

Intervalos de confianza vía verosimilitud relativa de los parámetros de la distribución Birnbaum-Saunders

Confidence Intervals for the Parameters of the Birnbaum-Saunders
Distribution via Relative likelihood

RAÚL ALBERTO PÉREZ^a, JUAN CARLOS CORREA^b

ESCUELA DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,
MEDELLÍN, COLOMBIA

Resumen

La distribución Birnbaum-Saunders es importante como una distribución del tiempo de falla causada en elementos que están bajo cargas cíclicas. En este artículo se desarrollan estimaciones por intervalo para los diferentes parámetros de la distribución Birnbaum-Saunders vía verosimilitud relativa y se comparan con el procedimiento de estimación de máxima verosimilitud. También se ilustran las diferentes situaciones mediante la aplicación de dicha distribución en el análisis de un conjunto de datos apropiado. El método de simulación de Monte Carlo se utiliza para comparar el comportamiento de todos estos estimadores. Se evalúan tanto las probabilidades de cobertura de los Intervalos de Confianza (IC) como las longitudes de los mismos para diferentes tamaños muestrales

Palabras clave: distribución de Birnbaum-Saunders, simulación de Monte Carlo, verosimilitud relativa.

Abstract

The Birnbaum-Saunders distribution is important as a failure time distribution to study fatigue failure caused under cyclic loading. In this work we developed interval estimators for the different parameters of the Birnbaum-Saunders distribution by means of the relative probability and we will compare them with other procedures using Monte Carlo's method. The coverage probabilities of the confidence intervals as well as the lengths for different sizes samples are also evaluated.

Key words: Birnbaum-Saunders distribution, Monte Carlo's method, relative likelihood.

^aProfesor asistente. E-mail: raperez1@unalmed.edu.co

^bProfesor asociado. E-mail: jccorrea@unalmed.edu.co

1. Introducción

La distribución Birnbaum-Saunders (BS) fue propuesta por Birnbaum & Saunders (1969b), como una distribución del tiempo de falla para fatigas causadas bajo cargas cíclicas, en que se asumió que la falla se debía al desarrollo y crecimiento de una fractura dominante.

Una derivación más general de dicha distribución fue dada por Desmond (1985), basada en un modelo biológico. Desmond también fortaleció la justificación física para el uso de esta distribución relajando las suposiciones hechas por Birnbaum y Saunders. Desmond investigó las relaciones entre la distribución BS y la distribución inversa gaussiana.

La función de distribución acumulada (FDA) de una variable T distribuida BS con parámetros α y β puede ser escrita como

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left\{ \left(\frac{t}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{t} \right)^{1/2} \right\} \right], \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la FDA de la normal estándar, y su función de densidad de probabilidad (FDP) es

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{t} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t} \right)^{3/2} \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\}, \quad t > 0, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2)$$

Los parámetros α y β son llamados parámetros de forma y escala, respectivamente.

Se sabe que la función de densidad de probabilidad de la distribución BS es unimodal y aunque la tasa de azar no es una función creciente de t , la tasa media de azar es cercanamente una función no-decreciente de t (Mann et al. 1974).

Los estimadores de máxima verosimilitud (EMV), fueron discutidos originalmente por Birnbaum & Saunders (1969a), y sus distribuciones asintóticas fueron obtenidas por Engelhardt et al. (1981). Aunque, los EMV tienen varias propiedades óptimas, se necesita resolver una ecuación no lineal en β para obtener sus valores. Para este propósito, Birnbaum y Saunders sugirieron algunos esquemas iterativos para resolver la requerida ecuación no lineal.

Tampoco está disponible la distribución exacta de los EMV. Más aún, para construir los intervalos de confianza de los parámetros desconocidos α y β , debe emplearse la distribución asintótica de los EMV. Sin embargo, no se conoce cómo se comportan estos intervalos de confianza asintóticos en el caso de tamaños de muestras pequeñas. Incluso los estimadores mediante el método momentos convencionales también tienen una dificultad debido a que no siempre existen, y aún si existieran, podrían no ser únicos.

En este artículo se realizará una comparación de los estimadores de los parámetros de la distribución Birnbaum-Saunders vía verosimilitud relativa con los estimadores de dichos parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.

2. Estimadores de máxima verosimilitud

Dada una muestra aleatoria t_1, t_2, \dots, t_n de observaciones de tamaño n de la distribución BS con función de densidad de probabilidad $f(t_i)$ dada por (2), se tiene que la función de verosimilitud relativa (FVR) está dada por

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = (\alpha\beta^{1/2})^{-n} \prod_{i=1}^n (t_i + \beta) \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - \beta)^2}{t_i} \right\} \quad (3)$$

de donde el log de la FVR está dado por

$$l(\alpha, \beta) = -n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \quad (4)$$

Para hallar los EMV, se resuelve el par de ecuaciones simultáneas dado por

$$S(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} S_1(\alpha, \beta) \\ S_2(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial l}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para que exista un máximo relativo en $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, se debe cumplir en este caso que la matriz información debe ser definida positiva, es decir

$$\mathfrak{I}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{11}(\alpha, \beta) & \mathfrak{I}_{12}(\alpha, \beta) \\ \mathfrak{I}_{12}(\alpha, \beta) & \mathfrak{I}_{22}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

evaluada en $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, $\mathfrak{I}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, debe ser definida positiva, lo cual quiere decir que $\hat{\mathfrak{I}}_{11} > 0$, $\hat{\mathfrak{I}}_{22} > 0$ y $\hat{\mathfrak{I}}_{11}\hat{\mathfrak{I}}_{22} - \hat{\mathfrak{I}}_{12}^2 > 0$, con $\hat{\mathfrak{I}}_{ij} = \mathfrak{I}_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

Luego de derivar (4) con respecto a α e igualar a cero, se obtiene que $\hat{\alpha}(\beta)$ está dado por:

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

Para hallar $\hat{\beta}$, se deriva nuevamente (4) con respecto a β y, luego de igualar a cero, se divide todo entre n y se resuelve para β . Se obtiene la ecuación

$$\beta^2 - \beta[2r + K(\beta)] + r[s + K(\beta)] = 0 \quad (8)$$

donde la media muestral y la media armónica están definidas por

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad r = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right]^{-1} \quad (9)$$

respectivamente, y la función media armónica $K(x)$ se define como

$$K(x) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x + t_i)^{-1} \right]^{-1}, \quad \text{para } x \geq 0 \quad (10)$$

así, que $r = K(0)$.

El EMV de β , denotado por $\hat{\beta}$, puede ser obtenido como la única raíz positiva de la ecuación (8).

Como la ecuación dada en (8) no es una ecuación lineal en β , se necesita usar procesos iterativos para resolver dicha ecuación para $\hat{\beta}$. Birnbaum y Saunders propusieron dos procesos iterativos (uno simple y uno complejo) para calcular $\hat{\beta}$ de la ecuación dada en (8), pero se notó que el proceso simple funciona muy bien para α pequeño (digamos $< \frac{1}{2}$), y que no puede trabajar bien para todo α grande (digamos $\alpha > 2$), mientras que el proceso complejo no trabaja en ciertos rangos del espacio muestral. En este trabajo se utilizó el método de Newton-Rapson para el cálculo de los EMV.

Engelhardt et al. (1981) mostró que la distribución conjunta asintótica de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ es normal-bivariada y está dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \sim N_2 \left[\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n[0.25 + \alpha^{-2} + I(\alpha)]} \end{bmatrix} \right] \quad (11)$$

donde

$$I(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} \{[1 + g(\alpha x)]^{-1} - 0.5\}^2 d\phi(x)$$

y

$$g(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + y \left(1 + \frac{y^2}{4}\right)^{1/2}$$

Es interesante observar que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son asintóticamente independientes entre sí. Los intervalos de confianza asintóticos de α pueden obtenerse fácilmente de (11) y el intervalo de confianza asintótico de β para un α dado también puede obtenerse de (11).

Para hallar la solución de (8) mediante el método de Newton, se procedió de la siguiente forma.

Sea $g(\beta) = \beta^2 - \beta[2r + K(\beta)] + r[s + K(\beta)]$. Se trata de resolver la ecuación $g(\beta) = 0$, para la cual su ecuación iterativa es

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{g(\beta_i)}{g'(\beta_i)} \quad (12)$$

donde

$$g'(\beta) = (\beta - r)[2 - K'(\beta)] - K(\beta) \quad (13)$$

con $K(\beta)$ definido en (10), y

$$K'(\beta) = K^2(\beta)C(\beta) \quad (14)$$

con

$$C(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-2} \quad (15)$$

luego, de esta parte se obtiene la solución de (8) para β , que es el EMV.

Para obtener estimadores EMV conjuntos para $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ empleando el método de Newton-Rapson, se procede a resolver mediante iteraciones el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_{11} & \mathfrak{S}_{12} \\ \mathfrak{S}_{12} & \mathfrak{S}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde $S_1(\alpha, \beta)$, $S_2(\alpha, \beta)$ son las derivadas parciales de $l(\alpha, \beta)$ con respecto a α y β , respectivamente, y $\mathfrak{S}_{ij}(\alpha, \beta)$ están evaluadas en un valor inicial (α_0, β_0) , con

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{11}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \\ \mathfrak{S}_{22}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = nC(\beta) - \frac{n}{2\beta^2} + \frac{ns}{\alpha^2 \beta^3} \\ \mathfrak{S}_{12}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{n}{\alpha^3 \beta^2} \left[s - \frac{\beta^2}{r} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

y donde $C(x)$ está definida por (15).

Luego la ecuación de iteración del método de Newton-Rapson es

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] & \frac{n}{\alpha^3 \beta^2} \left[s - \frac{\beta^2}{r} \right] \\ \frac{n}{\alpha^3 \beta^2} \left[s - \frac{\beta^2}{r} \right] & nC(\beta) - \frac{n}{2\beta^2} + \frac{ns}{\alpha^2 \beta^3} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \\ \frac{n}{K(\beta)} - \frac{n}{2\beta} + \frac{ns}{2\alpha^2 \beta^2} - \frac{n}{2\alpha^2 r} \end{bmatrix}$$

Como valores iniciales para (α_0, β_0) se pueden utilizar los estimadores obtenidos mediante el método de los momentos para α y β , dados por

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{T}}{1 + \frac{1}{2}\hat{\alpha}^2}$$

y

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{2(A - B) \pm 2\bar{T}\sqrt{B + 3A}}{5B - A} \quad (18)$$

donde $B = \bar{T}^2$ y $A = \left(\frac{n-1}{n}\right)S^2$, con \bar{T} y S^2 media muestral y varianza muestral de la variable T distribuida BS.

3. Verosimilitud relativa y contornos de verosimilitud para (α, β)

La función de verosimilitud relativa (FVR) conjunta de (α, β) está definida por

$$R(\alpha, \beta) = \frac{L(\alpha, \beta)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (19)$$

claramente, $0 \leq R(\alpha, \beta) \leq 1$ y $R(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 1$. La verosimilitud relativa de un par de valores (α_0, β_0) es

$$R(\alpha_0, \beta_0) = \frac{L(\alpha_0, \beta_0)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (20)$$

y se interpreta de la siguiente forma: si $R(\alpha_0, \beta_0)$ es cercano a cero, quiere decir que el par de valores (α_0, β_0) es inviable para estimar (α, β) , ya que existen otros pares de valores de los parámetros para los cuales los datos son mucho más probables. La FVR conjunta, $R(\alpha, \beta)$, organiza los pares de valores (α, β) de acuerdo con su viabilidad a la luz de los datos.

Ahora, el log de la FVR conjunta de α y β está dado por

$$r(\alpha, \beta) = \log R(\alpha, \beta) = \log \frac{L(\alpha, \beta)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = l(\alpha, \beta) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \quad (21)$$

donde $l(\alpha, \beta)$ está dada por (4).

Una región de verosimilitud del 100p % para (α, β) es el conjunto de valores de los parámetros (α, β) tales que $R(\alpha, \beta) \geq p$, o equivalentemente $r(\alpha, \beta) \geq \log(p)$. La curva $R(\alpha, \beta) = p$, que forma la frontera de la región de verosimilitud, se llama contorno de verosimilitud del 100p % para (α, β) .

4. Verosimilitud relativa máxima

Para realizar estimaciones acerca de un solo parámetro, α o β , se utiliza el enfoque de verosimilitud relativa máxima.

Si solo estamos interesados en la información concerniente al parámetro β , entonces se utiliza la función de verosimilitud relativa máxima de β , está dada por

$$R_{\text{máx}}(\beta) = \max_{\alpha} R(\alpha, \beta) = R(\hat{\alpha}(\beta), \beta) = \frac{L(\hat{\alpha}(\beta), \beta)}{L'(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (22)$$

donde $\hat{\alpha}(\beta)$ es el EMV de α dado β , el cual se puede hallar resolviendo $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0$. El log de la FVR máxima es

$$r_{\text{máx}}(\beta) = \log R(\hat{\alpha}(\beta), \beta) = l(\hat{\alpha}(\beta), \beta) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \quad (23)$$

De esto se obtiene que un intervalo de verosimilitud máximo del 100p % para β es el conjunto de todos los valores de β tales que $R_{\text{máx}}(\beta) \geq p$, o equivalentemente $r_{\text{máx}}(\beta) \geq \log(p)$.

Ahora, remplazando $\hat{\alpha}(\beta)$ dado en (7), en la expresión dada en (4), se tiene que

$$l(\hat{\alpha}(\beta), \beta) = -\frac{n}{2} \log \left[\frac{s}{\beta} + \frac{\beta}{r} - 2 \right] - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log(\beta + t_i) - \frac{1}{2 \left(\frac{s}{\beta} + \frac{\beta}{r} - 2 \right)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \quad (24)$$

y a partir de

$$r_{\text{máx}}(\beta) = l(\hat{\alpha}(\beta), \beta) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \quad (25)$$

resolviendo la desigualdad, $r_{\text{máx}}(\beta) \geq \log(p)$, se obtiene un intervalo de verosimilitud relativa máximo del 100p% para β . Similarmente, la función de verosimilitud relativa máxima de α está dada por

$$R_{\text{máx}}(\alpha) = \max_{\beta} R(\alpha, \beta) = R(\alpha, \hat{\beta}(\alpha)) = \frac{L(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (26)$$

y el log de la FVR máxima es

$$r_{\text{máx}}(\alpha) = \log R(\alpha, \hat{\beta}(\alpha)) = l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha)) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \quad (27)$$

Un intervalo de verosimilitud relativa máximo del 100p% para α es el conjunto de todos los valores de α tales que $R_{\text{máx}}(\alpha) \geq p$, o equivalentemente $r_{\text{máx}}(\alpha) \geq \log(p)$.

5. Ejemplo de aplicación

En este trabajo, se utilizó un conjunto de datos considerados por Birnbaum & Saunders (1969a) sobre la fatiga de cupones de aluminios 6061-T6, cortados paralelamente a la dirección de rodamiento y oscilaron a 18 ciclos por segundo. En la tabla 1 se tienen las 101 observaciones (tiempos de vida en ciclos $\times 10^{-3}$) tomadas con una tensión máxima por ciclo de 31000 psi.

TABLA 1: Tiempos de vida para 101 especímenes de aluminio.

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 70 | 121 | 134 | 152 | 100 | 124 | 138 | 157 | 107 | 133 | 108 | 130 | 142 |
| 166 | 113 | 131 | 144 | 196 | 119 | 139 | 120 | 134 | 151 | 99 | 124 | 137 |
| 157 | 105 | 128 | 148 | 130 | 142 | 164 | 112 | 131 | 142 | 174 | 116 | 132 |
| 159 | 134 | 151 | 97 | 124 | 136 | 157 | 104 | 128 | 139 | 108 | 141 | 163 |
| 112 | 131 | 142 | 170 | 114 | 132 | 146 | 120 | 149 | 96 | 123 | 136 | 156 |
| 104 | 124 | 138 | 158 | 129 | 163 | 109 | 131 | 142 | 168 | 114 | 132 | 145 |
| 108 | 134 | 90 | 121 | 134 | 155 | 103 | 124 | 138 | 157 | 120 | 141 | 109 |
| 130 | 142 | 166 | 114 | 131 | 144 | 212 | 129 | 148 | 162 | | | |

A continuación se presentan los resultados obtenidos.

Como valores iniciales para hallar los EMV de α y β se utilizaron los estimadores obtenidos por el método de los momentos cuyos valores, estimados junto con los EMV, están dados en la tabla 2. En la tabla 3 se tienen intervalos de confianza asintóticos del 90, 95 y 99% para α y β , al igual que sus respectivas longitudes. De la gráfica de contornos de verosimilitud conjunto (figura 1), se tiene que los intervalos de confianza aproximados vía verosimilitud relativa, del 90, 95 y 99% (o intervalos de verosimilitud máxima del 10, 5 y 1%) para α y β están dados en la tabla 4. De la figura 2 se tiene que los intervalos de confianza aproximados del 90, 95 y 99% (o intervalos de verosimilitud máxima del 10, 5 y 1%) para β están dados en la tabla 5.

TABLA 2: Estimadores de los momentos y EMV para α y β .

| Parámetros | Estimadores de los momentos | Estimadores de máx. verosimilitud |
|------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| α | 0.1657993 | 0.1703847 |
| β | 131.9194795 | 131.8188000 |

TABLA 3: Intervalos de confianza asintóticos del 90, 95 y 99 % para α y β .

| Nivel de confianza | I de confianza asintóticos para α | | Longitud del intervalo | I de confianza asintóticos para β | | Longitud del intervalo |
|--------------------|--|-----------|------------------------|---|----------|------------------------|
| 90 | 0.1506641 | 0.1901053 | 0.03944126 | 128.1557 | 135.4818 | 7.32609 |
| 95 | 0.1468878 | 0.1938816 | 0.04699384 | 127.4543 | 136.1833 | 8.72897 |
| 99 | 0.1395030 | 0.2012664 | 0.06176330 | 126.0826 | 137.5550 | 11.47236 |

TABLA 4: Intervalos de confianza aproximados vía verosimilitud relativa del 90, 95 y 99 % (o I.V. máxima del 10, 5 y 1 %) para α y β .

| Prob. de cobertura o nivel de confianza | I de confianza aproximados para α | | Longitud del intervalo | I de confianza aproximados para β | | Longitud del intervalo |
|---|--|--------|------------------------|---|--------|------------------------|
| 90 | 0.1475 | 0.1999 | 0.0524 | 127.05 | 136.75 | 9.70 |
| 95 | 0.1447 | 0.2046 | 0.0599 | 126.38 | 137.49 | 11.11 |
| 99 | 0.1395 | 0.2145 | 0.0750 | 125.08 | 138.95 | 13.87 |

TABLA 5: Intervalos de confianza aproximados del 90, 95 y 99 % (o I.V. máxima del 10, 5 y 1 %) para β .

| Nivel | I de Confianza para β | | Longitud del Intervalo |
|-------|-----------------------------|--------|------------------------|
| 90 | 127.05 | 136.75 | 9.70 |
| 95 | 126.38 | 137.49 | 11.11 |
| 99 | 125.08 | 138.95 | 13.87 |

6. Conclusiones

Analizando los resultados anteriores se puede concluir:

1. Los intervalos de confianza asintóticos tienen menor longitud que los intervalos de confianza aproximados, lo cual era de esperarse ya que los intervalos aproximados se calculan a partir de la región conjunta de verosimilitud para α y β .
2. Los intervalos de confianza asintóticos contienen valores con mayores verosimilitudes relativas que los intervalos aproximados vía verosimilitud relativa, lo cual se debe a la forma en la que fueron calculados estos últimos.
3. La probabilidad de cobertura de los intervalos de confianza aproximados vía verosimilitud relativa es mayor que la probabilidad de cobertura de los intervalos de confianza aproximados.

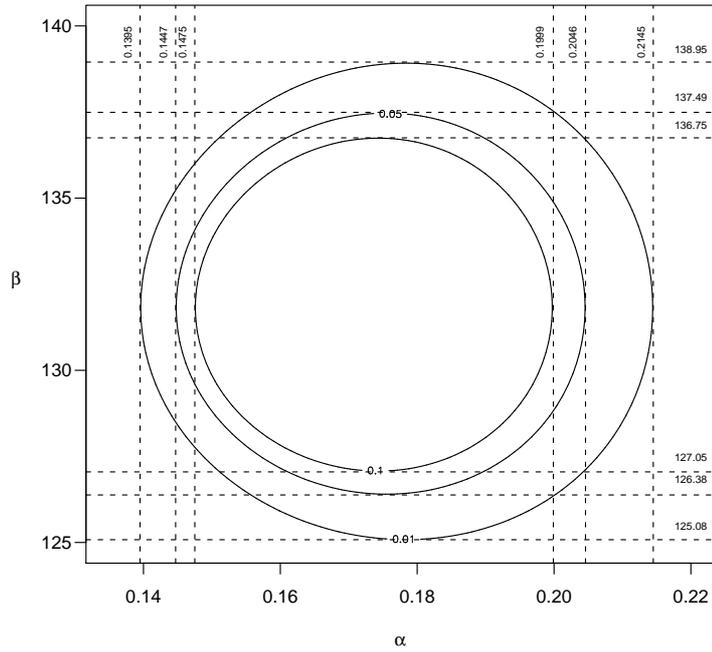


FIGURA 1: Contornos de verosimilitud conjuntos del 10, 5 y 1 % (o regiones de confianza del 90, 95 y 99 %) para α y β .

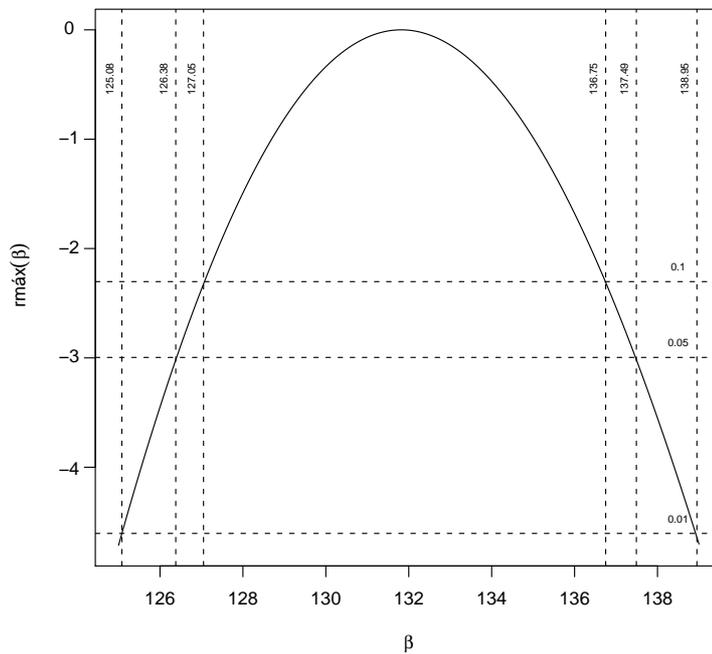


FIGURA 2: Función de verosimilitud relativa máxima para β .

Agradecimientos

Este trabajo se ha estado realizando con el apoyo de la vicedecanatura de investigación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional, sede Medellín, y la Escuela de Estadística de dicha Facultad, por lo cual les agradecemos su valiosa colaboración. Además, agradecemos a los árbitros designados para la revisión del artículo por las sugerencias y comentarios, los cuales fueron tenidos en cuenta para la versión final del mismo.

[Recibido: octubre de 2007 — Aceptado: mayo de 2008]

Referencias

- Birnbaum, Z. W. & Saunders, S. C. (1969*a*), 'A New Family of Life Distribution', *J. Applied Prob.* **6**, 319–327.
- Birnbaum, Z. W. & Saunders, S. C. (1969*b*), 'Estimation for a Family of Life Distributions with Applications to Fatigue', *J. Applied Prob.* **6**, 328–347.
- Desmond, A. F. (1985), 'Stochastics Models of Failure in Random Environments', *Canad. J. Statis.* (13), 171–183.
- Engelhardt, M., Bain, L. J. & Wright, F. T. (1981), 'Inference on the Parameters of the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution Based on Maximum Likelihood Estimation', *Technometrics* **23**(3), 251–256.
- Mann, N. R., Schafer, R. E. & Singpurwalla, N. D. (1974), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, New York, United States.