deux champs de vecteurs tangents unité et orthogonaux.

c) On appelle essentielle une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que toute application homotope à f est surjective. D'après le Lemme on voit que si l'identité de E est essentielle alors il en est de même pour la projection $E \longrightarrow B$. Toutes les fibrations dans **1.3.** en fournissent des exemples, puisque E est une variété compacte sans bord et que l'application identique est de degré 1.

Bien sûr, non seulement les résultats tombaient du ciel, mais aussi les problèmes. Les exemples ci-dessus le montrent clairement. Citons simplement que la détermination des groupes d'homotopie stables des groupes unitaires, pour $s > 5$, et du nombre maximum de champs de vecteurs tangents orthonormaux sur une sphère restait ouverte.

5. Équivalence d'homotopie, espaces asphériques

5.1. On ne peut pas citer les Notes de Hurewicz [1935] sans parler des espaces asphériques. Les espaces considérés étaient des complexes cellulaires (à l'époque simpliciaux) ; X est dit asphérique si $\pi_n(X) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Pour de tels espaces X et Y, Hurewicz montre par induction sur les n-squelettes de X que

a) Si f et $g : X \longrightarrow Y$ induisent les mêmes homomorphismes

$$f_* = g_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$$

des groupes fondamentaux, alors f et g sont homotopes.

b) Pour tout homomorphisme $h : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ il existe $f : X \longrightarrow Y$ telle que $f_* = h$.

D'où :

c) Si $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes, alors il existe $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que gf et fg sont homotopes à l'identité de X et de Y respectivement. On est ainsi amené à la notion d'équivalence d'homotopie.

De façon générale, pour des espaces X et Y (non nécessairement asphériques) une application $f : X \longrightarrow Y$ telle qu'il existe $g : Y \longrightarrow X$ comme dans c) ci-dessus est dite *équivalence d'homotopie.* On dit dans ce cas aussi que X et Y ont même type d'homotopie (notation $X \sim Y$). Il est clair qu'il s'agit d'une généralisation, très importante, de la notion d'homéomorphisme. Une équivalence d'homotopie $f : X \longrightarrow Y$ induit des isomorphismes $f_* : \pi_n X \longrightarrow \pi_n Y$ pour tout $n \geq 1$; et de même pour l'homologie.

Pour un *espace asphérique* X on a donc les résultats suivants :

Le type d'homotopie de X *est complètement déterminé par son groupe fondamental.* En particulier, *tous les groupes d'homologie de* X *sont déterminés par le groupe fondamental de* X*. Si le groupe fondamental d'un espace asphérique est trivial, alors* $X \sim$ point, *c.-à-d.* X *est contractile.*

5.2. Des raisonnements analogues s'appliquent à des espaces asphériques en dimension $n > N$. Il suffit de modifier légèrement a) et b) dans **5.1.** ci dessus : il s'agit alors d'applications des N–squelettes de X et Y ; et dans a) f n'est pas nécessairement homotope à g, mais à une application qui coïncide avec g sur le $(N-1)$–squelette de X. On en déduit que les groupes d'homologie $H_i(X)$, $i < N$ sont déterminés par $\pi_1(X)$. Il n'en est pas ainsi, en général, pour $H_N(X)$; mais le groupe quotient H'_N de H_N modulo le sous–groupe des éléments « sphériques » (représentés par des cycles images de sphères) de X est déterminé par le groupe fondamental.

Plus généralement, si $\pi_i(X) = 0$ pour $i < k$ et $k < i < N$, alors $H_i(X)$, pour $i < N$ et $H'_N(X)$ sont déterminés par $\pi_k(X)$.

5.3. Le résumé ci-dessus ne correspond pas exactement à ce qu'il y a dans les Notes de Hurewicz à ce sujet. D'un côté elles vont bien plus loin (homomorphisme de Hurewicz, etc.), et de l'autre je les ai dépassées un peu dans **5.2.** – mais à l'époque déjà il était clair que les idées s'appliquaient de cette façon plus générale. Je voudrais ainsi non seulement souligner l'importance des idées de Hurewicz, mais aussi préparer une application typique et concrète aux fibrations.

6. Fibrations de sphères en tores

6.1. Je considère [Eckmann *et al.* 1949] une fibration $S^n \longrightarrow B$ dont la fibre est un tore $\mathbb{T}^s$ à s dimensions, $n > 2$ et $s \geq 1$. On voit facilement que le cas $n = 2$, $s = 1$ n'est pas possible. La fibration est supposée suffisamment régulière pour que le Lemme et ses conséquences (Section 3) s'appliquent. La suite exacte d'homotopie donne

$$\pi_1(B) = 0,\ \pi_2(B) = \pi_1(\mathbb{T}^s) = \mathbb{Z}^s,$$

$$\pi_i(B) = 0 \text{ pour } 2 < i < n.$$

On désire comparer B à un espace Y connu ayant mêmes groupes d'homotopie que ci-dessus. On choisit Y égal au produit topologique de s copies de $\mathbb{C}P^m$ avec m suffisamment grand ; il suffit (voir **4.2.**) d'utiliser la suite d'homotopie de la fibration a) dans **1.1.** pour constater qu'on a les π_i désirés, et même $= 0$ un peu au-delà de n.

D'après **5.2.** on a alors pour les groupes d'homologie

$$H_i(B) = H_i(Y) \text{ pour } i < n$$

et

$$H'_n(B) = H'_n(Y) = H_n(Y).$$

La dimension de B étant $n - s$, il s'ensuit que $H_n(Y) = 0$, donc que n est impair ($\mathbb{C}P^m$, donc Y a de l'homologie $\neq 0$ si et seulement si on est dans une dimension paire). Comme alors $H_{n-1}(Y) \neq 0$, s doit être égal à 1.

La sphère S^n peut être fibrée en tores $\mathbb{T}^s$ seulement si n est impair et si $s = 1$. Et dans ce cas on a la fibration de Hopf.

6.2. On retrouve ainsi le résultat bien connu : si S^n est un groupe de Lie, alors son rang (la dimension des sous-groupes abéliens maximaux) doit être égal à 1. Mais la méthode géométrique va plus loin [Samelson 1940] :

Si S^n, $n > 1$, est un groupe de Lie, donc de rang 1, les sous-groupes à un paramètre, homéomorphes à S^1 sont tous conjugués entre eux. Comme ils sont déterminés par la tangente en l'élément neutre, leur ensemble peut être identifié à l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^{n-1}$; d'autre part il s'identifie aux classes de S^n modulo le normalisateur $N(S^1)$ d'un des sous-groupes S^1. Ce normalisateur est formé par un nombre fini de copies de S^1. On a donc une fibration $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ qui donne lieu à une suite exacte où le π_i de la base est égal à $\pi_i(S^{n-1})$ et le π_i de la fibre égal à $\pi_i(S^1)$. En particulier, la suite

$$\pi_2(S^1) \longrightarrow \pi_2(S^n) \longrightarrow \pi_2(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(S^n)$$

étant exacte, il s'ensuit que $\pi_2(S^{n-1}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, d'où $n-1=2$ et $n=3$: *Les seules sphères qui puissent être des groupes de Lie sont S^1 et S^3.*

7. Et après ?

On peut tracer l'influence de cet épisode sur presque toutes les disciplines mathématiques jusqu'à nos jours (cela pourrait probablement se dire de toutes les idées qui étaient nouvelles il y a longtemps). Suivre les relations mutuelles entre les différentes tendances, écoles et modes serait une tâche fascinante mais très difficile. N'y a-t-il pas des idées et des méthodes très à la mode, importantes pour un cercle de problèmes, qui disparaissent tout à coup pour renaître plus tard dans un autre contexte ? « The pattern becomes more and more complicated of dead and living ».

Je me borne à mentionner ici une liste de développements directement liés à ce que je viens de décrire plus haut, et qui ont eu lieu immédiatement après ou même pendant cet épisode. Il ne s'agit que d'allusions sommaires.

7.1. *Groupes d'homotopie des sphères.* Les résultats de **4.1.** concernent des cas de $\pi_n(S^m)$ avec $n = 2m-1$ où il y a un terme $\mathbb{Z}$. D'autres cas semblables étaient connus. Mais en 1950, Serre [1951] a démontré des résultats sensationnels sur les $\pi_n(S^m)$ pour $n > m$: Ces groupes sont toujours finis à l'exception du cas m pair et $n = 2m-1$ où c'est une somme directe de $\mathbb{Z}$ et d'un groupe fini. Mais autrement le domaine des $\pi_n(S^m)$ est trop vaste pour être abordé ici de façon plus générale (« suspension » de Freudenthal [1937], groupes d'homotopie stables des sphères).

7.2. *Espaces d'Eilenberg-MacLane $K(G,n)$.* Eilenberg et MacLane [1943, 1945b] ont examiné des espaces avec $\pi_i = 0$ pour $i \neq n$. D'après **5.2.** le type d'homotopie d'un tel espace est déterminé par n et par $\pi_n = G$, abélien si $n > 1$. Ces espaces jouent un rôle universel pour l'homologie, la cohomologie, et pour toutes les opérations. L'existence pour un G donné a été établie par Whitehead [1949].

7.3. *Homologie et cohomologie des groupes, algèbre homologique.* L'homologie d'un espace asphérique étant déterminée par son groupe fondamental G – qui peut être donné arbitrairement – des méthodes algébriques ont tout de suite été développées pour les calculer à partir de G. C'est ainsi que la (co)-homologie des groupes est née, et avec elle l'algèbre homologique beaucoup plus générale.

7.4. *Type d'homotopie.* Dès les années 40, J.H.C. Whitehead a montré qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ qui induit des isomorphismes de tous les groupes d'homotopie est une équivalence d'homotopie. Il a amélioré la démonstration plus tard en créant la notion de CW-complexe [Whitehead *Works* III, p. 95-105].

7.5. *Catégories et foncteurs.* Eilenberg et MacLane [1942, 1945a] ont réalisé que les idées générales derrière les notions d'équivalence d'homotopie, d'isomorphismes « naturels », etc., ont une signification beaucoup plus profonde. Au début, leur théorie des catégories, foncteurs, et équivalences naturelles semblait être juste un langage précis, mais on en a dégagé plus tard la structure mathématique, aussi fondamentale qu'utile.

7.6. *Sphères parallélisables.* Une variété de dimension n, différentiable (et munie d'une métrique riemannienne) est dite parallélisable si elle admet un champ continu de n-repères orthonormés tangents. D'après **4.4.** les sphères S^{4k+1} avec $k > 0$ ne sont certainement pas parallélisables. Kervaire [1958], Bott et Milnor [1958] ont démontré que S^n est parallélisable (si et) seulement si $n = 1, 3$, ou 7. Ce résultat se déduira plus tard très simplement du célèbre théorème d'Adams [1960]. Adams [1962] a déterminé le nombre maximum exact k tel que S^n possède un k-repère tangent.

7.7. *Groupes d'homotopie stables des groupes unitaires.* Les résultats très incomplets de **4.3.** ont été peu à peu améliorés. Le problème se trouvait complètement résolu par Bott [1956] à l'aide de méthodes subtiles de géométrie différentielle : $\pi_n(U(m)) = \mathbb{Z}$ pour n impair, $m \geq \frac{n+1}{2}$, et $= 0$ pour n pair et $m \geq \frac{n+2}{2}$. C'est la « périodicité de Bott » (résultat analogue mais plus compliqué pour les groupes orthogonaux). Cette solution géométrique a eu des conséquences énormes (K-théorie topologique, foncteurs cohomologiques généraux).

7.8. Une remarque personnelle à propos du dernier point : j'avais considéré dès les premiers calculs les applications f *linéaires* de S^n dans $U(m)$, c.-à-d. de la forme $f(x) = \sum x_j A_j$ où les A_j sont des matrices $m \times m$. Il s'ensuit que les A_j sont des matrices unitaires de « Hurwitz-Radon » [Hurwitz 1923, Radon 1922, Eckmann 1942–43b] ; réciproquement tout système de $n + 1$ matrices de Hurwitz-Radon donne une application linéaire de S^n dans $U(m)$. J'avais conjecturé que, dans le domaine stable, chaque classe d'homotopie contient une telle application linéaire, et que si une application linéaire est homotope à zéro, alors elle l'est de façon linéaire, c.-à-d. en vertu d'une matrice de Hurwitz-Radon supplémentaire qui fournit une application linéaire de S^{n+1} dans $U(m)$. D'après ce qu'on sait sur ces matrices cela aurait donné le théorème de Bott. Mais c'est seulement après Bott, en utilisant son résultat sous la forme multiplicative de la K-théorie que j'ai pu démontrer la conjecture (voir [Eckmann 1994]). Il reste toutefois le problème d'une démonstration directe qui réduirait la périodicité de Bott à la discussion algébrique des matrices de Hurwitz-Radon.

Bibliographie

ADAMS (J.F.)

[1960] On the non–existence of elements of Hopf–invariant one, *Ann. of Math.*, 72 (1960), p. 20–104.

[1962] Vector fields on spheres, *Ann. of Math.*, 75 (1962), p. 603–632.

BOTT (R.)

[1956] An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, *Bull. Soc. Math. France*, 94 (1956), p. 251–281.

BOTT (R.) et MILNOR (J.)

[1958] On the parallelizability of spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64 (1958), p. 87–89.

ČECH (E.)

[1932] Höherdimensionale Homotopiegruppen. In *Verhandl. des intern. Math. Kongresses, Zürich*, 1932, vol. 2, p. 203.

DIEUDONNÉ (J.)

[1989] *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960.* Boston : Birkhaüser Verlag, 1989.

ECKMANN (B.)

[1941-42a] Zur Homotopietheorie gefaserter Räumen, *Comment. Math. Helv.*, 14 (1941-42), p. 141–192.

[1941-42b] Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, *Comment. Math. Helv.*, (1941-42), p. 234–256.

[1942–43a] Systeme von Richtungsfeldern auf Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, *Comment. Math. Helv.*, 15 (1942–43), p. 1–26.

[1942–43b] Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen, *Comment. Math. Helv.*, 15 (1942–43), p. 358–366.

[1994] Hurwitz-Radon matrices revisited : From effective solution of the Hurwitz matrix equation to Bott periodicity, *The Hilton symposium 1993. Topics in topology theory, CRM Proceedings and Lecture Notes*, 6, Providence : Amer. Math. Soc., 1994, p. 23–35.

ECKMANN (B.), SAMELSON (H.) et WHITEHEAD (G.)

[1949] On fibering spheres by toruses, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), p. 433–438.

EHRESMANN (C.) et FELDBAU (J.)

[1941] Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 212 (1941), p. 945–948.

EILENBERG (S.) et MACLANE (S.)

[1942] Natural isomorphisms in group theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 28 (1942), p. 537–543.

[1943] Relations between homology and homotopy groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 29 (1943), p. 155–158.

[1945a] General theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58 (1945), p. 231–294.

[1945b] Relations between homology and homotopy groups of spaces, I, *Ann. of Math.*, 46 (1945), p. 480–509.

FREUDENTHAL (H.)

[1937] Über die Klassen von Sphärenabbieldungen, *Compositio Math.*, 5 (1937), p. 299–314.

HOPF (H.)

[1931] Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, 104 (1931), p. 637–665.

[1933] Die Klassen der Abbildungen der n–dimensionalen Polyeder auf die n–dimensionalen Sphäre, *Comment. Math. Helv.*, 5 (1933), p. 39–54.

[1935] Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären von niedrigerer Dimension, *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 427–440.

HUREWICZ (W.)

[1935] Beiträge zur Topologie der Deformationen I, II, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch.*, 38 (1935), p. 112–119 et 521–528.

[1936] Beiträge zur Topologie der Deformationen III, IV, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch.*, 39 (1936), p. 117–126 et 215–224.

HUREWICZ (W.) et STEENROD (N.)

[1941] Homotopy relations in fibre spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 27 (1941), p. 60–64.

HURWITZ (A.)

[1923] Über die Komposition quadratischer Formen, *Math. Ann.*, 88 (1923), p. 1–25.

KERVAIRE (M.)

[1958] Nonparallelizability of the n–sphere for $n > 7$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 44 (1958), p. 280–283.

RADON (J.)

[1922] Lineare Scharen orthogonaler Matrizen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, (1922), p. 1–14.

SAMELSON (H.)

[1940] Über die Sphären, die als Gruppenmannigfaltigkeiten auftreten, *Comment. Math. Helv.*, 13 (1940), p. 144–155.

SEIFERT (H.)

[1932] Topologie dreidimensionaler geschlossener Räume, *Acta Math.*, 60 (1932), p. 147–238.

SERRE (J.-P.)

[1951] Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, 54 (1951), p. 425–505.

WHITEHEAD (J.)

[*Works* III] *The Mathematical Works of J.H.C. Whitehead*, vol III, London, New York : Pergamon Press, 1962.

[1949] On the realizability of homotopy groups, *Ann. of Math.*, 50 (1949), p. 261–263 ; *Works* III, p. 221–223.