Histoire de la théorie des faisceaux

Christian Houzel*

Résumé

La notion de faisceau a été introduite par Jean Leray juste après la guerre, dans le prolongement de travaux entrepris durant sa captivité en Autriche. Leray a défini des groupes de cohomologie pour les applications continues, et relié la cohomologie d'une application à celle de sa source grâce à la suite spectrale, introduite à ce propos. Henri Cartan a reformulé la théorie des faisceaux dans son Séminaire et, avec Jean-Pierre Serre, il en donna des applications spectaculaires à la théorie des espaces analytiques. Par la suite, Serre a étendu à la géométrie algébrique ces méthodes que Grothendieck a largement rénovées et généralisées. Enfin, Sato a exploité les méthodes de Grothendieck dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules, fondant ainsi l'analyse microlocale.

Abstract

Sheaf theory was introduced by Jean Leray just after the Second World War, as a continuation of his work while he was a prisoner in Austria. Leray defined cohomology groups for continuous maps, and related them to the cohomology of the source space by means of the spectral sequence he introduced for this purpose. Henri Cartan reformulated sheaf theory in his seminar and, together with Jean-Pierre Serre, gave spectacular applications to the theory of analytic spaces. Subsequently Serre extended these methods to algebraic geometry, when Grothendieck enlarged and generalized them enormously. Finally Sato applied Grothendieck's methods to $\mathcal{D}$-modules, creating microlocal analysis.

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A65, 55-03, 14-03, 35A27
*I.U.F.M. Paris 10, rue Molitor, 75016 Paris.

1. Introduction

La notion de faisceau, introduite pour la première fois par J. Leray en 1946, avec la théorie cohomologique correspondante et la notion de suite spectrale, est une de celles qui a renouvelé le plus profondément les méthodes de la géométrie. Leray avait en vue une reconstruction de la topologie algébrique, mais la théorie des faisceaux n'a pas tardé à donner, entre les mains de H. Cartan et de J.-P. Serre, les outils nécessaires à la théorie des espaces analytiques et à la géométrie algébrique. A. Grothendieck a développé l'algèbre homologique dans un cadre assez large pour contenir la cohomologie à valeurs dans un faisceau et ses travaux de géométrie algébrique l'ont amené à reformuler l'algèbre homologique en termes de catégories dérivées et à étendre les notions d'espace topologique et de faisceau en définissant les topos. Les catégories dérivées donnent le bon cadre pour définir les opérations fondamentales sur les faisceaux (images directes ou images réciproques, produits tensoriels, objets Hom). Ce cadre a été systématiquement exploité par M. Sato pour élaborer la théorie des $\mathcal{D}$-modules (ou systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires) sur des variétés analytiques réelles ; à côté des six opérations de Grothendieck, Sato considère aussi deux nouvelles opérations, la spécialisation et la microlocalisation le long d'une sous-variété, qui conduisent à des faisceaux sur le fibré tangent et sur le fibré cotangent respectivement. Dans cet exposé, nous indiquerons comment Leray a inventé la notion de faisceau et comment Cartan l'a transformée ; laissant de côté les travaux de Grothendieck exposés par P. Deligne, nous terminerons en indiquant la définition des foncteurs de spécialisation et de microlocalisation de Sato.

2. Le cours de captivité de Leray

Prisonnier en Autriche pendant la guerre, Leray a participé à une université de captivité dans l'Oflag XVII ; il avait préféré traiter un sujet plus loin des applications que sa spécialité (l'hydrodynamique) de peur d'être requis pour travailler à l'effort de guerre allemand et il avait choisi de faire un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, qu'il a publié en 1945 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Leray 1945a,b,c], il cherchait à se débarrasser des hypothèses inutiles et à associer aux espaces topologiques des invariants algébriques sans passer par des constructions intermédiaires. Les invariants qu'il considérait étaient les groupes de *cohomologie* plutôt que les groupes d'homologie ; la distinction entre les deux théories datait de 1935 [Alexander 1935, Kolmogorov 1936], et la cohomologie présente l'avantage d'avoir toujours une structure multiplicative dont celle de l'homologie dérive dans le cas où on dispose de la dualité de Poincaré. Leray appelle « homologie » la cohomologie et il parle de « groupes de Betti » pour signifier l'homologie.

Le procédé de Leray est inspiré de l'homologie de Čech mais, pour éviter les constructions intermédiaires (nerf d'un recouvrement, etc.), il remplace les recouvrements utilisés par Čech par des objets qui portent déjà une structure algébrique : les « couvertures ». Il appelle « complexe abstrait » une suite de groupes commutatifs libres de type fini, chacun muni d'une base $(X^{p^\alpha})_\alpha$, avec une suite de (co)bords appliquant le groupe de degré (Leray dit plutôt « dimension ») p dans le groupe de degré $p+1$. Les cobords sont linéaires et définis par leur action sur les éléments de base :

$$X^{p^\alpha} \longmapsto \dot{X}^{p^\alpha} \ ;$$

on impose que le cobord d'un cobord soit nul. Un complexe abstrait est rendu « concret » en associant à chaque élément de base X^{p^α} un « support » $|X^{p^\alpha}|$ qui est une partie non vide de l'espace topologique E dont on veut définir la cohomologie ; on impose que $|X^{q^\beta}|$ soit contenu dans $|X^{p^\alpha}|$ chaque fois que X^{q^β} est « adhérent » à X^{p^α}, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'éléments de base commençant par X^{p^α} et aboutissant à X^{q^β} et dont chacun intervient dans le cobord du précédent. Un tel complexe concret K est une couverture s'il vérifie les axiomes suivants :

– les supports sont fermés ;

– pour tout point x de E, le sous-complexe xK engendré par les éléments de base dont le support contient x est un « simplexe », c'est-à-dire que sa cohomologie est triviale ;

– la somme K^0 des éléments de degré 0 est un (co)cycle, le cocycle unité.

Leray définit alors les « formes » d'une couverture K à coefficients dans un anneau A : en degré p, ce sont les combinaisons linéaires L^p des X^{p^α} à coefficients dans A. Le cobord d'une forme est défini à partir de celui de K et on sait donc définir les formes qui sont des cocycles et celles qui sont des cobords. La cohomologie $H^p(E, A)$ est définie comme celle des formes d'une couverture quelconque de E. Pour cela, si K et K' sont deux couvertures, il convient d'identifier une forme L^p de la couverture K avec la forme $L^p.K'$ de la couverture intersection $K.K'$; celle-ci est définie comme un quotient du produit tensoriel $K \otimes K'$ pour lequel on pose

$$|X^{p^\alpha} \otimes X'^{q^\beta}| = |X^{p^\alpha}| \cap |X'^{q^\beta}|$$

et on annule les éléments de support vide. Leray démontre que, lorsque l'espace E est normal, il suffit de considérer une famille de couvertures stable par intersection et admettant des supports arbitrairement petits ; lorsque E est compact, une seule couverture suffit, à condition que ses supports soient « simples » (c'est-à-dire à cohomologie triviale).

3. Les faisceaux et la suite spectrale

L'étape suivante dans la construction de Leray consiste à associer une théorie cohomologique à toute application continue fermée π d'un espace normal E dans un autre E^* ; elle est exposée dans une suite de notes aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences en 1946. L'idée vient probablement de l'étude de la topologie d'une variété en considérant sa projection dans une variété de dimension inférieure et les propriétés des fibres de cette projection ; Picard avait traité la topologie des surfaces algébriques de cette manière et cette méthode avait été étendue par Lefschetz en dimension plus grande. Leray se réfère explicitement au travail de N. Steenrod sur l'homologie des espaces fibrés [Steenrod 1943].

Le problème est que la cohomologie des fibres varie. Picard et Lefschetz, dans le cas où les fibres sont des courbes algébriques, se servaient de l'équation différentielle vérifiée par les périodes des intégrales abéliennes sur ces courbes (connexion de Gauss-Manin) et de la monodromie de cette équation. Steenrod avait introduit la notion de « système local de coefficients » dans le cas d'un fibré ; les fibres sont homéomorphes, mais il faut tenir compte de l'opération du groupe fondamental de la base dans leur homologie (analogue à la monodromie de Picard-Lefschetz). Dans le cas général qu'il considère, Leray introduit la notion de faisceau pour relier entre elles les cohomologies des fibres : au lieu de considérer seulement les fibres $\pi^{-1}(x^*)$ $(x^* \in E^*)$ et leur cohomologie, il considère les fermés F^* de E^*, leurs images réciproques $\pi^{-1}(F^*)$ et la cohomologie de ces images réciproques.

Cela le conduit à définir un faisceau $\mathcal{B}$ de modules (ou d'anneaux) sur un espace topologique E comme une fonction associant à chaque fermé F de E un module (ou un anneau) $\mathcal{B}_F$ de manière que $\mathcal{B}_\emptyset = 0$; pour chaque couple de fermés f, F tels que $f \subset F$, on se donne de plus un homomorphisme de restriction $b_F \mapsto b_F.f$ de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}_f$ et on impose la condition de transitivité

$$(b_F.f).f' = b_F.f'$$

chaque fois que

$$f' \subset f \subset F.$$

Un tel faisceau est dit *normal* si tout élément b_F d'un $\mathcal{B}_F$ est la restriction d'un $b_V \in \mathcal{B}_V$ où V est un voisinage fermé de F et si, de plus, la condition $b_F.f = 0$ (avec $f \subset F$) implique l'existence d'un voisinage fermé v de f contenu dans F et tel que $b_F.v = 0$. Ces conditions signifient que $\mathcal{B}_F$ est la limite inductive des $\mathcal{B}_V$ où V parcourt la famille des voisinages fermés de F. L'exemple typique d'un faisceau sur E est donné par

$$F \longmapsto H^p(F, A)$$

où A est un anneau fixé ; ce faisceau est normal si l'espace E est normal.

Leray définit alors la cohomologie de E relative à un faisceau $\mathcal{B}$ en considérant les formes d'une couverture de E à coefficients dans $\mathcal{B}$; en degré q, ce sont des combinaisons linéaires $\sum b_\alpha X^{q,\alpha}$ où $X^{q,\alpha}$ parcourt la base du groupe de degré q de la couverture et, pour chaque α, $b_\alpha \in \mathcal{B}_{|X^{q,\alpha}|}$. Pour avoir de bonnes propriétés, Leray suppose E et $\mathcal{B}$ normaux. Lorsque E admet une couverture C dont les supports sont simples relativement à $\mathcal{B}$, la cohomologie peut se calculer en utilisant uniquement cette couverture.

Si maintenant $\pi : E \to E^*$ est une application continue fermée entre deux espaces topologiques normaux (Leray dit une « représentation fermée ») et si $\mathcal{B}$ est un faisceau normal de modules sur E, Leray définit le faisceau image $\pi(\mathcal{B})$ sur E^* en posant

$$\pi(\mathcal{B})_{F^*} = \mathcal{B}_{\pi^{-1}(F^*)}$$

pour tout fermé F^* de E^* ; les restrictions de $\pi(\mathcal{B})$ sont induites par celles de $\mathcal{B}$ et on voit que $\pi(\mathcal{B})$ est un faisceau normal. L'anneau de coefficients A étant choisi, on considère le faisceau

$$\mathcal{B}^p : F \longmapsto H^p(F, A)$$

sur E et le module $H^q(E^*, \pi(\mathcal{B}^p))$ est le (p, q)-ième module de (co)homologie de π relatif à A.

Dans sa deuxième note, Leray montre comment la cohomologie de π contient une information sur la cohomologie de E : c'est la première apparition de la suite spectrale. L'idée vient de l'analyse du lemme qui servait, dans le cours de captivité, à établir que la cohomologie d'un espace normal peut se calculer à l'aide d'une famille de couvertures stable par intersection et avec des supports arbitrairement petits ; Leray démontrait que, si K^* est une couverture et C' est un complexe tel que $K^* \cdot e$ soit un simplexe pour tout support e de C', les cohomologies de C' et de $K^* \cdot C'$ sont identiques. Il note maintenant $\mathcal{P}_1^{p,q}$ le (p, q)-ième module de cohomologie de π et il affirme que ce module contient des sous-modules

$$0 = \mathcal{Q}_1^{p,q} = \mathcal{Q}_0^{p,q} \subset \mathcal{Q}_2^{p,q} \subset \dots \mathcal{Q}_{q-1}^{p,q} \subset \mathcal{P}_{p+1}^{p,q} \subset \dots \mathcal{P}_2^{p,q} \subset \mathcal{P}_1^{p,q}$$

tels que, pour chaque indice $r \in [1,p]$, on ait un homorphisme surjectif

$$\Delta_r : \mathcal{P}_r^{p,q} \to \mathcal{Q}_r^{p-r,q+r+1}/\mathcal{Q}_{r-1}^{p-r,q+r+1}$$

de noyau $\mathcal{P}_{r+1}^{p,q}$; de plus le p-ième module de cohomologie $\mathcal{E}^{p,0}$ de E relatif à l'anneau A contient des sous-modules

$$0 = \mathcal{E}^{-1,p+1} \subset \mathcal{E}^{0,p} \subset \mathcal{E}^{1,p-1} \subset \dots \subset \mathcal{E}^{p-1,1} \subset \mathcal{E}^{p,0}$$

et il existe un homomorphisme surjectif

$$\Gamma : \mathcal{P}_{p+1}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q}/\mathcal{E}^{p-1,q+1}$$

de noyau $\mathcal{Q}_{q-1}^{p,q}$. Leray donne la description de Δ_r (induit par le cobord de la cohomologie de E) et de Γ mais pas celle des sous-modules en jeu, qui doit se déduire de Δ_r et de Γ. On voit que la structure de la cohomologie de π permet de calculer le gradué associé à la cohomologie de E filtrée par les $\mathcal{E}^{p-r,r}$. Ceci permet à Leray d'obtenir un certain nombre de résultats : par exemple, si E^* est compact et que toutes les fibres $\pi^{-1}(x^*)$ sont « simples », π^{-1} induit un isomorphisme de la cohomologie de E^* sur celle de E. Leray donne aussi des applications à la cohomologie d'un espace fibré de base simplement connexe dans le cas où A est un corps, à la cohomologie de l'espace homogène quotient E^* d'un groupe compact simplement connexe E par un sous-groupe fermé dans le cas où $A = \mathbb{Q}$ et il retrouve les résultats de Gysin [1941] sur les fibrés en sphères et ceux de Samelson [1941] sur les groupes compacts opérant sur des sphères.

Leray a développé sa théorie dans des cours au Collège de France en 1947-50, publiés en 1950 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Leray 1950a,b]. Il note, cette fois, $\mathcal{B}(F)$ la valeur d'un faisceau $(\mathcal{B})$ sur un fermé F et F_1b la restriction à $F_1 \subset F$ d'un élément b de $\mathcal{B}(F)$; il considère seulement des espaces X localement compacts. Un faisceau $\mathcal{B}$ sur X est dit *continu* si la limite inductive des $\mathcal{B}(W)$ pour les voisinages fermés W de ∞ est nulle et que, pour tout fermé F, $\mathcal{B}(F)$ est la limite inductive des $\mathcal{B}(V)$ pour les voisinages fermés V de $F \cup \infty$; si ces conditions sont vérifiées et que, de plus, pour tout compact K, $\mathcal{B}(K)$ est la limite inductive des $\mathcal{B}(V)$, V voisinage fermé de K, on dit que B est *propre*.

Dans cette nouvelle présentation, Leray n'impose plus aux complexes d'être libres et il n'est donc plus question de base privilégiée ; mais il suppose qu'ils sont munis d'une structure multiplicative : ce sont des anneaux différentiels. Un complexe abstrait $\mathcal{K}$ devient concret lorsqu'on attribue à chacun de ses éléments k un support $S(k) \subset X$ (espace localement compact considéré), avec un comportement convenable du support relativement aux opérations algébriques (addition, multiplication) ; on peut alors lui associer un faisceau $F \mapsto F\mathcal{K}$ quotient de $\mathcal{K}$ par l'idéal des k dont le support ne rencontre pas F. On dit que $\mathcal{K}$ est une couverture s'il est sans torsion, gradué en degrés positifs avec un cobord ∂ de degré 1 et s'il possède un élément unité u de support X tel que, pour tout $x \in X$, la cohomologie de $x\mathcal{K}$ soit réduite aux multiples de xu.

Si $\mathcal{B}$ est un faisceau sur X, la cohomologie de X relative à $\mathcal{B}$ est calculée à l'aide d'une couverture *fine* $\mathcal{X}$: c'est une couverture telle que, pour tout recouvrement ouvert fini (V_ν) du compactifié $X \cup \infty$, on puisse décomposer l'automorphisme identique de X en une somme d'endomorphismes λ_ν tels que

$$S(\lambda_\nu k) \subset \bar{V_\nu} \cap S(k)$$

pour tout $k \in X$ et tout indice ν (partition de l'unité). Pour les espaces localement compacts de dimension finie, il existe des couvertures fines : on les construit par le procédé de Čech ou celui d'Alexander ; elles sont nulles en degré strictement supérieur à la dimension de X. On considère alors le produit tensoriel $\mathcal{X} \otimes \mathcal{B}$ engendré par les $k \otimes b$ avec $b \in \mathcal{B}(F)$ et $S(k) \subset F$ (fermé de X) et son quotient $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ par le sous-module des éléments de support vide (le support de $\sum k_\mu \otimes b_\mu$ étant l'ensemble des $x \in X$ tels que $x \sum k_\mu \otimes b_\mu \neq 0$) ; ce quotient est un complexe dont la cohomologie, indépendante du choix de la couverture fine $\mathcal{X}$, est notée $H^*(X \bigcirc \mathcal{B})$.

Dans la rédaction de ses cours, Leray a adopté la présentation algébrique de la suite spectrale élaborée par J.-L. Koszul [1947a,b]. À une filtration d'un anneau différentiel filtré A :

$$A \supset A^{(1)} \supset \ldots \supset A^{(p)} \supset A^{(p+1)} \supset \ldots$$

on associe une filtration de la cohomologie HA et un calcul du gradué associé par une succession d'approximations de plus en plus précises. Au niveau d'approximation r, on remplace le groupe $\mathcal{C}^p$ des cocycles de filtration $\geq p$ par un groupe plus grand

$$\mathcal{C}_r^p = \{a \in A^{(p)} \mid \delta a \in A^{(p+r)}\}$$

et le groupe $\mathcal{D}^p$ des cobords de filtration $\geq p$ par le groupe plus petit

$$\mathcal{D}_r^p = \{\delta a \mid a \in \mathcal{C}_r^{p+r}\};$$

on pose alors

$$H_r^p A = \mathcal{C}_r^p / (\mathcal{D}_{r-1}^p + \mathcal{C}_{r-1}^{p+1}).$$

Le cobord δ de A induit un cobord $H_r^p A \longrightarrow H_r^{p+r} A$ faisant de $H_r A$ un complexe et on vérifie que la cohomologie de ce complexe s'identifie à $H_{r+1}A$ (approximation du niveau suivant). Lorsque la filtration de A est bornée supérieurement, le gradué associé à HA, c'est-à-dire $\mathcal{C}^p/(\mathcal{C}^{p+1}+\mathcal{D}^p)$ en degré p, s'identifie à la limite inductive $H_\infty A$ des $H_r A$; si de plus $H_{l+1}A$ est concentré en degré 0 pour un certain l, la suite $(H_r A)$ est stationnaire pour $r > l$ et sa valeur est HA.

Si $\mathcal{B}$ est un faisceau différentiel filtré propre sur un espace localement compact X, Leray lui associe de même un faisceau spectral $(\mathcal{F}_r\mathcal{B})$. Si $\mathcal{X}$ est une couverture fine de X, l'anneau spectral $H_r(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B})$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{X}$ et on le note $H_r(X \bigcirc \mathcal{B})$; on a $H_2(X \bigcirc \mathcal{B}) \approx H(X \bigcirc \mathcal{F}_1\mathcal{B})$. Dans le cas où $\mathcal{B}$ est gradué avec une graduation bornée inférieurement et un cobord de degré > 0, l'hypothèse que $\mathcal{B}(x)$ est concentré en degré 0 pour tout $x \in X$ implique alors que $H(X \bigcirc \mathcal{B}) \approx H(X \bigcirc \mathcal{F}_1\mathcal{B})$ où $\mathcal{F}\mathcal{B}$ est le faisceau de cohomologie de $\mathcal{B}$. On peut calculer $H(X \bigcirc \mathcal{B})$ à l'aide du complexe de Čech K^* associé à un recouvrement fermé fini (F_μ) si on sait que, pour toute intersection F des F_μ, $H(F \bigcirc \mathcal{B}) \approx H\mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Considérons maintenant une application continue $\xi : X \longrightarrow Y$, où X et Y sont localement compacts ; si $\mathcal{B}$ est un faisceau différentiel filtré propre sur X, on introduit des couvertures fines $\mathcal{X}$ de X et $\mathcal{Y}$ de Y pour faire les calculs de cohomologie. La couverture $\xi^{-1}\mathcal{Y}$ de X est définie comme le quotient de $\mathcal{Y}$ par l'idéal des y tels que $\xi^{-1}(S(y))$ soit vide, les supports étant les images réciproques par ξ des supports de $\mathcal{Y}$; la cohomologie $H(\xi^{-1}\mathcal{Y} \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B})$ s'identifie à $H(X \bigcirc \mathcal{B})$ muni d'une filtration qui ne dépend que de ξ et non du choix de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$. Sous des hypothèses convenables de dimension finie, le gradué associé s'identifie à la limite inductive des $H_r(\xi^{-1}\mathcal{Y} \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B})$; on a $H_2(\xi^{-1}\mathcal{Y} \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) \approx H(Y \bigcirc \xi\mathcal{F}_1(X \bigcirc \mathcal{B}))$.

Leray applique en particulier ces résultats au cas où ξ est une fibration de fibre F et où le faisceau $\mathcal{B}$ est un anneau constant A ; alors $\xi\mathcal{F}(X \bigcirc A)$ est localement isomorphe à $H(\mathcal{F} \bigcirc A)$ et Leray retrouve les résultats de G. Hirsch [1948], de Gysin [1941], de Chern et Spanier [1950], ainsi que ceux de Wang [1949] pour le cas où Y est une sphère d'homologie.

4. Impact des idées de Leray et travaux de H. Cartan

En 1947, A. Weil a communiqué à H. Cartan ses idées de démonstration des théorèmes de de Rham [Weil 1947] ; la démonstration complète (maintenant classique) n'a été publiée qu'en 1952 dans les *Commentarii Mathematici*

Helvetici [Weil 1952]. D'après le commentaire qu'en fait Weil lui-même dans ses *Œuvres*, l'idée de base lui avait été suggérée par une conversation qu'il avait eue à Paris avec Leray en 1945. La même année 1947 s'est tenu à Paris un colloque international de topologie algébrique ; Leray et Cartan y ont pris part, mais la publication du colloque par le CNRS en 1949 contient une forme remaniée de leurs contributions ([Leray 1949], [Cartan 1949]). Cartan s'est donc intéressé tout de suite à la notion de faisceau ; il avait d'ailleurs déjà rencontré quelque chose d'analogue à propos de certains problèmes de passage du local au global. Par exemple, Cartan [1945] s'intéresse à l'homologie $H_n(U, \mathbb{T})$ des ouverts U d'un espace localement compact de dimension n et à la manière dont elle dépend de U ; pour chaque inclusion $V \subset U$ d'ouverts, il y a un morphisme naturel de restriction $H_n(U, \mathbb{T}) \longrightarrow H_n(V, \mathbb{T})$ et Cartan établit les propriétés de recollement qui s'exprimeraient maintenant en disant que $U \longmapsto H_n(U, \mathbb{T})$ est un faisceau. L'autre problème de passage du local au global concerne la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes et Cartan l'avait considéré dès 1934 ; là encore, les données locales sont relatives à des ouverts. En 1950, K. Oka a publié dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* un article dans lequel il introduit la notion d'idéal de domaine indéterminé, dont il attribue l'intention à H. Cartan : il s'agit d'un ensemble (I) de couples (f, δ) où δ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (ou un revêtement d'un tel ouvert) et f est une fonction holomorphe dans δ et on suppose que

1. pour $(f, \delta) \in (I)$ et α holomorphe dans δ', $(\alpha f, \delta \cap \delta') \in (I)$;

2. si (f, δ) et (f', δ') appartiennent à (I), il en est de même de $(f + f', \delta \cap \delta')$;

3. si (δ_j) est une suite croissante de domaines et que $(f, \delta_j) \in (I)$ pour tout j, alors $(f, \cup\delta_j) \in (I)$.

Il était donc naturel pour Cartan de définir les faisceaux sur les ouverts plutôt que sur les fermés. C'est précisément ce qu'il fait dans son Séminaire consacré à la topologie algébrique dans les années 1948-51 ; la partie sur les faisceaux de la première année (1948-49) n'est pas publiée. Le séminaire de 1950-51 [Cartan 1950-51] contient une nouvelle présentation de la théorie où les faisceaux sont définis en termes d'espaces étalés suivant une idée de M. Lazard : un faisceau sur un espace topologique $\mathcal{X}$ est un espace topologique F muni d'une application $p : F \longrightarrow \mathcal{X}$ qui est un homéomorphisme local ; de plus les fibres $F_x = p^{-1}(x)$, $(x \in \mathcal{X})$ sont munies de structures de K-modules, où K est un anneau commutatif fixé et on suppose que les lois de composition de ces structures sont continues au sens de la topologie de F. À chaque ouvert X de $\mathcal{X}$, on associe le module $\Gamma(F, X)$ des sections de F au-dessus de X, c'est-à-dire des applications $s : X \longrightarrow F$ qui, composées avec p donnent l'identité de X ; si $X \subset Y$ (X, Y ouverts de $\mathcal{X}$), on a un homomorphisme de restriction $\Gamma(F, Y) \longrightarrow \Gamma(F, X)$ et ces homomorphismes sont transitifs. La limite inductive des $\Gamma(F, X)$ pour X voisinage ouvert d'un point x s'identifie à la fibre F_x et inversement, on peut définir un faisceau en associant à tout ouvert X un module F_X et à toute inclusion $X \subset Y$ un homomorphisme de restriction $F_Y \longrightarrow F_X$ avec la condition de transitivité ; pour tout $x \in X$ on définit la fibre F_x comme la limite inductive des F_X (X voisinage ouvert de x) et l'espace étalé F est la somme disjointe des F_x munie d'une topologie convenable. Bien entendu, l'homomorphisme canonique $F_X \longrightarrow \Gamma(F, X)$ n'est en général ni injectif ni surjectif. La définition des faisceaux comme espaces étalés devait sembler préférable car elle se faisait en termes de structure sur un ensemble plutôt qu'en termes de foncteur sur la catégorie des ouverts.

Cartan (exp. 15) introduit des *familles de supports* Φ généralisant les cas considérés par Leray de la famille de tous les fermés ou de la famille des compacts ; les éléments de Φ sont des fermés paracompacts, Φ est héréditaire et stable par réunion finie et tout élément de Φ a un voisinage appartenant à Φ. Si une famille de supports Φ est donnée, on considère, pour tout faisceau F, le module $\Gamma_\Phi(F)$ des sections de F à supports dans Φ ; si $f : F \longrightarrow G$ est un homomorphisme de faisceaux, il définit un homomorphisme $f^* : \Gamma_\Phi(F) \longrightarrow \Gamma_\phi(G)$, mais la surjectivité de f n'entraîne pas en général celle de f^*. Cependant, si $\operatorname{Ker} f$ est fin, c'est-à-dire si, pour tout recouvrement ouvert localement fini de $\mathcal{X}$, il existe une partition de l'automorphisme identique de $\operatorname{Ker} f$ subordonnée à ce recouvrement, on peut conclure à la surjectivité de f^* à partir de celle de f. Comme exemples de faisceaux fins, Cartan donne le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier (déjà utilisé par Leray) ou celui des cochaînes singulières ; sur une variété différentiable, on peut encore considérer le faisceau des formes différentielles (d'un degré donné).

La cohomologie à supports dans une famille Φ est définie d'une manière axiomatique et on établit son existence et son unicité (exp. 16) ; l'anneau de base K est supposé principal. À chaque faisceau F, la cohomologie associe, pour tout entier q, un module $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F)$ dépendant fonctoriellement de F et nul pour $q < 0$; on pose que $H^0_\Phi = \Gamma_\Phi$ et que à toute suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F" \longrightarrow 0$$

sont associés (fonctoriellement) des homomorphismes de connexion $\delta_q : H^q_\Phi \longrightarrow H^{q+1}_\Phi$ permettant d'obtenir une suite exacte longue de cohomologie. Après avoir établi l'unicité d'une telle théorie par récurrence sur q, en utilisant le plongement d'un faisceau dans un faisceau fin, Cartan en démontre l'existence en utilisant une *résolution fine* (« faisceau fondamental »)

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \ldots$$

du faisceau constant de valeur l'anneau de base K ; une telle résolution se construit à l'aide des cochaînes d'Alexander-Spanier ou, sur une variété différentiable, à l'aide des formes différentielles et la cohomologie du faisceau F est définie comme $H^q(\Gamma_\Phi(C \bigcirc F))$ où $\bigcirc$ désigne le produit tensoriel des faisceaux.

5. Applications aux espaces analytiques et à la géométrie algébrique

Dans un article de 1950, Cartan a utilisé un cas particulier de faisceaux en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes : il s'agit des faisceaux sur $\mathbb{C}^n$ qui sont des sous-faisceaux de $\mathcal{O}^m$. Ils sont définis en associant à chaque ouvert X de $\mathbb{C}^n$ un sous-module F_X du module $\mathcal{O}_X^m$ des m-uples de fonctions holomorphes dans X de manière que, pour $X \subset Y$, le sous-module de $\mathcal{O}_X^m$ engendré par les restrictions à X des éléments de F_Y soit contenu dans F_X ; pour une partie quelconque A de $\mathbb{C}^n$, Cartan définit F_A comme la limite inductive des F_X pour X voisinage ouvert de A et il s'intéresse en particulier au cas où, pour tout ouvert X, F_X est l'ensemble des $f \in \mathcal{O}_X^m$ dont le germe en chaque point x de X appartient à F_x (il revient au même de dire que si le germe de f en un point x appartient à F_x, pour tout point y assez voisin de x, le germe de f en y appartient à F_y). La notion importante introduite dans cet article est celle de *faisceau cohérent*; Cartan dit que F est cohérent en un point a s'il existe un voisinage ouvert X de a tel que F_X engendre F_x pour tout x assez voisin de a. Il reprend ici, dans le langage des faisceaux, une notion qu'il avait considérée dès 1944 sous le nom de système cohérent de modules.

En 1951-52, le Séminaire Cartan a été consacré à la théorie des espaces analytiques complexes. Les faisceaux y sont définis en termes d'espaces étalés ; un sous-faisceau F de $\mathcal{O}^q$ est dit cohérent en un point x (exp. 15) s'il existe un voisinage ouvert U de x et un système fini d'éléments u_i de $\mathcal{O}_U^q$ dont les germes engendrent F_y pour tout y assez voisin de x. Cartan établit les théorèmes classiques d'Oka dans le langage des faisceaux cohérents : le faisceau des relations entre un nombre fini de sections locales de $\mathcal{O}^q$ est cohérent ; le faisceau d'idéaux des fonctions nulles sur un sous-ensemble analytique est cohérent. La notion de cohérence est étendue par la suite à des faisceaux plus généraux : un faisceau F de $\mathcal{O}$–modules est dit cohérent s'il est localement isomorphe au quotient d'un $\mathcal{O}^p$ par un sous-faisceau cohérent. Ceci permet à Cartan de formuler et d'établir les fameux théorèmes A et B sur les variétés de Stein : si X est une telle variété et si F est un faisceau cohérent dessus, les fibres de F sont engendrées par les sections globales et la cohomologie de F est nulle en degrés ≥ 1.

Au colloque belge sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes en 1953, ces résultats sont repris avec une définition légèrement différente de la cohérence : un faisceau est dit cohérent s'il est localement isomorphe au conoyau d'un morphisme $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ [Cartan 1953]. Autrement dit, les faisceaux cohérents sont ceux qui sont localement de présentation finie ; on sait que cela équivaut bien à la cohérence, du fait que $\mathcal{O}$ lui-même est cohérent.

De la même année 1953 datent le théorème de finitude de Cartan-Serre pour la cohomologie d'une variété analytique complexe compacte à coefficients dans un faisceau cohérent [Cartan et Serre 1953], les théorèmes de Serre sur la cohomologie d'une variété projective à coefficients dans un faisceau cohérent [Serre 1953] (analogues aux théorèmes A et B en tordant le faisceau par un $\mathcal{O}(n)$, n suffisamment grand ; cf. Séminaire Cartan [1953-54, exp. 19]), et le théorème de dualité de Serre pour les faisceaux analytiques localement libres (publié seulement en 1955, [Serre 1955b], dans les *Comment. Math. Helv.*)

C'est aussi l'époque où la théorie des faisceaux a commencé à être utilisée en dehors de l'école française, par exemple dans les travaux de K. Kodaira et D. Spencer et dans ceux de F. Hirzebruch.

En 1955, J.-P. Serre a publié son article fondamental « Faisceaux algébriques cohérents » dans lequel il applique la théorie des faisceaux à la géométrie algébrique abstraite (sur un corps de base K algébriquement clos) [Serre 1955a]. Les faisceaux y sont définis en termes d'espaces étalés, mais Serre donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un préfaisceau $U \longmapsto \mathcal{F}_U$ étant donné, les homomorphismes canoniques $\mathcal{F}_U \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ soient des isomorphismes ($\mathcal{F}$ désigne le faisceau engendré ; le terme « préfaisceau », introduit plus tard par Grothendieck, manque encore). Les faisceaux *cohérents* sur un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sont définis comme des faisceaux de $\mathcal{A}$-modules localement de type fini et tels que le module des relations entre un nombre fini de sections locales soit localement de type fini. Les variétés algébriques affines sont munies de la topologie de Zariski (dont les fermés sont les sous-ensembles algébriques) et du faisceau des fonctions régulières à valeurs dans K (fonctions définies par des fractions rationnelles). Une variété algébrique (au sens général) est un espace topologique X muni d'un sous-faisceau $\mathcal{O}_X$ du faisceau des fonctions à valeurs dans K et qui est localement isomorphe (pour ces structures) à une variété affine ; Serre impose de plus une condition de séparation, la diagonale Δ doit être fermée dans $X \times X$, mais il ne suppose pas ses variétés irréductibles. Comme la topologie de Zariski n'est pas séparée, et encore moins paracompacte, on ne peut pas définir la cohomologie des faisceaux à l'aide de résolutions fines comme le faisait Cartan ; Serre revient au procédé de Čech en commençant par établir les propriétés cohomologiques des variétés affines, analogues aux théorèmes A et B de Cartan, qui lui permettent de justifier ce procédé pour la cohomologie des faisceaux cohérents. Le point essentiel est qu'on peut trouver des recouvrements arbitrairement fins d'une variété affine X par des ouverts en nombre fini du type X_{Q_i} où les Q_i sont des fonctions régulières sur X ; il résulte alors du théorème des zéros que, pour un entier N, il existe des fonctions régulières R_i telles que $1 = \sum R_i Q_i^N$, identité qui remplace les partitions de l'unité du cas paracompact.

Les développements ultérieurs de la théorie des faisceaux et de ses applications à la géométrie algébrique sont surtout dus à A. Grothendieck. Renvoyant à l'article de P. Deligne pour plus de détails, contentons-nous d'indiquer que l'article de Grothendieck en 1957 au *Tôhoku Math. J.* propose un cadre d'algèbre homologique assez large pour contenir la cohomologie des faisceaux ; les groupes de cohomologie sont les foncteurs dérivés du foncteur Γ (sections globales) et on les calcule au moyen de résolutions injectives dont Grothendieck démontre l'existence en toute généralité. Après les notes d'un cours d'A. Borel à l'ETH de Zürich [Borel 1951] où la théorie des faisceaux est présentée d'après Leray, le premier livre entièrement consacré à la théorie des faisceaux est celui de R. Godement [1958] ; dans ce livre, élaboré d'après les notes d'un cours à l'Université d'Illinois (1954-55), Godement introduit de nouvelles classes de faisceaux acycliques très commodes pour le calcul de la cohomologie : les faisceaux flasques et les faisceaux mous. Signalons aussi la définition de l'homologie à valeur dans un faisceau par Borel et Moore [1960], en vue de la dualité de Poincaré.

6. Applications à l'analyse microlocale

Dès 1959, M. Sato avait défini les hyperfonctions sur une variété analytique réelle M au moyen de la cohomologie du faisceau des fonctions holomorphes sur un voisinage complexe de M (cohomologie relative au complémentaire de M, par la suite remplacée par la cohomologie à supports dans M) ; le faisceau des hyperfonctions est flasque. L'étude des opérateurs pseudo-différentiels analytiques a ensuite conduit Sato à définir les microfonctions comme sections d'un faisceau sur le fibré en sphères cotangent à la variété [Sato 1969]. Par la suite le fibré en sphères a été remplacé par le fibré cotangent lui-même et les constructions de Sato se sont éclairées par l'utilisation du langage des catégories dérivées de Grothendieck.

Indiquons comment on peut définir la spécialisation et la microlocalisation d'un faisceau sur une variété analytique réelle M en suivant la présentation donnée par Kashiwara et Schapira [1990]. On suppose que M est plongée dans une variété analytique réelle X comme sous-variété de codimension l et on définit la *déformation normale* de X le long de M comme une variété $\tilde{X}_M$ munie d'une projection p dans X et d'une application t dans $\mathbb{R}$; on impose que (p,t) définisse un isomorphisme de $p^{-1}(X-M)$ sur $(X-M)\times\mathbb{R}^*$ et un isomorphisme de $\Omega = t^{-1}(\mathbb{R}^*)$ sur $X\times\mathbb{R}^*$ tandis que $t^{-1}(0)$ s'identifie au fibré T_MX normal à M dans X. La construction se fait localement et on peut la décrire en supposant que $M=\mathbb{R}^{n-l}$ et que $X=\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^{n-l}=\mathbb{R}^n$, un point x de X s'écrivant (x',x'') avec $x'\in\mathbb{R}^l$ et $x''\in\mathbb{R}^{n-l}$ tandis que les points de M sont de la forme $(0,x'')$; on prend alors $\tilde{X}_M=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $p(x',x'',y)=(tx',x'')$ et $t(x',x'',y)=y$. On a alors un diagramme de variétés analytiques

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j"] & \tilde{X}_M \arrow[d] & T_MX \arrow[l, hook', "s"'] \arrow[d] \\ & X & M \arrow[l, hook', "i"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des plongements ; on pose $\tilde{p}=p\circ j$. Considérons un objet F de la catégorie dérivée $D^b(X)$ des complexes de faisceaux à cohomologie bornée sur X. On lui associe le spécialisé le long de M,

$$\nu_M(F)=s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F\approx s^!j_!\tilde{p}^!F,$$

objet de la catégorie dérivée $D^b(T_MX)$; c'est un objet conique au sens qu'il est invariant par les homothéties positives du fibré normal et son support $C_M(\mathrm{Supp}F)$ est le cône normal au support de F le long de M, c'est-à-dire l'intersection de $\overline{\tilde{p}^{-1}(\mathrm{Supp}F)}$ avec T_MX. On interpréte la cohomologie de $\nu_M(F)$ de la manière suivante : si V est un ouvert conique de T_MX, $H^j(V,\nu_M(F))$ est la limite inductive des $H^j(U,F)$ où U est un ouvert variable de X tel que $V\cap C_M(X-U)=\emptyset$; la fibre $H^j(\nu_M(F))_\eta$ du faisceau de cohomologie en un point η de T_MX est la limite inductive des $H^j(U,F)$ où U parcourt les ouverts tels que $\eta\notin C_M(X-U)$. Le microlocalisé $\mu_M(F)$ de F le long de M est le transformé de Fourier-Sato de $\nu_M(F)$, défini au moyen du diagramme

$$\begin{tikzcd} T_MX\times_X T^*_MX \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & T^*_MX \arrow[d, "\pi"] \\ T_MX \arrow[r, "\tau"'] & X \end{tikzcd}$$

où T_M^*X est le fibré conormal à M dans X ; on a

$$\mu_M(F) = R_{p_2 !}((p_1^{-1}\nu_M(F))_{|P'}) \approx R_{p_2 *}R\Gamma_P(p_1^{-1}\nu_M(F))$$

en notant P la partie positive et P' la partie négative de $T_MX \times_X T_M^*X$. Ainsi $\mu_M(F)$ est un objet conique de $D^b(T_M^*X)$; si V est un cône ouvert convexe dans T_M^*X, $H^j(V, \mu_M(F))$ est la limite inductive des $H^j_{Z\cap U}(U, F)$ où U est un ouvert de X tel que $U \cap M = \pi(V)$ et Z est un fermé tel que $C_M(Z)$ soit contenu dans le polaire V° de V et la fibre $H^j(\mu_M(F))_p$ en un point p de T_M^*X est la limite inductive des $H^j_Z(F)_{\pi(p)}$ pour Z fermé tel que $C_M(Z)_{\pi(p)}$ soit contenu dans l'ensemble des vecteurs normaux v pour lesquels $\langle v, p\rangle > 0$.

On peut appliquer ces constructions au cas où X est une variété analytique complexe munie d'une fonction holomorphe f et où $M = Y$ est le lieu des zéros de f. Soit

$$p : \tilde{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$$

le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$, défini par $p(z) = e^{2\pi i z}$; on construit un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}^* \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}"] & \tilde{\mathbb{C}}^* \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

à l'aide duquel on définit le foncteur ψ_f des cycles voisins et le foncteur ϕ_f des cycles évanescents de Grothendieck : pour un objet F de la catégorie dérivée $D^b(A_X)$ des complexes de A–modules à cohomologie bornée sur X,

$$\psi_f(F) = i^{-1}R\tilde{p}_*\tilde{p}^{-1}(F) \approx i^{-1}R\mathcal{H}\mathrm{om}(f^{-1}p_! A_{\tilde{\mathbb{C}}^*}, F)$$

et

$$\phi_f(F) = i^{-1}R\mathcal{H}\mathrm{om}(f^{-1}K, F)$$

où $i : Y \longrightarrow X$ est l'injection canonique et où K est le complexe sur $\mathbb{C}$

$$0 \to p_! A_{\tilde{\mathbb{C}}^*} \longrightarrow A_{\mathbb{C}} \to 0$$

Lorsque F est faiblement $\mathbb{C}$–constructible, on a $\psi_f(F) \approx s^{-1}\nu_Y(F)$ et $\phi_f(F) \approx s'^{-1}\mu_Y(F)$ où $s : Y \longrightarrow T_YX$ est la section d'image $\tilde{f}^{-1}(1)$ ($\tilde{f}$ est définie par la différentielle df et $s' : Y \longrightarrow T_Y^*X$ est la section définie par df).

Bibliographie

Alexander (J.W.)

[1935] On the chains of a complex and their duals, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 21 (1935), p. 509–511.

Borel (A.)

[1951] Cohomologie des espaces localement compacts d'après J. Leray, dans *Sém. Top. Alg.* École Polyt. Féd., Zürich ; 2e éd. 1957 ; 3e éd. dans vol. 2 des Lecture Notes in Math., Springer, 1964.

Borel (A.) et Moore (J.C.)

[1960] Homology theory for locally compact spaces, *Michigan Math. J.*, 7 (1960), p. 137–159.

Cartan (H.)

[1944] Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, III, 61 (1944), p. 149–197.

[1945] Méthodes modernes en topologie algébrique, *Comment. Math. Helv.*, 18 (1945), p. 1–15.

[1949] Sur la notion de carapace en topologie algébrique, dans *Topologie algebrique, Paris 1947*, Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 12, 1949, p. 1–2.

[1950] Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. de France*, 78 (1950), p. 29–64.

[1950-51] Séminaire « Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux ». Paris.

[1951-52] Séminaire « Théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes ». Paris.

[1953] Variétés analytiques complexes et cohomologie, in *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953*, Centre belge de Rech. math. p. 41–55.

[1953-54] Séminaire « Théorie des fonctions automorphes et des espaces analytiques », Paris.

Cartan (H.) et Serre (J.-P.)

[1953] Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 237 (1953), p. 128–130.

Chern (S.S.) et Spanier (E.)

[1950] The homology structure of fibre bundles, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 36 (1950), p. 248–255.

Dieudonné (J.)

[1989] *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960.* Boston : Birkhäuser, 1989.

Godement (R.)

[1958] *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Paris : Hermann, 1958.

Gray (J.W.)

[1979] Fragments of the history of sheaf theory, dans *Applications of Sheaves*, vol. 753 des Lecture Notes in Math., Springer, 1979.

Grothendieck (A.)

[1957] Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9 (1957), p. 119–221.

[1973] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, dans *Séminaire de Géom. alg. du Bois-Marie 1967-69, SGA 7 II*, vol. 340 des Lecture Notes in Math., Springer, 1973.

Gysin (W.)

[1941] Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen der Mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helv.*, 14 (1941), p. 61–122.

Hirsch (G.)

[1948] Un isomorphisme attaché aux structures fibrées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 (1948), p. 1328–1330.

Houzel (C.)

[1990] Les débuts de la théorie des faisceaux, dans [Kashiwara et Schapira 1990, p. 7–22].

Kashiwara (M.) et Schapira (P.)

[1990] *Sheaves on Manifolds.* Berlin : Springer, 1990.

Kolmogorov (A.)

[1936] Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie, *Mat. Sborn.*, 1 (1936), p. 701–705.

Koszul (J.L.)

[1947a] Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 224 (1947), p. 217–219.

[1947b] Sur l'homologie des espaces homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 224 (1947), p. 477–479.

Leray (J.)

[1945a] Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations, *J. Math. Pures Appl.*, (IX) 24 (1945), p. 95–167.

[1945b] Sur la position d'un ensemble dermé de points d'un espace topologique, *J. Math. Pures Appl.*, (IX) 24 (1945), p. 169–199.

[1945c] Sur les équations et les transformations, *J. Math. Pures Appl.*, (IX) 24 (1945), p. 201–248.

[1946a] L'anneau d'homologie d'une représentation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222 (1946), p. 1366–1368.

[1946b] Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222 (1946), p. 1419–1422.

[1946c] Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 223 (1946), p. 395–397.

[1946d] Sur l'anneau d'homologie de l'espace homogène, quotient d'un groupe clos par un sous-groupe abélien, connexe, maximum, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 223 (1946), p. 412–415.

[1949] L'homologie filtrée, dans *Topologie algebrique, Paris 1947*, Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 12, 1949, p. 61–82.

[1950a] L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *J. Math. Pures Appl.*, (IX) 29 (1950), p. 1–139.

[1950b] L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, *J. Math. Pures Appl.*, (IX), 29 (1950), p. 169–213.

Oka (K.)

[1950] Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 78 (1950), p. 1–27.

[1951] Lemme fondamental, *J. Math. Soc. Japan*, 3 (1951), p. 204–214 et 259–278.

Samelson (H.)

[1941] Beiträge zur Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten, *Ann. of Math.*, 45 (1941), p. 1091–1137.

Sato (M.)

[1959] Theory of hyperfunctions, I et II, *J. Univ. Tokyo Sect. IA*, 8, (1959), p. 139–193 et 398–437.

[1969] Hyperfunctions and partial differential equations, dans *Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo 1969*, p. 91–94.

Sato (M.), Kawai (T.) et Kashiwara (M.)

[1973] Microfunctions and pseudodifferential equations, in *Hyperfunctions and Pseudodifferential Equations*, vol. 287 des Lecture Notes in Math., Springer, 1979, p. 265–529.

SERRE (J.-P.)

[1953] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, dans *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953*, Centre belge de Rech. math., p. 57–68.

[1955a] Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, 61 (1955), p. 197–278.

[1955b] Un théorème de dualité, *Comment. Math. Helv.*, 29 (1955), p. 9–26.

STEENROD (N.)

[1943] Homology with local coefficients, *Ann. of Math.*, 44 (1943), p. 610–627.

WANG (H.)

[1949] The homology groups of the fiber bundles over a sphere, *Duke Math. J.*, 16 (1949), p. 33–38.

WEIL (A.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, 3 vol. New York : Springer, 1979.

[1947] Lettre à H. Cartan, *Œuvres* II, p. 45–47.

[1952] Sur les théorèmes de de Rham, *Comment. Math. Helv.*, 26 (1952), p. 119–145 ; *Œuvres* II, p. 17–43.