Basculement et homologie cyclique

Bernhard KELLER*

Résumé

Ce rapport est divisé en trois parties : dans la première, nous donnons une introduction à la théorie de basculement (tilting theory) ; dans la deuxième, nous présentons l'interprétation naturelle de cette théorie dans le cadre des catégories dérivées et sa généralisation en une théorie de Morita pour les catégories dérivées ; dans la troisième, nous donnons une vue d'ensemble des invariants par les équivalences introduites dans les deux premières parties. En particulier, nous rapportons un résultat que nous avons obtenu récemment sur l'invariance de l'homologie cyclique.

Je remercie S. König pour ses remarques pertinentes sur une version antérieure de ces notes.

Abstract

This report is divided into three parts: in the first, we give an introduction to the tilting theory; in the second, we present the natural interpretation of this theory in the frame of derived categories and its generalization to obtain a Morita theory for derived categories; in the third part, we give a general view of the invariants under the equivalences introduced in the first two parts. In particular, we report on a result we obtained recently about the invariance of the cyclic homology.

1 Equivalence par basculement

1.1 Introduction

Soient A et B deux anneaux. Rappelons que A et B sont équivalents au sens de Morita [63] s'il existe une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mod\,A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod\,B}\ ,$$

où $\mathrm{Mod\,A}$ désigne la catégorie des A-modules (à droite). L'équivalence par basculement est une généralisation de l'équivalence au sens de Morita : ici, au lieu

AMS 1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*): 16E40, 18E30

*U.F.R. de Mathématiques, U.R.A. 748 du CNRS, Université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

de demander l'existence d'une équivalence $\mathrm{Mod}\,\mathrm{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}\,\mathrm{B}$, on se contente d'un couple de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{c} \mathrm{Mod}\,\mathrm{B} \\ F \downarrow\ \uparrow G \\ \mathrm{Mod}\,\mathrm{A} \end{array}$$

vérifiant certaines conditions énoncées plus bas qui apparaissent de façon naturelle dans l'exemple suivant :

1.2 Exemple des 4 sous-expaces

Soit k un corps. Dans leur article [27], I. M. Gelfand et V. A. Ponomarev étudient les quadruplets de sous-espaces d'un k-espace vectoriel et, plus généralement, les quadruplets V d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "v_1"] & \\ V_2 \arrow[r, "v_2"] & V_\omega \\ V_3 \arrow[ur, "v_3"] & \\ V_4 \arrow[uur, "v_4"] & \end{tikzcd} .$$

Si V et V' sont deux tels quadruplets, un *morphisme* $f : V \to V'$ est la donnée de cinq applications linéaires

$$g_i : V_i \to V_i' \ , \ i \in \{1, 2, 3, 4, \omega\}$$

telles que $g_\omega \ v_i = v_i' \ g_i$ pour $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Les quadruplets deviennent ainsi les objets d'une catégorie abélienne, à savoir la catégorie des représentations [24, Sect. 4] du carquois Q suivant :

$$Q : \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[r] & \omega \\ 3 \arrow[ur] & \\ 4 \arrow[uur] & \end{tikzcd} .$$

Notons $\mathrm{Rep}\,Q$ cette catégorie et $\mathrm{Rep}\,Q'$ la catégorie des représentations du carquois Q' obtenu par « basculement » à partir de Q :

$$Q' : \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ & 2 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\ & 3 \\ & 4 \end{tikzcd} \quad .$$

Gelfand–Ponomarev relient ces catégories par un couple de « foncteurs basculants »

$$\begin{array}{c} \operatorname{Rep} Q' \\ F \downarrow \; \uparrow G \\ \operatorname{Rep} Q \end{array}$$

où G envoie un quadruplet $V \in \operatorname{Rep} Q$ sur le quadruplet W

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & W_1 \\ & W_2 \\ W_0 \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\ & W_3 \\ & W_4 \end{tikzcd} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{rcl} W_i & = & V_i \, , \; i = 1, \ldots , 4 \\ W_0 & = & \operatorname{Ker} (\mathrm{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_4 \xrightarrow{[\mathrm{v}_1, \ldots , \mathrm{v}_4]} \mathrm{V}_\omega) \end{array}$$

et F envoie un quadruplet $W \in \operatorname{Rep} Q'$ sur le quadruplet V

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] V_1 \arrow[ddr] & \\ V_2 \arrow[dr] & \\ & V_\omega \\ V_3 \arrow[ur] & \\ V_4 \arrow[uur] & \end{tikzcd} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{rcl} V_i & = & W_i \, , \; i = 1, \ldots , 4 \\ V_\omega & = & \operatorname{Cok} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} : \mathrm{W}_0 \longrightarrow \mathrm{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{W}_4 \right). \end{array}$$

Il est facile de vérifier que F est adjoint à gauche à G. Les foncteurs F et G ne sont pas des équivalences mais ils induisent des équivalences entre la sous-catégorie pleine $\mathscr{A}_0 \subset \operatorname{Rep} Q$ formée des V tels que $[v_1, \ldots , v_4]$ est surjectif et son image $\mathscr{A}'_0 \subset \operatorname{Rep} Q'$ formée des W tels que ${}^t[w_1, \ldots , w_4]$ est injectif.

Un objet V appartient au noyau de G ssi il est concentré en ω (i.e. $V_i = 0$ pour $i = 1, \ldots , 4$) et un objet W appartient au noyau de F ssi il est concentré en 0. Ainsi, les catégories Ker F et Ker G sont équivalentes elles aussi.

Nous voyons donc que les deux catégories en question sont « équivalentes par morceaux ». Afin de pouvoir formuler cette idée dans un contexte général, nous avons besoin d'une interprétation intrinsèque des « morceaux » et de leurs équivalences : notons $\mathbf{L}_1 F$ le premier dérivé à gauche de F et $\mathbf{R}^1 G$ le premier dérivé à droite de G (au sens de l'algèbre homologique [16]). On vérifie aisément (lemme du serpent !) que $\mathbf{R}^1 G$ envoie un quadruplet V sur

$$\begin{tikzcd} & 0 \\ & 0 \\ W_0 \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\ & 0 \\ & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{où} \qquad W_0 = \mathrm{Cok}\,(\mathrm{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_4 \xrightarrow{[\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_4]} \mathrm{V}_\omega)$$

et que $\mathbf{L}_1 F$ envoie un quadruplet W sur

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[ddr] & \\ 0 \arrow[dr] & \\ & V_\omega \\ 0 \arrow[ur] & \\ 0 \arrow[uur] & \end{tikzcd} \qquad \text{où} \qquad V_\omega = \mathrm{Ker}\,(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} : \mathrm{W}_0 \longrightarrow \mathrm{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{W}_4).$$

Ainsi nous avons $\mathscr{A}_0 = \mathrm{Ker}\,\mathbf{R}^1 G$, $\mathscr{A}'_0 = \mathrm{Ker}\,\mathbf{L}_1 F$, ces sous-catégories sont équivalentes par F et G, et les noyaux $\mathrm{Ker\,F}$ et $\mathrm{Ker\,G}$ sont équivalentes par les foncteurs $\mathbf{L}_1 F$ et $\mathbf{R}^1 G$. Puisque $\mathbf{L}_1 F$ est exact à gauche, les dérivés supérieurs de F s'annulent, c'est-à-dire que F est de dimension cohomologique ≤ 1. On voit de même que G est également de dimension cohomologique ≤ 1. Si nous interprétons les catégories $\mathrm{Rep}\,Q$ et $\mathrm{Rep}\,Q'$ comme les catégories des représentations des algèbres de chemins [24, Sect. 4] associées à Q et Q', nous voyons que nous sommes en présence d'une équivalence par basculement au sens de la définition suivante :

1.3 Définition

Soient A et B deux anneaux. Une *équivalence par basculement* $B \rightsquigarrow A$ est la donnée d'un couple de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{c} \mathrm{Mod\,B} \\ F \downarrow \, \uparrow G \\ \mathrm{Mod\,A} \end{array}$$

tels que

a) F et G sont de dimension cohomologique ≤ 1, b$_0$) F et G induisent des équivalences entre $\operatorname{Ker} \mathbf{L}_1 F$ et $\operatorname{Ker} \mathbf{R}^1 G$,

b$_1$) $\mathbf{L}_1 F$ et $\mathbf{R}^1 G$ induisent des équivalences entre $\operatorname{Ker} \mathrm{F}$ et $\operatorname{Ker} \mathrm{G}$.

On peut montrer [75] (voir aussi [52]) que la condition b$_1$) est une conséquence de a) et b$_0$).

1.4 Modules basculants

Soient A et B deux anneaux et $F : \operatorname{Mod} \mathrm{B} \to \operatorname{Mod} \mathrm{A}$ un foncteur quelconque qui admet un adjoint à droite G. Alors F est exact à gauche et pour le B-A-bimodule $T = F(A_A)$, nous avons un isomorphisme canonique

$$F \xrightarrow{\sim} ? \otimes_B T.$$

L'unicité du foncteur adjoint nous donne alors l'isomorphisme

$$G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(T, ?)$$

où la structure de B-module à gauche de T donne la structure de B-module à droite de $\operatorname{Hom}_A(T, ?)$. Comme dans le cas de l'équivalence de Morita, toute équivalence par basculement est donc donnée par un bimodule T. Le théorème suivant traduit les conditions énoncées dans la définition d'une équivalence par basculement en des conditions sur ce bimodule. Après des travaux précurseurs [27], [10], [2], [58], ce théorème a été formulé et démontré pour la première fois (sous une forme légèrement différente) par S. Brenner et M. C. R. Butler [13]. Sous sa forme actuelle, il est dû à D. Happel et C. M. Ringel [37]. Nous renvoyons à [12] pour une démonstration directe et pour le « lemme de Bongartz » qui affirme que dans le cas d'une algèbre A de dimension finie et de dimension globale finie la condition d) du théorème peut être remplacé par la condition que le A-module T admet autant de facteurs directs indécomposables non-isomorphes deux à deux que l'algèbre A admet de modules simples non-isomorphes deux à deux.

Théorème 1.1 ([13], [37]) — *Soient A et B deux anneaux et T un B-A-bimodule. Alors les foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} & \operatorname{Mod} \mathrm{B} & \\ F = ? \otimes_B T & \downarrow \; \uparrow & \operatorname{Hom}_A(T, ?) = G \\ & \operatorname{Mod} \mathrm{A} & \end{array}$$

définissent une équivalence par basculement $B \rightsquigarrow A$ si et seulement si

a) *l'application canonique $B \to \operatorname{End}_A(T)$ est un isomorphisme,*

b) *les groupes $\operatorname{Ext}^i_A(T, T)$ s'annulent pour tout $i > 0$,*

c) *il existe une suite exacte de A-modules*

$$0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$$

où les P_i sont des A-modules projectifs de type fini,

d) *il existe une suite exacte de B-modules*

$$0 \to B \to T^0 \to T^1 \to 0$$

où les T^i sont des facteurs directs de sommes finies de copies de T.

Un A-module T tel que la donnée de A, T et $B = \mathrm{End}_A(T)$ vérifie les conditions du théorème est appelé un *module basculant (tilting module)*. C'est un *module basculant généralisé (generalized tilting module* [62]*)* si au lieu de c) et d) les conditions suivantes sont vérifiées :

C) il existe un $N \in \mathbb{N}$ et une suite exacte de A-modules

$$0 \to P_N \to P_{N-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$$

où les P_i sont des A-modules projectifs de type fini,

D) il existe $M \in \mathbb{N}$ et une suite exacte de B-modules

$$0 \to B \to T^0 \to T^1 \to \ldots \to T^M \to 0$$

où les T^i sont des facteurs directs de sommes finies de copies de T.

Dans ce cas, $F = ? \otimes_B T$ et $G = \mathrm{Hom}_A(T, ?)$ donnent lieu à une *équivalence par basculement généralisé* dans le sens que ce sont des foncteurs adjoints tels que les conditions A) et B_i), $i \geq 0$, sont vérifées :

A) F et G sont de dimension cohomologique finie,

B_i) $\mathbf{L}_i F$ et $\mathbf{R}^i G$ induisent des équivalences entre les sous-catégories pleines

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \{M \in \mathrm{Mod\,B} \mid \mathbf{L}_j FM = 0\,,\ \forall\, j \neq i\} \subset \mathrm{Mod\,B} \\ \mathcal{A}^i &= \{N \in \mathrm{Mod\,A} \mid \mathbf{R}^j GN = 0\,,\ \forall\, j \neq i\} \subset \mathrm{Mod\,A}. \end{aligned}$$

On peut montrer [75] (voir aussi [52]) que les conditions B_i), $i > 0$, sont des conséquences de A) et B_0).

1.5 Remarques

1. Si $T \in \mathrm{Mod\,A}$ est un module projectif de type fini qui engendre Mod A, alors T est un module basculant. Ainsi, l'équivalence par basculement généralise bien l'équivalence au sens de Morita. Si l'algèbre A est autoinjective (=un

module injectif sur elle-même), tout module de dimension projective finie est projectif. Dans ce cas, tout module basculant est projectif et toute équivalence par basculement dont A est le but ou la source est une équivalence de Morita. Néanmoins A peut admettre des équivalences dérivées non-triviales. Voir (2.3).

2. L'équivalence par basculement (généralisé) préserve de nombreux invariants. Voir la section 3.

3. Soit k un corps. Une k-algèbre de dimension finie B est dite *basculée* (tilted algebra [37]) s'il existe une algèbre héréditaire A (i.e. $\operatorname{gldim} A \leq 1$) et une équivalence par basculement $B \rightsquigarrow A$, c'est-à-dire que B apparaît comme l'algèbre des endomorphismes d'un module basculant sur une algèbre héréditaire.

   Les conditions qui définissent une équivalence par basculement gardent un sens pour des catégories abéliennes autres que des catégories de modules (voir [6] pour des exemples en géométrie). Dans leur travail [36], Happel-Reiten-Smalø étudient les algèbres de dimension finie dont la catégorie des modules est équivalente par basculement à une catégorie abélienne héréditaire (ils utilisent une définition différente mais équivalente de ces algèbres). Ils appellent *quasi-basculées* ces algèbres et en donnent une caractérisation en termes homologiques.

   Les algèbres (quasi-) basculées jouent un rôle important dans l'étude des algèbres de représentation finie et des algèbres dociles (voir par exemple [69], [3], [34], [25]).

4. Soit k un corps et A une k-algèbre quasi-héréditaire au sens de L. Scott [71]. En s'appuyant sur des travaux d'Auslander-Reiten [5] et d'Auslander-Buchsbaum [4] C. M. Ringel a découvert [70] que l'algèbre A admet un module basculant (généralisé) canonique T caractérisé par les propriétés suivantes

   T1) le module T admet une filtration dont les sous-quotients sont des objets standard et une filtration dont les sous-quotients sont des objets costandard.

   T2) le module T est somme de n facteurs directs indécomposables non isomorphes deux à deux, où n est le nombre de classes d'isomorphisme de A-modules simples.

   De nombreuses catégories de modules qui apparaissent en théorie de Lie peuvent être interprétées comme des catégories de modules sur une algèbre quasi-héréditaire. L'importance des modules basculants dans ce cadre a été mise en évidence par les travaux S. Donkin [19] [20], [21] suivis de ceux de Georgiev-Mathieu [28], [29], O. Mathieu [59], K. Erdmann [23], H. H. Andersen [1] et d'autres. Notons cependant une nuance dans l'emploi du terme « module basculant » : Donkin et ses lecteurs appellent « module basculant » tout module vérifiant la propriété T1) de la caractérisation de Ringel. Il s'ensuit de [70, Th. 5] que ces modules sont exactement les sommes de copies de facteurs directs indécomposables du module basculant découvert par Ringel.

2 Equivalences dérivées

2.1 Basculement et dérivation

L'équivalence par basculement définit une relation qui n'est ni symétrique (on appelle « co-basculement » la relation opposée) ni transitive (on appelle « basculement itéré » sa clôture par transitivité). Les conditions qui apparaissent dans la définition (1.3) sont lourdes et difficiles à manipuler.

Le théorème suivant est dû à D. Happel [32]. Il nous amène à réinterpréter l'équivalence par basculement comme un cas particulier de l'équivalence par dérivation. Cette notion s'avère à la fois plus générale et plus simple à manipuler que l'équivalence par basculement. En particulier, il est immédiat que c'est une relation d'équivalence.

Nous renvoyons à [45, Chap. 1] pour une introduction concise et complète au langage des catégories dérivées [73]. Si A est un anneau, nous désignons par $\mathcal{D}A$ la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules (à droite). Les objets de $\mathcal{D}A$ sont donc les complexes différentiels de A-modules (soumis à aucune condition de finitude). Nous identifions Mod A à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}A$ en confondant un module M avec le complexe dont la composante en degré zéro est M et les autres composantes sont nulles. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $K \mapsto K[n]$ le foncteur translation de $\mathcal{D}A$: à un complexe

$$K = (\ldots \to K^i \stackrel{d_K^i}{\to} K^{i+1} \to \ldots)$$

il associe le complexe K décalé de n crans vers la gauche $K[n]^i = K^{n+i}$ et muni de la différentielle $(-1)^n d_K$. Nous utilisons librement les foncteurs dérivés totaux « non-bornés » dont l'existence et les bonnes propriétés ont été démontrées par N. Spaltenstein [72] (voir aussi [11], [49], [50]). Rappelons que ces foncteurs « relèvent aux catégories dérivées » les foncteurs dérivés de l'algèbre homologique classique [16]. Par exemple, si T est un B-A-bimodule, et $\mathbf{L}F$, $\mathbf{R}G$ les dérivés totaux des foncteurs $F = ? \otimes_B T$, $G = \mathrm{Hom}_A(T, ?)$, nous avons des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(\mathbf{L}F\ M) = \mathrm{H}_n(M \otimes_B^{\mathbf{L}} T) &= \mathrm{Tor}_n^B(M, T) \\ \mathrm{H}^n(\mathbf{R}G\ N) = \mathrm{H}^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(T, N)) &= \mathrm{Ext}_A^n(T, N) \end{aligned}$$

Théorème 2.1 ([32]) — *Soit A un anneau, T un A-module et $B = \mathrm{End}_A(T)$. Si T est basculant généralisé (et dans ce cas seulement), les foncteurs dérivées totaux $?\otimes^{\mathbf{L}}_B T$ et $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(T, ?)$ induisent des équivalences «inverses» l'une de l'autre entre $\mathcal{D}A$ et $\mathcal{D}B$.*

La condition suffisante du théorème est démontrée sous cette forme précise dans [50]. La condition nécessaire est un exercice. Par définition, A est *équivalent par dérivation à B* si $\mathcal{D}A$ est équivalent en tant que catégorie triangulée à $\mathcal{D}B$. Il est clair que la relation d'équivalence par dérivation est symétrique, réfléxive et transitive. Le théorème de Happel montre qu'elle généralise l'équivalence par basculement généralisé.

2.2 Complexes basculants

Gardons les notations du paragraphe précédent. Il peut exister des équivalences triangulées $F : \mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$ sans que B admette un *module* basculant dont l'anneau des endomorphismes soit A. Cependant, on a toujours le *complexe* $T^\bullet = F(A_A)$ qui joue un rôle analogue à celui du module basculant. Par exemple, l'anneau des endomorphismes de $T^\bullet$ est isomorphe à A (l'isomorphisme est induit par F) et les « groupes d'hyperextensions »

$$\text{Hyper-Ext}^n_B(T^\bullet, T^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}B}(T^\bullet, T^\bullet[n])$$

s'annulent pour $n \neq 0$ (car $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}A}(A, A[n]) = 0$ pour $n \neq 0$). En outre, on peut montrer [64, 6.3], [49, 5.3] que $T^\bullet$ est quasi-isomorphe à un complexe parfait (=complexe borné de modules projectifs de type fini) et que la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}B$ qui contient $T^\bullet$ et qui est stable par passage à des facteurs directs est égale à $\mathrm{per}\,\mathrm{B} \subset \mathcal{D}B$, *la sous-catégorie triangulée pleine formée des complexes quasi-isomorphes à des complexes parfaits.* Nous arrivons ainsi à l'implication « facile » *i)* $\Rightarrow$ *ii)* du théorème de Morita pour les catégories triangulées dû à J. Rickard :

Théorème 2.2 ([64], [67]) — *Soient k un anneau commutatif et A, B deux k-algèbres plates en tant que modules sur k. On a équivalence entre*

i) *Il existe une équivalence de catégories triangulées $\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$.*

ii) *Il existe un complexe $T^\bullet \in \mathcal{D}B$ qui vérifie les conditions suivantes*

a) *On a* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}B}(T^\bullet, T^\bullet) \xrightarrow{\sim} A$ *et* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}B}(T^\bullet, T^\bullet[n]) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$.

b) *$T^\bullet$ est quasi-isomorphe à un complexe borné de modules projectifs de type fini.*

c) *La plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}B$ qui contient $T^\bullet$ et qui est stable par passage à des facteurs directs est égale à* $\mathrm{per}\,\mathrm{B}$.

iii) *Il existe un complexe X de A-B-bimodules tel que le foncteur dérivé total $? \otimes_B^{\mathbf{L}} X$ soit une équivalence $\mathcal{D}A \to \mathcal{D}B$.*

L'idée de l'énoncé du théorème est déjà présente dans le travail [17] de Cline-Parshall-Scott. L'équivalence entre i) et ii) est valable sans l'hypothèse de platitude. Elle est démontrée dans [64]. L'équivalence entre ii) et iii) est démontrée dans [67] en utilisant l'équivalence entre i) et ii). Nous renvoyons à [48] pour une démonstration directe de l'implication cruciale ii) $\Rightarrow$ iii) et à [50] pour une démonstration détaillée du théorème.

Le lecteur pourra s'étonner de ne pas trouver dans ce théorème l'affirmation que toute équivalence triangulée $\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$ soit isomorphe à une équivalence $? \otimes_A^L X$ pour un complexe de bimodules X. Or, on ne sait pas démontrer cette affirmation et il est même plausible qu'elle soit fausse. La notion de foncteur triangulé ne semble donc pas être assez fine pour axiomatiser les foncteurs dérivés (voir [47] pour un essai de remédier à ce défaut).

Un complexe $T^\bullet$ est *basculant* s'il vérifie les conditions de ii). Un complexe X de A-B-bimodules est *basculant bilatère* si le foncteur $? \otimes_A^{\mathbf{L}} X$ est une équivalence. On peut montrer [48] que tout complexe basculant se relève en un complexe basculant bilatère. En outre, si B est projectif en tant que k-module, ce relèvement est unique à isomorphisme unique dans $\mathcal{D}(A^{\mathrm{op}} \otimes B)$ près.

Nous appelons *spécial* un complexe basculant bilatère qui est borné et dont les composantes sont des B-modules projectifs de type fini. Si B est projectif en tant que module sur k, tout complexe basculant bilatère est isomorphe dans $\mathcal{D}(A^{\mathrm{op}} \otimes B)$ à un complexe spécial.

2.3 Exemples

1. Soit k un corps et V un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur k. Pour $0 \leq i, j \leq n$, nous posons

$$A_{ij} = \Lambda^{j-i} V^* \quad , \quad B_{ij} = S^{i-j} V$$

et notons A (resp. B) l'algèbre de matrices

$$\bigoplus_{0 \leq i,j \leq n} A_{ij} \quad (\text{resp.} \bigoplus_{0 \leq i,j \leq n} B_{ij} \ ).$$

Pour $0 \leq i \leq n$, notons $P_i = e_{i+1,i+1} B$ le i-ème module projectif indécomposable de B et S_i son unique quotient simple. Alors

$$T = \bigoplus_{i=0}^{n} S_i[-i]$$

est un complexe basculant tel que $\operatorname{End}_{\mathcal{D}B}(T) \xrightarrow{\sim} A$. Cet exemple est un cas particulier de la dualité de Koszul (voir par exemple [8]). À l'aide du complexe de Koszul, il est facile de relever T en un complexe basculant bilatère. L'origine de cet exemple est la description de la catégorie dérivée $\mathcal{D}\mathbb{P}$ des faisceaux quasi-cohérents sur le projectivisé $\mathbb{P}$ de V donnée par A. Beilinson dans [7]. Il montre en effet qu'il existe des équivalences triangulées

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}A & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}\mathbb{P} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{D}B \\ e_{ii}A & \mapsto & \Omega^i(i)\ ,\ O_{\mathbb{P}}(i) & \leftarrow & e_{ii}B \end{array}$$

L'équivalence obtenue par le théorème de Rickard est la composition des deux équivalences de Beilinson (voir [22] pour une étude de ces équivalences et une comparaison à la description de $\mathcal{D}\mathbb{P}$ obtenue par Bernstein-Gelfand-Gelfand [9]). Le travail de Beilinson a été généralisé à d'autres variétés dans [26], [39], [40], [41], $\ldots$.

2. Soit G un groupe fini, p un nombre premier qui divise l'ordre de G et k l'anneau des entiers d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Notons $B_{pr}(G)$ le bloc principal de kG. Supposons que G admet un p-Sylow abélien P. Dans cette situation, M. Broué conjecture dans [14] *qu'il existe une équivalence par dérivation entre $B_{pr}(G)$ et $B_{pr}(N_G(P))$*. Dans le cas d'un p-Sylow cyclique, la conjecture a été démontrée par M. Linckelmann dans [55]. (Les résultats de [65], [66] jouent un rôle important dans la démonstration.) Dans beaucoup d'autres cas, des conséquences de la conjecture au niveau des caractères ont été démontrées. Nous renvoyons à [15] pour une introduction et une synthèse des progrès récents. Un phénomène analogue dans le cadre des groupes algébriques réductifs est étudié dans [68].

3 Invariants

3.1 Propriétés (non) préservées

Soient A et B deux anneaux équivalents par dérivation et qui admettent un complexe de A-B-bimodules X basculant bilatère spécial (2.2).

Si A est semisimple, alors $\mathcal{D}A$ et per A sont semisimples (tout triangle se scinde), tout module basculant est concentré en un seul degré, et B est semisimple et même équivalent au sens de Morita à A.

En général, A est de dimension globale (à droite) finie ssi c'est le cas pour B et dans ce cas on a

$$|\operatorname{gldim} A - \operatorname{gldim} B| \leq w\ ,$$

où w est la largeur du complexe X (le minimum des nombres $b-a$ où a et b sont des entiers tels que $X^n \neq 0$ implique $a \leq x \leq b$). Voir [25, 12.5 b)].

Si A est une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos, et que B est équivalente par dérivation à A, alors A est de dimension globale finitiste finie ssi c'est le cas pour B (voir [35]).

Si A est de type fini sur une algèbre commutative noethérienne, alors il en est de même pour B d'après [64, 9.4]. L'argument de [loc. cit.] montre aussi que si A est un anneau à identité polynomiale, il en est de même pour B.

Supposons que A et B sont deux algèbres de dimension finie sur un corps k et que A est symétrique (c'est-à-dire que A est isomorphe à $\mathrm{Hom}_k(A,k)$ en tant que A-A-bimodule). Alors B est symétrique [67, 5.3].

Supposons que A et B sont deux algébres sur un anneau commutatif k. Même si A est libre sur k, l'algèbre B peut contenir des éléments de torsion. Voici un exemple [53] : soit n un entier non nul et soit A l'algèbre de matrices

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ n\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}.$$

Alors l'algèbre

$$B = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{bmatrix}$$

est équivalente par dérivation à A. En effet, le complexe de A-modules $P_2[1] \oplus P_1/P_2$, où $P_i = e_{ii}A$, est basculant et son algèbre d'endomorphismes est isomorphe à B.

3.2 K-théorie

Soit A un anneau et $\mathcal{D}A = \mathcal{D}(\mathrm{Mod\,A})$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\mathrm{Mod\,A}$ des A-modules (à droite). Rappelons que $\mathrm{per\,A}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}A$ formée des complexes quasi-isomorphes à des complexes parfaits (2.2). Si $(Y_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes de A-modules, la somme $\coprod_{i\in I} Y_i$ existe dans $\mathcal{D}A$ et se calcule « composante par composante » . Un foncteur $F : \mathcal{D}A \to \mathcal{A}b$ *commute aux sommes infinies* si l'application canonique

$$\coprod_{i\in I} FY_i \to F \coprod_{i\in I} Y_i$$

est bijective quelle que soit la famille $(Y_i)_{i\in I}$. D'après [64, 6.3] (voir aussi [49, 5.3]), la catégorie $\mathrm{per\,A} \subset \mathcal{D}A$ est formée des complexes X tels que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}A}(X, ?)$ commute aux sommes infinies. En particulier, *toute équivalence* *triangulée* $\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$ *induit une équivalence* $\mathrm{per}\,\mathrm{A} \to \mathrm{per}\,\mathrm{B}$. Si $\mathrm{pro}\,\mathrm{A}$ désigne la catégorie des A-modules projectifs de type fini, alors d'après [31], le foncteur canonique induit un isomorphisme $\mathrm{K}_0(\mathrm{pro}\,\mathrm{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_0(\mathrm{per}\,\mathrm{A})$. Nous voyons donc que *toute équivalence* $\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$ *donne lieu à un isomorphisme* $\mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(B)$, où nous notons $\mathrm{K}_0(A) = \mathrm{K}_0(\mathrm{pro}\,\mathrm{A})$.

Supposons maintenant A et B cohérents à droite de façon à ce que les A-modules de présentation finie forment une catégorie abélienne $\mathrm{mod}\,\mathrm{A}$. Alors, d'après [64, Sect. 8], toute équivalence $\mathcal{D}A \to \mathcal{D}B$ induit une équivalence

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\,\mathrm{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\,\mathrm{B}).$$

D'après [31], le foncteur canonique $\mathrm{mod}\,\mathrm{A} \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\,\mathrm{A})$ induit un isomorphisme de $\mathrm{G}_0(A) = \mathrm{K}_0(\mathrm{mod}\,\mathrm{A})$ sur $\mathrm{K}_0(\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\,\mathrm{A}))$. *Une équivalence* $\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$ *donne donc lieu à un isomorphisme* $\mathrm{G}_0(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}_0(B)$. En outre, si A et B sont des algèbres de dimension finie sur un corps k et que l'équivalence $\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$ est k-linéaire, les isomorphismes induits respectent clairement la forme bilinéaire

$$<,>: \mathrm{K}_0(A) \times \mathrm{G}_0(A) \to \mathbb{Z}$$

définie par

$$< [P], [M] >= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}A}(P, M[i]) \quad .$$

Supposons que A et B sont des anneaux et que X est un complexe basculant bilatère (un complexe de A-B-bimodules tel que le foncteur $? \otimes_A^{\mathbf{L}} X : \mathcal{D}A \to \mathcal{D}B$ est une équivalence). Supposons que X est spécial (2.2). Alors, en utilisant les méthodes de [77] (basées sur la K-théorie de Waldhausen [76]) *on peut associer à* X *un isomorphisme* $\mathrm{K}_i(X) : \mathrm{K}_i(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_i(B)$ *pour tout* $i \geq 0$. Notons que pour $i > 0$, cette construction nécessite un complexe basculant bilatère c'est-à-dire une donnée plus fine que celle d'une équivalence triangulée.

3.3 Homologies de Hochschild

Soit k un anneau commutatif et A et B deux k-algèbres projectives en tant que modules sur k. On note $\mathrm{HH}_* A$ (resp. $\mathrm{HH}^* A$) les groupes d'homologie (resp. de cohomologie) de Hochschild de A. Supposons qu'il existe X un complexe de A-B-bimodules basculant bilatère (2.2) de façon qu'on a une équivalence $? \otimes_A^{\mathbf{L}} X : \mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}B$.

Théorème 3.1 ([33] [67]) — *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{HH}_*(X) : \mathrm{HH}_* A \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}_* B \;\; \textit{et} \;\; \mathrm{HH}^*(X) : \mathrm{HH}^* A \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^* B.$$

En particulier, le centre $\mathrm{HH}^0 A = Z(A)$ *est préservé par équivalence dérivée.*

Esquisse de la démonstration. J. Rickard a montré dans [67] qu'il existe un complexe de B-A-bimodules basculant bilatère Y et des isomorphismes

$$X \otimes_B^{\mathbf{L}} Y \xrightarrow{\sim} A \text{ dans } \mathcal{D}(A \otimes A^{\mathrm{op}}) \quad \text{et} \quad Y \otimes_A^{\mathbf{L}} X \xrightarrow{\sim} B \text{ dans } \mathcal{D}(B \otimes B^{\mathrm{op}}).$$

En utilisant [67] de nouveau nous obtenons la suite d'isomorphismes dans $\mathcal{D}k$

$$A \otimes_{A^e}^{\mathbf{L}} A \xrightarrow{\sim} (X \otimes_B^{\mathbf{L}} Y) \otimes_{A^e}^{\mathbf{L}} (X \otimes_B^{\mathbf{L}} Y) \xrightarrow{\sim} (Y \otimes_A^{\mathbf{L}} X) \otimes_{B^e}^{\mathbf{L}} (Y \otimes_A^{\mathbf{L}} X) \xrightarrow{\sim} B \otimes_{B^e}^{\mathbf{L}} B\,,$$

où $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$. Ceci implique l'affirmation pour HH_* car nous avons

$$\mathrm{HH}_n\, A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(A \otimes_{A^e}^{\mathbf{L}} A)$$

et de même pour B. Pour montrer l'affirmation pour HH^*, nous utilisons les isomorphismes

$$\mathrm{HH}^n(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A^e)}(A, A[n])$$

et le fait que $M \mapsto Y \otimes_B^{\mathbf{L}} M \otimes_A^{\mathbf{L}} X$ est une équivalence de $\mathcal{D}(A \otimes A^{\mathrm{op}})$ sur $\mathcal{D}(B \otimes B^{\mathrm{op}})$ qui envoie A sur B. □

3.4 Homologie cyclique

Nous utilisons les notations du livre de J. L. Loday [56]. L'invariance de l'homologie cyclique par l'équivalence de Morita a été démontrée dans des contextes variés par A. Connes [18, Cor. 24], Loday-Quillen [57, Cor. 1.7], R. McCarthy [60], [61] et Chr. Kassel [42],[44].

La difficulté principale de la démonstration d'un résultat d'invariance de Morita pour l'homologie cyclique réside dans le fait que pour l'homologie cyclique, on ne dispose pas d'une interprétation homologique intrinsèque analogue à celle de l'homologie de Hochschild (voir la démonstration dans (3.3)). On est donc obligé de construire des morphismes entre complexes différentiels par des procédés plus ou moins explicites (voir [60] pour une approche explicite au maximum). Cette difficulté se fait sentir aussi dans le cas de l'équivalence par dérivation. Elle est encore accrue par le fait que les « morphismes structuraux » d'une équivalence par dérivation ne sont définis qu'à homotopie près. Néanmoins nous avons le

Théorème 3.2 ([51]) — *Sous les hypothèses du théorème (3.3), nous avons un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{HC}_*(X) : \mathrm{HC}_*(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HC}_*(B).$$

Il est démontré dans [51] que l'isomorphisme $\mathrm{HC}_*(X)$ peut être déduit d'un quasi-isomorphisme entre les complexes mixtes [43] associés à A et B. Ainsi, tous les invariants déduits du complexe mixte sont préservés par l'équivalence par dérivation (homologie cyclique périodique, négative, cohomologie cyclique, ...).

Voici l'idée de la démonstration du théorème : Soit $X^\bullet$ un complexe basculant bilatère spécial (2.2). Notre démarche consiste à relier les deux algèbres A et B par une troisième, notée $C^\bullet$ dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & \overbrace{\mathrm{End}_B^\bullet(B \oplus X^\bullet)}^{C^\bullet} & \xleftarrow{\beta} & B \\ a & \mapsto & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow & b \\ \mathrm{HC}_*(A) & \longrightarrow & \mathrm{HC}_*(C^\bullet) & \longleftarrow & \mathrm{HC}_*(B) \end{array}$$

L'algèbre $C^\bullet$ n'est plus une algèbre « ordinaire » mais une algèbre différentielle $\mathbb{Z}$-graduée : posons $K^\bullet = B \oplus X$; alors la composante C^n, $n \in \mathbb{Z}$, est formée des morphismes de B-modules $\mathbb{Z}$-graduées

$$f : \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} K^p \to \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} K^q.$$

La différentielle de $C^\bullet$ est définie par

$$df = d \circ f - (-1)^n f \circ d$$

où $f \in C^n$. La différentielle vérifie la règle de Leibniz graduée et on obtient donc bien une algèbre différentielle $\mathbb{Z}$-graduée au sens technique. La définition de l'homologie cyclique s'étend de façon naturelle à cette classe d'algèbres (voir [74], [30]). Les morphismes α et β sont définis par l'action de A à gauche sur X resp. l'action de B à gauche sur B. Par un argument de dévissage [51, 1.2] on montre que α et β induisent des isomorphismes en homologie cyclique.

Le morphisme $\mathrm{HC}_*(X)$ est défini dès que β induit un isomorphisme en homologie cyclique. C'est le cas si X restreint à B est quasi-isomorphe à un complexe parfait (2.2). Notons $\mathrm{rep}\,(A, B)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(A^{\mathrm{op}} \otimes B)$ formée de ces complexes. En nous inspirant d'un résultat de Chr. Kassel [42], nous montrons dans [51, 2.3] que le morphisme $\mathrm{HC}_*(X)$ est fonctoriel dans le sens suivant : a) si nous regardons A comme un complexe de A-A-bimodules, alors $\mathrm{HC}_*(A) = \mathbf{1}$; b) si $Y \in \mathrm{rep}\ (B, C)$, alors $\mathrm{HC}_*(X \otimes_B^{\mathbf{L}} Y) = \mathrm{HC}_*(Y) \circ \mathrm{HC}_*(X)$. De plus, le morphisme $\mathrm{HC}_*(X)$ ne dépend que de la classe de X dans le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée $\mathrm{rep}\,(A, B)$. Il est naturel de regarder ces groupes comme les espaces de morphismes d'une catégorie dont les objets sont les k-algèbres (projectives en tant que modules sur k). Une *équivalence K-théorique* est un isomorphisme de cette catégorie. Ainsi, l'homologie cyclique est en fait préservée par l'équivalence K-théorique. Par exemple, on peut montrer ainsi que l'homologie cyclique d'une algèbre de dimension finie et de dimension globale finie sur un corps algébriquement clos ne dépend que du nombre de modules simples, car on a une équivalence K-théorique entre une telle algèbre et son plus grand quotient semi-simple (voir [51, 2.4]). Ceci donne une démonstration de la « conjecture sur l'absence de boucles » (no loops conjecture) dans le cas algébriquement clos. La conjecture a été démontrée dans ce cas pour la première fois par H. Lenzing [54]. Nous renvoyons à [38] pour une démonstration sous des hypothèses plus faibles.

Références

[1] H. H. Andersen, *Tensor products of quantized tilting modules*, Comm. Math. Phys. **149** (1992), 149–159.

[2] M. Auslander, M. I. Platzeck, I. Reiten, *Coxeter functors without diagrams*, Trans. Am. Math. Soc. **250** (1979), 1–46.

[3] I. Assem, *Tilting theory — an introduction*, Topics in Algebra, Part 1 (Warsaw 1988), Banach Center Publ. **26**, 1990, 127–180.

[4] M. Auslander, R. O. Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations*, Mém. Soc. Math. France (N. S.) **38** (1989), 5–37.

[5] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. Math. **86** (1991), 111-152.

[6] D. Baer, *Tilting sheaves in representation theory of Artin algebras*, Manus. Math. **60** (1988), 323–347.

[7] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems of linear algebra*, Funkts. Anal. Prilozh. **12** (1978), 68–69. English translation : Funct. Anal. Appl. **12** (1979), 214–216.

[8] A. A. Beilinson, V. Ginsburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 473–527.

[9] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, *Algebraic bundles on* $\mathbf{P}^n$ *and problems of linear algebra*, Funkts. Anal. Prilozh. **12** (1978), 66–67. English translation : Funct. Anal. Appl. **12** (1979), 212–214.

[10] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Usp. Mat. Nauk **28** (1973), 19–33. English translation : Russian Math. Surveys **28** (1973), 17–32.

[11] M. Bökstedt, A. Neeman, *Homotopy limits in triangulated categories*, Compositio Mathematica **86** (1993), 209–234.

[12] K. Bongartz, *Tilted algebras*, Representations of Algebras, Puebla 1980, Springer LNM **903** (1981), 26–38.

[13] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalization of the Bernstein–Gelfand–Ponomarev reflection functors*, Representation theory II, Springer LNM **832** (1980), 103–169.

[14] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181–182** (1990), 61–92.

[15] ———, *Equivalences of Blocks of Group Algebras*, in : Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa 1992), edited by V. Dlab and L. Scott, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1994, 163–181.

[16] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[17] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Derived categories and Morita theory, J. Alg. **104** (1986), 397–409.

[18] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. IHES **62** (1985), 257–360.

[19] S. Donkin, *Invariants of several matrices*, Invent. Math. **110** (1992), 389–401.

[20] ———, *On tilting modules for algebraic groups*, Math. Z. **212** (1993), 39–60.

[21] ———, *On tilting modules and invariants for algebraic groups*, in : Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa 1992), edited by V. Dlab and L. Scott, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1994, 59–77.

[22] P. Dowbor, H. Meltzer, *On equivalences of Bernstein-Gelfand-Gelfand, Beilinson and Happel*, Comm. in Alg. **20** (1992), 2513–2531.

[23] K. Erdmann, *Symmetric groups and Quasi-hereditary Algebras*, in : Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa 1992), edited by V. Dlab and L. Scott, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1994, 59–77.

[24] P. Gabriel, *Auslander–Reiten sequences and representation-finite algebras*, in : Proc. ICRA II (Ottawa 1979), Springer LNM **831** (1980), 1–71.

[25] P. Gabriel, A. Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras*, Encyclopaedia of the Mathematical Sciences, Vol. 73, A. I. Kostrikin and I. R. Shafarevich (Eds.), Algebra VIII, Springer 1992.

[26] W. Geigle, H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*, in : Singularities, representations of algebras, and vector bundles (Lambrecht 1985), Springer LNM **1273** (1987), 265-297.

[27] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 5, Tihany 1970, (1972), 163–237.

[28] G. Georgiev, O. Mathieu, *Catégorie de fusion pour les groupes de Chevalley*, C. R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 659–652.

[29] ———, *Fusion rings for modular representations of Chevalley groups*, Contemp. Math. **175** (1995), 89–100.

[30] Th. Goodwillie, *Cyclic Homology, Derivations, and the free Loopspace*, Topology **24** (1985), 187–215.

[31] A. Grothendieck, *Groupes de classes des catégories abéliennes et triangulées, Complexes parfaits*, SGA 5, Exposé VIII, Springer LNM **589** (1977), 351-371.

[32] D. Happel, *On the derived Category of a finite-dimensional Algebra*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 339–389.

[33] ———, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, 39^e année (Paris 1987/1988), Springer LNM **1404** (1989), 108–126.

[34] ———, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **119** (1988), Cambridge University Press.

[35] ———, *Reduction techniques for homological conjectures*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), 115–130.

[36] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Quasitilted Algebras*, in : Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa 1992), edited by V. Dlab and L. Scott, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1994, 163–181.

[37] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, in : Representations of algebras, Puebla 1980, Trans. Am. Math. Soc. **274** (1982), 399–443.

[38] K. Igusa, *Notes on the no loops conjecture*, J. Pure and Appl. Alg. **69** (1990), 161–176.

[39] M. M. Kapranov, *The derived categories of coherent sheaves on Grassmannians*, Funkts. Anal. Prilozh. **17** (1983), 78-79. English translation : Funct. Anal. Appl. **17** (1983), 145-146.

[40] ———, *The derived category of coherent sheaves on a quadric*, Funkts. Anal. Prilozh. **20** (1986), 67. English Translation : Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 141-142.

[41] ———, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Invent. math. **92** (1988), 479–508.

[42] Chr. Kassel, *K-théorie algébrique et cohomologie cyclique bivariantes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 **306** (1988), 799–802.

[43] ———, *Cyclic homology, comodules and mixed complexes*, J. Alg. **107** (1987), 195–216.

[44] ———, *Caractère de Chern bivariant*, K-Theory **3** (1989), 367–400.

[45] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren 292, Springer Berlin Heidelberg New York, 1990.

[46] B. Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manus. math. **67** (1990), 379–417.

[47] ———, *Derived categories and universal problems*, Comm. in Alg. **19**(3) (1991), 699–747.

[48] ———, *A remark on tilting theory and DG algebras*, Manus. Math. **79** (1993), 247–252.

[49] ———, *Deriving DG categories*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série **27** (1994), 63–102.

[50] ———, *On the construction of triangle equivalences*, to appear in : Derived equivalences and group rings (Pappenheim 1994), edited by S. König and A. Zimmermann, Springer LNM.

[51] ———, *Invariance and localization for cyclic homology of DG algebras*, to appear in J. Pure Appl. Alg.

[52] ———, *Remarks on the derived category of an exact category*, in preparation.

[53] S. König, A. Zimmermann, *Tilting hereditary orders*, to appear in Comm. in Alg.

[54] H. Lenzing, *Nilpotente Elemente in Ringen von endlicher globaler Dimension*, Math. Z. **108** (1969), 313–324.

[55] M. Linckelmann, *Derived equivalences for cyclic blocks over a p-adic ring*, Math. Z. **207** (1991), 293–304.

[56] J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, Grundlehren 301, Springer-Verlag, 1992.

[57] J.-L. Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 565–591.

[58] N. Marmaridis, *Reflection functors*, Ottawa 1979, Springer LNM **832** (1980), 382–395.

[59] O. Mathieu, *On the dimension of some modular irreducible representations of the symmetric group*, preprint, 1995.

[60] R. McCarthy, *L'équivalence de Morita et l'homologie cyclique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **307** (1988), 211–215.

[61] ———, *The cyclic homology of an exact category*, J. Pure and Appl. Alg. **93** (1994), 251–296.

[62] T. Miyashita, *Tilting modules of finite projective dimension*, Math. Z. **193** (1986), 113–146.

[63] K. Morita, *Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 6 (1958), 85–142.

[64] J. Rickard, *Morita theory for Derived Categories*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 436–456.

[65] ———, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 307–317.

[66] ———, *Lifting theorems for tilting complexes*, J. Algebra **142** (1991), 383–393.

[67] ———, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 37–48.

[68] ———, *Translation functors and equivalences of derived categories for blocks of algebraic groups*, in : Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa 1992), edited by V. Dlab and L. Scott, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1994, 163–181.

[69] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Springer LNM **1099** (1984).

[70] ———, *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*, Math. Zeitschrift **208** (1991), 209–225.

[71] L. Scott, *Simulating algebraic geometry with algebra, I : the algebraic theory of derived categories*, in : The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, 1986), Proc. Symp. Pure Math. **47** (1987), 271–281.

[72] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Mathematica **65** (1988), 121–154.

[73] J.-L. Verdier, *Catégories dérivées, état 0*, SGA 4 1/2, Springer LNM **569**, 1977, 262–311.

[74] M. Vigué-Poirrier, D. Burghelea, *A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces*, J. Diff. Geom. **22** (1985), 243–253.

[75] D. Vossieck, notes non publiées, 1985.

[76] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, in : Algebraic and Geometric Topology, Springer LNM **1126** (1985), 318–419.

[77] C. A. Weibel, Dongyuan Yao, *Localization for the K-theory of Noncommutative rings* in : Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989), Contemporary Mathematics **125** (1992), 219–230.