PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 61 Fasc. 3 – 2004
Nova Série

ÉTUDE PAR LA MÉTHODE DES LIMITES FLUIDES DE LA STABILITÉ DU RÉSEAU DE FILE D'ATTENTE DE LU–KUMAR–BRAMSON

Faiza Belarbi née Limam

Résumé: Nous étudions l'ergodicité du réseau de file d'attente de Lu–Kumar–Bramson sous la discipline de service FIFO et sous les conditions habituelles

$$\rho_1 = m_1 + m_4 < 1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = m_2 + m_3 < 1 \ .$$

En utilisant le critère de modèle fluide présenté par Rybko, Stolyar et Dai, nous montrons que si $\rho_1 \leq \rho_2$ alors le modèle fluide est stable et le réseau de file d'attente stochastique est ergodique.

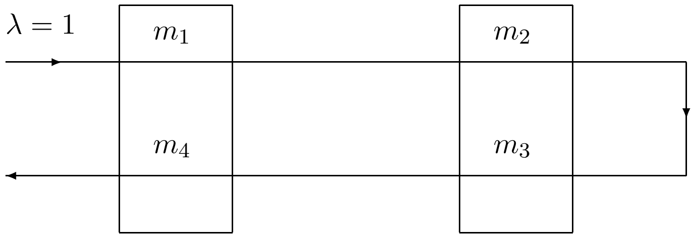
Par conséquent, nous prouvons la conjecture de Whitt et nous montrons que les conditions de la stabilité des réseaux multiclasses de files d'attente sous FIFO obtenues par Chen et Zhang ne sont pas optimales.

1 – Introduction

Le réseau de file d'attente de Lu–Kumar–Bramson se compose de deux files d'attente ($i = 1, 2$). A chaque file d'attente il y a un serveur et une salle d'attente de capacité infinie. Les clients suivent un itinéraire fixé par le réseau. Ils arrivent de l'extérieur à la cadence 1, ils vont faire la file 1 où ils ont besoin d'un service de moyenne m_1, et puis aligner 2 où ils ont besoin d'abord d'un service de moyenne m_2, et puis ils éprouvent un feedback à cette file exigeant un service de moyenne m_3, ensuite ils reviennent à la première file où ils ont besoin d'un service de moyenne m_4 et puis ils quittent le réseau. Par conséquent nous avons quatre

Received: April 15, 2003; *Revised*: September 26, 2003.
AMS Subject Classification: 60K25.
Mots clés: stabilité; multiclasses; service de discipline FIFO; modèle fluide.

classes de clients, 1 et 4 à la première file d'attente, et 2 et 3 à la seconde. La discipline est FIFO dans les deux files d'attente.



Réseau de Lu–Kumar–Bramson

Les conditions nécessaires de stabilité sont

$$\rho_1 = m_1 + m_4 < 1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = m_2 + m_3 < 1 \;. \tag{1}$$

Ce réseau a été présenté la première fois dans une configuration particulière par Lu et Kumar [7] et Whitt [9]. Lu et Kumar ont prouvé que pour un certain choix particulier des paramètres, la discipline accordant des priorités plus élevées des classes 2 et 4 est instable.

Whitt a étudié ce réseau sous la discipline FIFO et a conjecturé que sous les conditions (1) si $m_1 = m_3 = 0$ et $m_2 = m_4$ alors le réseau est stable.

Bramson [2] a étudié ce réseau avec j dos d'alimentation à la deuxième station où l'itinéraire est de la forme $1 \to 2 \to 2 \to \ldots \to 2 \to 1$ dans le cadre de la discipline FIFO. Sous les conditions $m_1 = m_i = \delta,\ 3 \leq i \leq j+2$ et $m_2 = m_j + 3 = c$, il a prouvé que pour quelque valeurs spéciales des paramètres c, j et δ satisfaisant les conditions habituelles $c + \delta \leq c + j\delta < 1$, le réseau est instable. Le modèle fluide associé aux réseaux de Bramson a été étudié par Dumas [6] où il a conjecturé que les réseaux de Bramson sont transients pour $j \geq 2$ (mais le cas $j = 1$ est toujours un problème non résolu).

Dai et Weiss [5] ont prouvé que l'addition à (1) de la condition $m_2 + m_4 < 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau soit stable sous toute discipline (stabilité globale), en particulier suffisante pour la discipline FIFO.

En 1998, Chen et Zhang [3] ont établi des conditions suffisantes pour la stabilité des réseaux de files d'attente multiclasses sous la discipline de service FIFO, qui ramenent dans notre cas à la condition $(1-m_4)(1-m_3) - 2\,m_4(m_2+m_3) > 0$. Cependant, ces conditions ne sont pas optimales.

2 – Modèle fluide

2.1. Présentations générales

Pour chaque nombre entier $n \geq 1$, soit $\tau(n)$ le temps d'interarrivée entre l'arrivée du $(n-1)^{\text{ieme}}$ client et celle du n^{ieme} client de l'exterieur; le premier client arrive au temps $\tau(1)$.

Les temps de services pour le n^{ieme} client dans les différentes classes sont $\sigma_1(n), ..., \sigma_4(n)$.

Nous faisons les présentations suivantes sur les interarrivées et les services. D'abord, nous avons:

$$\Big\{(\tau(n), \sigma_1(n), ..., \sigma_4(n)),\ n \geq 1\Big\} \quad \text{est une suite i.i.d. .} \tag{2}$$

Ensuite, nous supposons que les variables aléatoires ont les premiers moments finis

$$\mathbb{E}[\tau(1)] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\sigma_k(1)] = m_k < \infty, \quad \text{pour } k = 1, ..., 4 \ . \tag{3}$$

Finalement, nous supposons que les interarrivées sont non bornées et leurs distributions sont étendues, c'est à dire

$$\forall x > 0 \quad \mathbb{P}[\tau(1) \geq x] > 0 \ . \tag{4}$$

On suppose aussi pour un certain nombre entier $n > 0$ et une certaine fonction $p(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\displaystyle\int_0^\infty p(x)\,dx > 0$

$$\mathbb{P}\Big[a \leq \sum_{j=1}^{n} \tau(j) \leq b\Big] \geq \int_a^b p(x)\,dx, \quad \text{pour tout } \ 0 \leq a < b \ . \tag{5}$$

Sans perte de généralité, nous supposons que $\mathbb{E}[\tau(1)] = 1$. Pour $i = 1, 2$, la charge du travail pour le serveur i par unité de temps est $\rho_1 = m_1 + m_4$ et $\rho_2 = m_2 + m_3$. Dans tout cet article nous supposons que les conditions (1) sont satisfaites. Nous supposons que la discipline de service dans les deux stations est FIFO.

Dans Dai [4] ou Dumas [6], les auteurs ont présentés un processus stochastique $\{X(t),\, t \geq 0\}$ qui décrit la dynamique du réseau de file d'attente.

Pour chaque $t \geq 0$, $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$, où $X_i(t)$ est l'état à la station i au temps t. Puisque la discipline utilisée est FIFO on a besoin de prendre

$$X_i(t) = \Big(C_t(i,1), ..., C_t(i, N_i(t)), u(t), v_i(t)\Big) \tag{6}$$

où $N_i(t)$ est le nombre de clients à la file i au temps $t \geq 0$ et $C_t(i,l)$ est la classe du l^{eme} client dans la file i au temps t.

Ici $u(t)$ est le temps résiduel pour le prochain client qui arrive de l'exterieur et $v_i(t)$ est le temps résiduel de service pour le client étant entretenu à la station i au temps t (par covention si $N_i(t) = 0,\ v_i(t) = 0$). Dans les présentations (2) et (3) le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov déterministe par morceaux, voir Dai [4]. Comme d'habitude, nous identifions la stabilité de notre réseau par la réccurence positif au sens de Harris de $(X_t)_t \geq 0$. Nous utiliserons la notion de limite fluide présentée par Rybko et Stolyar [8] et Dai [4]. A cet effet, nous avons besoin de quelques notations.

Définition 1. Pour un état initial donné x, et une classe donnée k à la file i:

- $Q_k(x,t)$ est le nombre de clients de la classe k au temps t.
- $A_k(x,t)$ est le nombre d'arrivées de la classe k jusqu'au temps t (par convention: $A_k(x,0) = Q_k(x,0)$).
- $D_k(x,t)$ est le nombre de départs de la classe k jusqu'au temps t (avec $D_k(x,0) = 0$).
- $T_k(x,t)$ est le temps passé par le serveur $\sigma(k)$ pour servir des clients de la classe k jusqu'au temps t.
- $Z_i(x,t)$ est la charge de travail immediate à la file i au temps t. $\square$

Tous ces processus sont pris continus. Nous définissons les processus correspondants de vecteurs $Q,\ A,\ D$ et T qui sont de dimention 4 et $Z = (Z_1, Z_2)$.

2.2. La limite fluide et le modèle fluide

Si x est l'état du réseau nous notons par $|x|$ le nombre total des clients dans le système dans l'état x. Pour toute suite d'états $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $|x_n| > 0,\ \forall n$, et pour tout processus $(H(x_n,t))_{t\geq 0}$, on définit $\overline{H}^n$ par:

$$\forall t \geq 0\,, \qquad \overline{H}^n(t) = \frac{H(x_n, |x_n|t)}{|x_n|}\ .$$

Le théorème suivant dû à Dai [4] definit et caractérise les limites fluides associées au réseau de L.K.B..

Théorème 1 (Dai). *Soit (x_n) une suite d'états initials avec $|x_n| \to +\infty$ alors il existe une sous suite $(x_{\phi(n)})$ telle que:*

$(\overline{Q}^{\phi(n)}, \overline{A}^{\phi(n)}, \overline{D}^{\phi(n)}, \overline{T}^{\phi(n)}, \overline{Z}^{\phi(n)})$ *converge en loi vers la limite* (Q, A, D, T, Z) .

Cette limite satisfait les équations suivantes:

$$Q_k(t) \;=\; Q_k(0) + \mu_{k-1}\, T_{k-1}(t) - \mu_k\, T_k(t) \quad \textit{pour} \;\; k = 1, ..., 4 \tag{7}$$

avec $\mu_k = \dfrac{1}{m_k}$ *pour* $k = 1, ..., 4$, $\mu_0 = 1$ *et* $T_0(t) = t$ *pour* $t \geq 0$,

$$Q_k(t) \geq 0 \quad \textit{pour} \;\; k = 1, ..., 4 \;, \tag{8}$$

$$D_k(t) = \mu_k\, T_k(t) \quad \textit{pour} \;\; k = 1, ..., 4 \;, \tag{9}$$

$$T_k(0) = 0 \;\; \textit{et} \;\; T_k(.) \quad \textit{est croissant pour} \;\; k = 1, ..., 4 \;, \tag{10}$$

$$B_1(t) = T_1(t) + T_4(t) \quad \textit{et} \quad B_2(t) = T_2(t) + T_3(t) \;, \tag{11}$$

$$Y_i(t) = t - B_i(t) \quad \textit{est croissant pour} \;\; i = 1, 2 \;, \tag{12}$$

$$Y_i(t) \;\; \textit{augmente seulement par}\; t \quad \textit{quand} \;\; Z_i(t) = 0, \;\; i = 1, 2 \;, \tag{13}$$

$$Z_1(t) = m_1 Q_1(t) + m_4 Q_4(t) \quad \textit{et} \quad Z_2(t) = m_2 Q_2(t) + m_3 Q_3(t) \;, \tag{14}$$

$$D_k(t + Z_i(t)) = Q_k(0) + A_k(t) \quad \textit{pour} \;\; k = 1, ..., 4, \;\; i = \sigma(k) \;. \tag{15}$$

Définition 2. Toute solution aux équations (7), ..., (15) s'appelle un modèle fluide. Ainsi n'importe qu'elle limite fluide est un modèle fluide. ▫

Pour tout $k = 1, ..., 4$, les fonctions $t \to T_k(t)$ et $t \to t - T_k(t)$ sont croissantes et nous avons: $|T_k(t) - T_k(s)| \leq |t - s|$ pour tout $s, t \geq 0$, donc elles sont absolument continues et par les équations de fluide toutes les fonctions $Q_k(.)$, $B_i(.)$, $Y_i(.)$ et $Z_i(.)$ sont absolument continues.

La condition de conservation du travail (13) est utilisé dans la formule suivante

$$\text{Si} \;\; Z_i(t) > 0 \;\; \text{pour tout} \;\; t \in [a, b]\,, \qquad \text{alors} \;\; Y_i(a) = Y_i(b) \;. \tag{16}$$

L'équation de FIFO (15) est également connue sous la forme équivalente suivante:

$$D_k(t) = Q_k(0) + A_k(\tau_i(t)) \quad \text{pour tout} \;\; t \geq t_i = Z_i(0), \;\; i = \sigma(k) \;, \tag{17}$$

avec $\tau_i(t)$ l'inverse de la fonction $t \to t + Z_i(t)$.

Dans le contexte stochastique, $\tau_i(t)$ est le temps d'arrivée du client actuel en service à la station i, si $Z_i(t) > 0$ et $\tau_i(t) = t$ si $Z_i(t) = 0$.

Dans la proposition suivante on va donner les propriétés de la fonction $\tau_i(t)$, $i = 1, 2$ (pour la preuve et plus de details voir Chen et Zhang [3]).

Proposition 1. *Pour $i = 1, 2$ nous avons:*

(**a**) $Z_i(\tau_i(t)) = t - \tau_i(t)$ *pour* $t \geq Z_i(0)$.

(**b**) $\tau_i(t)$ *est lipschitziènne sur* $[0, \infty[$.

(**c**) $\tau_i(t)$ *est une fonction croissante et* $\tau_i(t) \to +\infty$ *quand* $t \to +\infty$.

2.3. Résultat de stabilité:

Théorème 2. *En plus de (1) si nous avons:*

$$\rho_1 \leq \rho_2 \tag{18}$$

alors tout modèle fluide $Q(.)$ satisfait $\lim_{t\to\infty} |Q(t)| = 0$ et donc le réseau est stable.

3 – Preuve du théorème 2

Soit $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t)$. Ainsi nous avons

$$\lim_{t\to\infty} |Q(t)| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} Z(t) = 0 \;.$$

Nous réecrivons les charges de travail aux deux stations sous une forme commode qui nous permet d'employer la propriété de conservation (16).

En utilisant les équations fluides (7), (9), (14) et l'equation de FIFO (17), la charge de travail dans les deux stations peut s'écrire comme suite:

$$\begin{cases} Z_1(t) \;=\; \Big[m_1[Q_1(0) + A_1(t)] \;+\; m_4[Q_4(0) + A_4(t)]\Big] - \,t + Y_1(t)\,, \\[2ex] Z_2(t) \;=\; \Big[m_2[Q_2(0) + A_2(t)] \;+\; m_3[Q_3(0) + A_3(t)]\Big] - \,t + Y_2(t)\;. \end{cases} \tag{19}$$

Toutes les relations dans la suite ne peuvent se tenir pour aucun $t \geq 0$ mais seulement pour tout $t \geq T_0$ avec T_0 un temps fini à déterminer par les données initiales. Et puisque nous étudions le comportement de $Z(t)$ lorsque $t \to \infty$, nous omettrons d'indiquer la constante T_0.

Le réseau est une ligne de réentrée ainsi nous avons:

$$A_1(t) = t\,, \quad A_2((t) = D_1(t)\,, \quad A_3(t) = D_2(t) \quad \text{et} \quad A_4(t) = D_3(t)\ .$$

L'équation de FIFO (17) donne:

$$A_1(t) = t\ , \tag{20}$$

$$A_2(t) = D_1(t) = Q_1(0) + A_1(\tau_1(t))\ , \tag{21}$$

$$A_3(t) = D_2(t) = Q_2(0) + A_2(\tau_2(t))\ , \tag{22}$$

$$A_4(t) = D_3(t) = Q_3(0) + A_3(\tau_2(t))\ . \tag{23}$$

En remplaçant t par $\tau_1(t)$ dans (20) et par $\tau_2(t)$ dans (21) et (22) (on note $\tau_2(\tau_2(t)) = \tau_2^{(2)}(t))$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &A_1(\tau_1(t)) = \tau_1(t)\ ,\\ &A_2(\tau_2(t)) = Q_1(0) + A_1(\tau_1(\tau_2(t)))\ ,\\ &A_3(\tau_2(t)) = Q_2(0) + A_2(\tau_2(\tau_2(t)))\ , \end{aligned}$$

ainsi $A_1(\tau_1(\tau_2(t))) = \tau_1(\tau_2(t))$ et $A_2(\tau_2^{(2)}(t)) = Q_1(0) + A_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))$, et finalement $A_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) = \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))$.

Récapitulons les équations ci-dessus. Pour tout $t \geq T$ (avec T est un temps fini)

$$\begin{aligned} &A_1(t) = t\ ,\\ &A_2(t) = Q_1(0) + \tau_1(t)\ ,\\ &A_3(t) = Q_1(0) + Q_2(0) + \tau_1(\tau_2(t))\ ,\\ &A_4(t) = Q_1(0) + Q_2(0) + Q_3(0) + \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\ . \end{aligned}$$

La substitution de $A_k(t)$ en (19) rapporte:

$$\begin{cases} Z_1(t)\ =\ c_1 - m_4\Big(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\Big) + (\rho_1 - 1)\,t + Y_1(t)\ ,\\[2ex] Z_2(t)\ =\ c_2 - m_2\Big(t - \tau_1(t)\Big) - m_3\Big(t - \tau_1(\tau_2(t))\Big) - (1-\rho_2)\,t + Y_2(t)\ , \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes ne dépendant pas du temps.

Donc

$$Y_1(t)\ =\ Z_1(t) + m_4\Big(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\Big) - (\rho_1 - 1)t - c_1\ , \tag{24}$$

$$Y_2(t)\ =\ Z_2(t) + m_2\Big(t - \tau_1(t)\Big) + m_3\Big(t - \tau_1(\tau_2(t))\Big) - (\rho_2 - 1)t - c_2\ . \tag{25}$$

En utilisant la propriété (a) de la proposition 1, nous pouvons réecrire (24) sous la forme suivante

$$Y_1(t) \;=\; Z_1(t)+m_4\Big(t-\tau_2+\tau_2(t)-\tau_2^{(2)}(t)\Big)+\tau_2^{(2)}(t)-\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))-(\rho_1-1)\,t-c_1\ .$$

Ainsi

$$Y_1(t) \;=\; Z_1(t)+m_4\Big(Z_2(t)+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))\Big)+Z_1\Big(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\Big)-(\rho_1-1)\,t-c_1 \tag{26}$$

et (25) comme

$$Y_2(t) \;=\; Z_2(t)+m_2(t-\tau_1(t))+m_3\Big(t-\tau_2(t)+(\tau_2(t)-\tau_1(\tau_2(t)))\Big)-(\rho_2-1)\,t-c_2\ ,$$

$$Y_2(t)=Z_2(t)+m_2Z_1(\tau_1(t))+m_3\Big(Z_2(\tau_2(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))\Big)-(\rho_2-1)\,t-c_2\ . \tag{27}$$

Nous allons réduire le problème à l'étude de $Z_1(t)$.

Lemme 1. *Si* $\lim_{t\to+\infty} Z_1(t)=0$ *alors* $\lim_{t\to+\infty} Z(t)=0$.

Preuve: Soit t un temps tel que: $Z_2(t)>0$ et $a=\max\{u<t,\ Z_2(u)=0\}$, alors $Y_2(a)=Y_2(t)$. En utilisant la relation (25) et le fait que $Z_2(t)=0$ nous avons:

$$\begin{aligned}&Z_2(t)+m_2Z_1(\tau_1(t))+m_3\Big(t-\tau_1(\tau_2(t))\Big)-(\rho_2-1)\,t\ -\\ &\qquad -\Big[Z_2(a)+m_2Z_1(\tau_1(a))+m_3\Big(a-\tau_1(\tau_2(a))\Big)-(\rho_2-1)\,a\Big] \;=\; 0\ ,\end{aligned}$$

$Z_2(a)=0$ car $a=\max\{u<t\,Z_2(u)=0\}$ et $\tau_2(a)=a$ car $Z_2(a)=0$, donc

$$\begin{aligned}&Z_2(t)+m_2Z_1(\tau_1(t))+m_3\Big(t-\tau_1(\tau_2(t))\Big)-m_2Z_1(\tau_1(a))-m_3\Big(a-\tau_1(a)\Big) \;=\\ &\qquad = \;(\rho_2-1)\,(t-a)\ ,\end{aligned}$$

$$Z_2(t)+m_2Z_1(\tau_1(t))+m_3\Big(t-\tau_1(\tau_2(t))\Big)-\rho_2Z_1(\tau_1(a)) \;=\; (\rho_2-1)\,(t-a)\ ,$$

comme $\rho_2<1$ nous avons

$$Z_2(t) \;\le\; Z_2(t)+m_2Z_1(\tau_1(t))+m_3\Big(t-\tau_1(\tau_2(t))\Big) \;<\; \rho_2Z_1(\tau_1(a))$$

donc

$$Z_2(t) \;<\; \rho_2 \sup_{\tau_2(a)\le u\le t} Z_1(u)\ . \tag{28}$$

Maintenant, pour prouver la stabilité il suffit de prouver que $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_1(t)=0$.

Pour toute solution fluide $Q(.)$ on a associé une suite croissante de temps t_i, comme dans Bertsimas, Gamarnik et Tsitsiklis [1], qui satisfait:

$$\begin{cases} \text{dans} \quad (t_{4m+1}, t_{4m+2}) & Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) \geq 0 \\ \text{dans} \quad (t_{4m+2}, t_{4m+3}) & Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) > 0 \\ \text{dans} \quad (t_{4m+3}, t_{4m+4}) & Z_1(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) > 0 \\ \text{dans} \quad (t_{4m+4}, t_{4m+5}) & Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) > 0 \end{cases}$$

et par continuité $Z_2(t_{4m+1}) = Z_2(t_{4m+2}) = 0$ et $Z_1(t_{4m+3}) = Z_1(t_{4m+4}) = 0$.

L'existence de la suite t_i est due au fait que sous les conditions nécessaires de stabilité (1), pour $i = 1, 2$ l'ensemble des points t auquels $Z_i(t) = 0$ est illimité.

S'il existe $\delta > 0$ tel que $Z(t) = 0$ pour tout $t \geq \delta$ et pour toute limite fluide $Z(.)$, alors $\lim_{i \to +\infty} t_i \leq \delta$ et le réseau est stable. Sinon, il existe une solution fluide telle que la suite associée t_i satisfait: $\lim_{i \to +\infty} t_i = \infty$ et dans tout le reste de la preuve nous considérons que nous sommes dans le deuxième cas.

Pour terminer la preuve du théorème 2 nous avons besoin des inégalités suivantes:

$$\sup_{[t_{4m+2}, t_{4m+4}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \,, \tag{29}$$

$$\sup_{[t_{4m+4}, t_{4m+5}]} Z_1(t) < m_4 \Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) \Big] \,, \tag{30}$$

$$\sup_{[t_{4m+5}, t_{4(m+1)+2}]} Z_1(t) < m_4 \Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) \Big] \,. \tag{31}$$

Nous allons donner la preuve de la première inégalité (29). La démonstration détaillé de la deuxième (30) ainsi que la troisième inégalité (31) on la donnera à l'appendice.

Preuve de l'inégalité (29): Soit $t \in (t_{4m+2}, t_{4m+5})$ puis $Z_2(t) > 0$ et $Y_2(t) = Y_2(t_{4m+2})$.

En utilisant (25) et le fait que $Z_2(t_{4m+2}) = 0$ nous avons:

$$Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3 \Big(t - \tau_1(\tau_2(t)) \Big) - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) = (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+2})$$

où

$$\begin{aligned} m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3 \Big(t - \tau_1(\tau_2(t)) \Big) &= m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3 \Big(t - \tau_1(t) + \tau_1(t) - \tau_1(\tau_2(t)) \Big) \\ &= \rho_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3 \Big(\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2(t)) \Big) \,, \end{aligned}$$

donc

$$Z_2(t)+\rho_2 Z_1(\tau_1(t))+m_3\Big(\tau_1(t)-\tau_1(\tau_2(t))\Big)-\rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) = (\rho_2-1)\,(t-t_{4m+2})$$

ce qui implique que (quand $\rho_2 < 1$)

$$Z_1(\tau_1(t)) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \quad \text{pour tout} \;\; t \in [t_{4m+2}, t_{4m+5}]$$

mais la fonction $\tau_1(.)$ est continue et strictement croissante de $[t_{4m+2}, t_{4m+5}]$ à $[\tau_1(t_{4m+2}), \tau_1(t_{4m+5})]$. D'où pour tout $t \in [t_{4m+2}, \tau_1(t_{4m+5})]$ nous avons:

$$Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \quad \text{pour tout} \;\; t \in [\tau_1(t_{4m+2}), \tau_1(t_{4m+5})]\ .$$

Par la définition de la suite $\{t_i\}$, en premier lieu nous avons $Z_1(t_{4m+2}) > 0$ ainsi $\tau_1(t_{4m+2}) < t_{4m+2}$ en second lieu nous avons $Z_1(t_{4m+4}) = 0$ ainsi $t_{4m+4} = \tau_1(t_{4m+4}) \leq \tau_1(t_{4m+5})$. ∎

Pour conclure, nous récapitulons tous les résultats.

Nous avons

$$\sup_{[t_{4m+2}, t_{4m+4}]} Z_1(t) \ < \ Z_1(\tau_1(t_{4m+2}))$$

et nous avons

$$\sup_{[t_{4m+4}, t_{4(m+1)+2}]} Z_1(t) \ < \ m_4 Z_1(\tau_1(t_{4m+2}))$$

les deux inégalités impliquent d'une part

$$Z_1(\tau_1(t_{4(m+1)+2})) \ < \ m_4 Z_1(\tau_1(t_{4m+2}))\ . \tag{32}$$

et d'autre part

$$\sup_{[t_{4m+2}, t_{4(m+1)+2}]} Z_1(t) \ < \ Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \tag{33}$$

la dernière inégalité (33) est valable pour tout m, donc nous remplaçons m par $(m+1)$. Nous avons

$$\sup_{[t_{4(m+1)+2}, t_{4(m+2)+2}]} Z_1(t) \ < \ Z_1(\tau_1(t_{4(m+1)+2}))\ .$$

Ainsi, en utilisant (32), nous avons

$$Z_1(t) < m_4 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \quad \text{pour tout} \;\; t \in [t_{4(m+1)+2}, t_{4(m+2)+2}]\ . \tag{34}$$

Maintenant, soit $S_m = t_{4m+2}$. Si $\lim_{i\to+\infty} t_i = \infty$ alors $\lim_{i\to\infty} S_i = \infty$ et l'inégalité (34) implique

$$\text{pour tout } t \in [S_m, S_{m+2}]\,, \qquad Z_1(t) < m_4\Big(\sup_{S_{m-2}\le u\le S_m} Z_1(u)\Big)$$

et par itération comme $m_4 < 1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous terminerons cette section par deux résultats numériques.

On suppose que les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et les temps de services suivent des lois exponentiel de paramètres μ_i.

Dans le tableau suivant nous donnons des exemples en simulation pour illustrer la stabilité du réseau quand la condition (18) du théorème 2 est vérifié.

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	Poucentage.
0.1	0.2	0.3	0.4	50%
0.2	0.6	0.1	0.4	90%
0.3	0.2	0.5	0.1	100%
0.1	0.6	0.2	0.5	99%
0.4	0.2	0.5	0.1	100%

Le cas des moyennes $m_1 = 0.3651$, $m_2 = 0.2032$ $m_3 = 0.5006$ et $m_4 = 0.1027$ le pourcentage est 100% c'est à dire tout les clients sont servis et le réseau se vide (cas de stabilité).

Maintenant, dans le tableau suivant nous donnons des exemples en simulation pour illustrer l'instabilité du réseau quand la conditions (18) du théorème 2 n'est pas vérifié.

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	Poucentage.
0.7	0.6	0.2	0.1	45%
0.7	0.6	0.1	0.2	0%
0.5	0.6	0.2	0.4	14%
0.2	0.5	0.1	0.7	0%
0.6	0.4	0.1	0.2	0%

Le cas des moyennes $m_1 = 0.2032$, $m_2 = 0.5006$, $m_3 = 0.1027$, et $m_4 = 0.7266$ le pourcentage est 0% c'est à dire il y a blokage dans le réseau (cas d'instabilité).

4 – Appendice

La preuve des inégalités (30) et (31) se fait en deux étapes.

Etape 1: Nous montrerons l'inégalité suivante:

$$Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) \;<\; Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \;. \tag{35}$$

Preuve: Par définition, $\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})$ satisfait:

$$(t_{4m+2}) \;<\; \tau_2^{(2)}(t_{4m+4}) \;<\; (t_{4m+5})$$

d'où, en utilisant la propriété de conservation (16) nous explicitons la relation (25) pour $t = t_{4m+2}$ et pour $t = \tau_2^{(2)}(t_{4m+4})$ le fait que

$$Y_2(t_{4m+4}) \;=\; Y_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) \;.$$

Alors

$$\begin{aligned} &Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + \rho_2 Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) \;+ \\ &\qquad + m_3\Big[\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) - \tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{4m+4}))\Big] - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \;= \\ &\qquad = (\rho_2 - 1)\Big(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}) - t_{4m+2}\Big) \;. \end{aligned}$$

La dernière expression peut s'écrire comme suite:

$$\begin{aligned} (\rho_2 - 1)\Big(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}) - t_{4m+2}\Big) \;&= \\ &= (\rho_2 - 1)\Big(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}) - \tau_2(t_{4m+4}) + \tau_2(t_{4m+4}) - t_{4m+2}\Big) \\ &= -(\rho_2 - 1)\Big(\tau_2(t_{4m+4}) - \tau_2^{(2)}(t_{4m+4})\Big) + (\rho_2 - 1)\Big(\tau_2(t_{4m+4}) - t_{4m+2}\Big) \\ &= -(\rho_2 - 1)\, Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + (\rho_2 - 1)\Big(\tau_2(t_{4m+4}) - t_{4m+2}\Big) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\rho_2\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \;+ \\ &\qquad + m_3\Big[\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) - (\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{4m+4})))\Big] \;-\; \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \;= \\ &\qquad = (\rho_2 - 1)\Big(\tau_2(t_{4m+4}) - t_{4m+2}\Big) \end{aligned}$$

donc

$$Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) \;<\; Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \;.$$

Etape 2: Nous donnons La preuve de la deuxième inégalité (30):

1^er cas: Si $\tau_2(t) \le t_{4m+4} \le t$ alors

$$\tau_2^{(2)}(t) \;\le\; \tau_2(t_{4m+4}) \;\le\; \tau_2(t) \;\le\; t_{4m+4} \;\le\; t$$

et

$$t_{4m+4} - \tau_2(t_{4m+4}) \;<\; t - \tau_2^{(2)}(t) \;<\; t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))$$

i.e.

$$Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) \;<\; Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) \;<\; Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))$$

mais t satisfait encore (comme $Y_1(t) = Y_1(t_{4m+4})$)

$$\begin{aligned} &Z_1(t) + m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] \;- \\ &\qquad -\; m_4\Big[Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \;= \\ &\qquad\qquad =\; (\rho_1 - 1)\,(t - t_{4m+4}) \;<\; 0 \end{aligned}$$

d'où nous avons nécessairement

$$Z_1(t) \;<\; m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]\;.$$

2^eme cas: Si $t_{4m+4} < \tau_2(t) < t < t_{4m+5}$, nous avons d'une part:

$$Y_2(\tau_2(t)) \;=\; Y_2(\tau_2(t_{4m+4}))$$

ceci implique

$$\begin{aligned} &Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] \;- \\ &\qquad -\; Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) \;- \\ &\qquad\qquad -\; m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \;= \\ &\;=\; (\rho_2 - 1)\,\Big(\tau_2(t) - \tau_2(t_{4m+4})\Big) \\ &\;=\; (\rho_2 - 1)\,\Big(\tau_2(t) - t + t - t_{4m+4} + t_{4m+4} - \tau_2(t_{4m+4})\Big) \\ &\;=\; -(\rho_2 - 1)\,Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)\,[t - t_{4m+4}] + (\rho_2 - 1)\,Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\rho_2 Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) \;+ \\ &\quad +\; m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - \rho_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) \;- \\ &\quad -\; m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) - m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \;= \\ &\qquad\qquad =\; (\rho_2 - 1)\,(t - t_{4m+4})\;. \end{aligned} \tag{36}$$

Comme $\rho_2 = m_2 + m_3$ la dernière égalité peut s'écrire comme suite:

$$\begin{aligned} m_2 Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] \; - \\ - \; m_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) \\ - \; m_3\Big[Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \; = \\ = \; (\rho_2 - 1)\,(t - t_{4m+4}) \; . \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons: $Y_1(t) = Y_1(t_{4m+4})$ alors la relation (26) nous donne:

$$\begin{aligned} Z_1(t) + m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] \; - \\ - \; m_4\Big[Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \; = \\ = \; (\rho_1 - 1)\,(t - t_{4m+4}) \end{aligned} \tag{37}$$

qui peut s' écrire comme suite:

$$\begin{aligned} Z_1(t) + m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - (\rho_1 - 1)\,(t - t_{4m+4}) \; = \\ = \; m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \end{aligned}$$

d'où si

$$Z_1(t) \; \geq \; m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]$$

alors

$$\begin{aligned} m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - (\rho_1 - 1)\,(t - t_{4m+4}) \; \leq \\ \leq \; m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) \end{aligned}$$

nous utilisons la propriété de la fonction $\tau_i(.)$, pour $i = 1, 2$ nous avons

$$\begin{aligned} \Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] \; &= \; \Big[t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\Big] \\ &> \; \Big[t - \tau_1(\tau_2(t))\Big] \\ &= \; \Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))\Big] \end{aligned}$$

donc

$$(\rho_1 - 1)\,(t - t_{4m+4}) + m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))\Big] \; > \; 0\,. \tag{38}$$

D'une part la relation (36) permet d'écrire que:

$$\begin{aligned} \rho_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - \rho_2\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] \; < \\ < \; (1 - \rho_2)\,(t - t_{4m+4}) - m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) \\ - m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big] \; . \end{aligned} \tag{39}$$

D'autre part la relation (37) se réécrit comme suit:

$$(40)\quad Z_1(t)+m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]+(1-\rho_1)\,(t-t_{4m+4}) \;=\; = \; m_4Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))-m_4\Big[Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]\,.$$

Maintenant on va distinguer deux cas, selon que le terme de droite de l'égalité (40) est positif ou non. Si

$$Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))\;\le\; Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\,.$$

Alors d'après cette même égalité (40) on a forçément (piusque $\rho_1 < 1$)

$$Z_1(t)\;<\;m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]$$

ce qui est le résultat recherché. sinon dans le cas contraire c'est à dire on a

$$Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))\;>\; Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\,.$$

Alors puisque $m_4<\rho_1\le\rho_2$ on a

$$m_4Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))-m_4\Big[Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]\;<\; <\;\rho_2Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))-\rho_2\Big[Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]$$

et en utilisant toujours l'égalité (40) on obtient

$$Z_1(t)-m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]+(1-\rho_1)\,(t-t_{4m+4})\;<\; <\;\rho_2Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))-\rho_2\Big[Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]\,.$$

Ceci implique, d'après (39), que

$$Z_1(t)-m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]+(1-\rho_1)\,(t-t_{4m+4})\;<\; <\;(1-\rho_2)\,(t-t_{4m+4})-m_2Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) -m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]\,.$$

Or $(1-\rho_2)\le(1-\rho_1)$, donc:

$$Z_1(t)-m_4\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]\;<\; <\;-m_2Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4})))-m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))\Big]\;<\;0$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité (30). ∎

Maintenant, nous donnons la preuve de la troisème inégalité (31).

Preuve: $\forall t \in [t_{4m+5}, t_{(4m+1)+2}]$ nous avons:

$$Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) \geq 0 \ .$$

Nous pouvons alors écrire $[t_{4m+5}, t_{(4m+1)+2}] = \bigcup_{i=0}^{i=N} (a_i, a_{i+1})$ tel que à chaque intervalle (a_i, a_{i+1}) nous avons:

$$\forall t \in (a_i, a_{i+1})\,, \quad Z_1(t) > 0 \ \text{ et } \ Z_2(t) > 0$$

ou bien

$$\forall t \in (a_i, a_{i+1})\,, \quad Z_1(t) > 0 \ \text{ et } \ Z_2(t) = 0 \ .$$

Ainsi dans la suite nous distinguons deux cas:

1^er^ cas: Soit $[a,b] \subset (t_{4(m+1)+1}, t_{4(m+1)+2})$ tel que:

$$Z_2(a) = Z_2(b) = 0 \ \text{ et } \ Z_2(t) > 0 \quad \text{pour tout } \ t; \ \ a < t < b \ .$$

Soit $t \in (a,b)$, alors $a < \tau_2(t) < t < b$ et $Y_2(\tau_2(t)) = Y_2(a)$, ainsi en utilisant la relation (27) sur l'intervalle $(a, \tau_2(t))$ nous avons

$$\begin{aligned} Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - \rho_2 Z_1(\tau_1(a)) &= \\ &= (\rho_2 - 1)\,(\tau_2(t) - a)\ , \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} (\rho_2 - 1)\,(\tau_2(t) - a) &= (\rho_2 - 1)\,(\tau_2(t) - t + t - a) \\ &= -(\rho_2 - 1)\, Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)\,(t - a)\ , \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\rho_2 = m_2 + m_3$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3\Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - \\ & \qquad\qquad - (m_2 + m_3)\, Z_1(\tau_1(a)) = \\ & = -(m_2 + m_3 - 1)\, Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)\,(t - a) \\ & \quad m_3\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - m_3 Z_1(\tau_1(a)) \\ & = (\rho_2 - 1)\,(t - a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_2\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))\Big]\ . \end{aligned}$$

Cette dernière relation est une conséquence de la propriété de conservation appliqué à la deuxième station. En utilisant la même propriété pour la deuxième station sous l'intervalle (a,t).

$Y_1(t) = Y_1(a)$ et la relation (26) implique ceci

$$Z_1(t) + m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - Z_1(a) - m_4 Z_1(\tau_1(a)) = \tag{42}$$
$$= (\rho_1 - 1)\,(t-a)$$

(car le fait que $Z_2(a) = Z_2(b) = 0$ entraine que $\tau_2(a) = \tau_2^{(2)}(a) = a$).

Cette egalité implique que

$$Z_1(t) < Z_1(a)$$

autrement dit, la dernière égalité implique d'une part que

$$m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] < m_4 Z_1(\tau_1(a)) \tag{43}$$

autrement dit, la dernière égalité implique d'une part que

$$m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] < m_4 Z_1(\tau_1(a)) \tag{44}$$

d'autre part elle peut s'écrire comme suite:

$$(\rho_1 - 1)\,(t-a) + m_4 Z_1(\tau_1(a)) - m_4\Big[t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\Big] = Z_1(t) - Z_1(a) \geq 0$$

et comme $t - \tau_1(\tau_2(t)) < t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))$ nous avons

$$(\rho_1 - 1)\,(t-a) + m_4 Z_1(\tau_1(a)) - m_4\Big[t - \tau_1(\tau_2(t))\Big] > 0\ .$$

L'égualité (41) peut se réécrire de la façon suivante:

$$m_3\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] - m_3 Z_1(\tau_1(a)) = \tag{45}$$
$$= (\rho_2 - 1)\,(t-a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_2\Big[t - (\tau_1(\tau_2(t)))\Big]\ .$$

Or

$$\Big[t - \tau_1(\tau_2(t))\Big] < \Big[t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\Big]$$

donc

$$\rho_2 Z_1(\tau_1(a)) - \rho_2\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big] < (1-\rho_2)\,[t-a]\,. \tag{46}$$

D'autre part la relation (42) implique que

$$Z_1(t) - Z_1(a) + (1-\rho_1)\,(t-a) = \tag{47}$$
$$= m_4 Z_1(\tau_1(a)) - m_4\Big[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))\Big]\ .$$

En utilisant l'inégalité (46), dont les deux termes sont négatifs, et le fait que $m_4 < \rho_2$ on obtient

$$Z_1(t) - Z_1(a) + (1-\rho_1)\,(t-a) \;<\; (1-\rho_2)\,(t-a)$$

et puisque $(1-\rho_2) \leq (1-\rho_1)$ alors

$$Z_1(t) < Z_1(a)\ .$$

2$^{\text{eme}}$ cas: Soit $[a,b] \subset (t_{4(m+1)+1}, t_{4(m+1)+2})$ tel que $Z_2(.) = 0$.

Comme $Z_2(.)$ est une fonction positive, si elle est différentiable pour $t \in [a,b]$ alors $\dot{Z}_2(t) = 0$

ou bien

$$\begin{array}{lll}
Z_2(t) = m_2Q_2(t) + m_3Q_3(t) & \Longrightarrow & \dot{Z}_2(t) = m_2\dot{Q}_2(t) + m_3\dot{Q}_3(t) = 0 \\
 & \Longrightarrow & \dot{Q}_2(t) = \dot{Q}_3(t) = 0\ , \\
Q_2(t) = Q_2(0) + \mu_1T_1(t) - \mu_2T_2(t) & \Longrightarrow & \dot{Q}_2(t) = \mu_1\dot{T}_1(t) - \mu_2\dot{T}_2(t) = 0 \\
 & \Longrightarrow & \mu_1\dot{T}_1(t) = \mu_2\dot{T}_2(t)\ , \\
Q_3(t) = Q_3(0) + \mu_2T_2(t) - \mu_3T_3(t) & \Longrightarrow & \dot{Q}_3(t) = \mu_2\dot{T}_2(t) - \mu_3\dot{T}_3(t) = 0 \\
 & \Longrightarrow & \mu_2\dot{T}_2(t) = \mu_3\dot{T}_3(t)\ ,
\end{array}$$

ce qui implique

$$\mu_1\dot{T}_1(t) = \mu_2\dot{T}_2(t) = \mu_3\dot{T}_3(t)\ .$$

Ainsi nous avons d'une part:

$$\begin{array}{rcl}
Z_1(t) & = & m_1\Big[Q_1(0) + t - \mu_1T_1(t)\Big] + m_4\Big[Q_4(0) + \mu_3T_3(t) - \mu_4T_4(t)\Big] \\
\Longrightarrow & \dot{Z}_1(t) \;=\; m_1\Big(1 - \mu_1\dot{T}_1(t)\Big) + m_4\Big(\mu_3\dot{T}_3(t) - \mu_4\dot{T}_4(t)\Big) \;=\; 0 & \\
 & = & m_1 - \dot{T}_1(t) + m_4\mu_3\dot{T}_3(t) - \dot{T}_4(t) \\
 & = & m_1 - \dot{T}_1(t) + m_4\mu_1\dot{T}_1(t) - \dot{T}_4(t) \\
 & = & m_1 + m_4\mu_1\dot{T}_1(t) - \Big(\dot{T}_1(t) + \dot{T}_4(t)\Big) \\
 & = & m_1 + m_4\mu_1\dot{T}_1(t) - \dot{B}_1(t)
\end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl}
\dot{Z}_2(t) & = & m_2\Big[\mu_1\dot{T}_1(t) - \mu_2\dot{T}_2(t)\Big] + m_3\Big[\mu_2\dot{T}_2(t) - \mu_3\dot{T}_3(t)\Big] \\
 & = & \rho_2\,\mu_1\dot{T}_1(t) - \dot{B}_2(t) \;=\; 0
\end{array}$$

donc

$$\rho_2\,\mu_1\dot{T}_1(t) = \dot{B}_2(t) < 1\ ,$$

le fait que $m_4 < \rho_2$ on obtient

$$Z_1(t) - Z_1(a) \;=\; \int_a^t \dot{Z}_1(u)\, du \;\leq\; 0 \;.$$

Récapitulons ci-dessus, pour tout $i = 0, ..., N-1$

$$Z_1(t) \leq Z_1(a_i) \quad \text{si} \;\; t \in [a_i, a_{i+1}]$$

ainsi pour tout $t \in [a_0, a_N] = [t_{4m+5}, t_{4(m+1)+2}]$, $Z_1(t) \leq Z_1(a_0) = Z_1(t_{4m+5})$ et par la deuxième inégalité

$$Z_1(t) \;<\; m_4 \Big[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) \Big] \;. \blacksquare$$

REMERCIEMENT – Je remercie le référé anonyme qui m'a permi d'améliorer la présentation de ce travail.

REFERENCES

[1] Bertsimas, D.; Gamarnik, D. and Tsitsiklis, J.N. – Stability conditions for multiclass fluid queueing networks, *IEEE Trans. Automat. Control.,* 41 (1996)-11, 1618–1631.

[2] Bramson, M. – Instability of FIFO queueing networks, *Ann. App. Probab.,* 4 (1994), 414–431.

[3] Chen, H. and Zhang, H. – Stability of multiclass queueing networks under FIFO service discipline, *Math. Oper. Res.,* 22 (1997)-3, 691–725.

[4] Dai, J.G. – On the positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: a unified approach via fluid limit models, *Ann. App. Probab.,* 5 (1995), 49–77.

[5] Dai, J.G. and Weiss, G. – Stability and instability of fluid models for certain reentrant lines, *Math. Oper. Res.,* 21 (1996), 115–134.

[6] Dumas, V. – Diverging paths in FIFO fluid networks, *IEEE Trans. Automat. Control.,* 44 (1999)-1, 191–194.

[7] Lu, S.H. and Kumar, P.R. – Distributed scheduling based on due dates and buffer priorities, *IEEE Trans. Automat. Control,* 36 (1991), 1406–1416.

[8] Rybko, A.N. and Stolyar, A. – Ergodicity of stochastic processes describing the operations of open queueing networks, *Problems Inform. Transmission,* 28 (1992), 199–220.

[9] Whitt, W. – Large fluctuations in a deterministic multiclass network of queues, *Management Sci.,* 39 (1993), 1020–1028.

Faiza Belarbi née Limam,
Laboratoire de Mathématique, B.P. 89, Université Djillali Liabes,
Sidi Bel Abbès 22000 – ALGÉRIE
E-mail: `faiza_belarbi@yahoo.fr`