PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 46 (60), 1989, pp. 214–222

SUR LA CONVERGENCE DES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE AVEC DES SOLUTIONS IRRÉGULIÈRES

Boško Jovanović

Résumé. Dans cet article on considère des schémas aux différences finies pour des équations elliptiques du quatrième ordre dont les solutions appartiennent aux espaces de Sobolev. Les estimations de l'ordre de convergence sont obtenues supposant la régularité minimalle des coefficients.

1. Introduction

La convergence des schémas aux différences finies est analysé habituellement en supposant que la solution du problème considéré est suffisamment régulière. Une technique nouvelle, usant les opérateurs avérage et le lemme de Bramble-Hilbert, a donné la possibilité de construire des schémas convergents pour les problèmes avec des solutions appartenant aux espaces de Sobolev W_p^s. Les schémas aux différences finies pour des équations elliptiques de deuxième ordre avec des coefficients constants ont été considérés dans [**8**] (pour $p = 2$) et [**11**] (pour $p \neq 2$). Les équations avec des coefficients variables sont analysées dans [**6**], [**7**]. Dans [**4**], [**5**] on examine des problèmes du quatrième ordre.

Dans cet article on analyse le convergence des schémas aux différences finies pour des équations linéaires elliptiques du quatrième ordre avec des coefficients variables. On considère le problème avec des conditions naturelles aux limites, et le problème de Dirichlet. Les estimations de l'ordre de la convergence compatibles avec la régularité des donnés sont obtenues. Un problème pareil a été considéré dans [**4**], mais les résultats obtenus là-bas ne sont pas optimals.

AMS Subject Classification (1980): Primary 65 N 10

Rad je finansirala Zajednica nauke SR Srbije

2. Le problème aux limites et le schéma aux différences finies correspondant

Soit $\Omega = (0,1)^2$ le carré unitaire dans $\mathbf{R}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. Nous usons également les désignations suivantes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{-i} &= \{x \in \Gamma : x_i = 0,\, 0 < x_{3-i} < 1\}, \\ \Gamma_{+i} &= \{x \in \Gamma : x_i = 1,\, 0 < x_{3-i} < 1\}, \\ A &= A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}, \\ A_{jk} &= \{(j,k)\} \quad (i = 1,2;\, j,k = 0,1). \end{aligned}$$

Nous considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{gathered} Lu \equiv D_1^2 M_1(u) + 2D_1D_2M_3(u) + D_2^2 M_2(u) = f(x), \quad x \in \Omega \\ M_i(u) = 0,\; D_iM_i(u) + 2D_{3-i}M_3(u) = 0,\; x \in \Gamma_{\pm i},\; i = 1,2 \\ M_3(u) = 0,\; x \in A \\ u(0,0) = c_{00},\; u(0,1) = c_{01},\; u(1,0) = c_{10} \end{gathered} \tag{1}$$

où

$$\begin{gathered} M_1(u) = a_1D_1^2u + a_0D_2^2u, \quad M_2(u) = a_0D_1^2u + a_2D_2^2u, \\ M_3(u) = a_3D_1D_2u \quad \text{et} \quad D_iu = \partial u/\partial x_i. \end{gathered}$$

Nous supposerons que les conditions suivants sont vérifiées;

$$\begin{gathered} a_i \geq c_0 > 0,, \quad i = 1,2,3, \quad a_1a_2 - a_0^2 \geq c_1 > 0, \quad x \in \Omega \\ u \in W_2^s(\Omega), \quad f \in W_2^{s-4}(\Omega), \quad 2 < s \leq 4. \end{gathered} \tag{2}$$

Alors, les coefficients a_i appartiendront à l'espace de multiplicateurs $M\big(W_2^{s-2}(\Omega)\big)$ [**9**]. Les conditions suffisantes sont:

$$a_i \in W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega), \quad i = 0,1,2,3 \tag{3}$$

où

$$\begin{array}{lll} p = 2, & \varepsilon = 0, & \text{pour } 3 < s \leq 4 \\ p > 2, & \varepsilon = 0, & \text{pour } s = 3 \\ p \geq 2/(s-2), & \varepsilon > 0 \text{ — arbitraire}, & \text{pour } 2 < s < 3. \end{array}$$

Dans le domaine $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ nous introduisons un réseau uniforme $\overline{\omega}$ avec le pas $h = 1/N$. Nous usons les désignations suivantes:

$$\begin{gathered} \omega = \overline{\omega} \cap \Omega,\; \gamma = \overline{\omega} \cap \Gamma,\; \gamma_{\pm i} = \gamma \cap \Gamma_{\pm i},\; \overline{\gamma}_{\pm i} = \gamma \cap \overline{\Gamma}_{\pm i}, \\ \gamma^i = \gamma \setminus (\overline{\gamma}_{-i} \cup \gamma_{+i}),\; \omega^i = \omega \cup \gamma_{+i} \quad \text{et} \quad \omega^+ = \omega \cup \gamma_{+1} \cup \gamma_{+2} \cup A_{11} \end{gathered}$$

Nous introduisons aussi des nœuds extérieurs dans $[-2h, 1+2h]^2$.

Pour une fonction discrète nous usons la désignation suivante:

$$v^{\pm i} = v^{\pm i}(x) = v(x \pm hr_i), \quad i = 1, 2,$$

où $r_1 = (1, 0)$ et $r_2 = (0, 1)$.

Les opérateurs des différences finies seront définis de manière habituelle:

$$v_{x_i} = (v^{+i} - v)/h,\ v_{\bar{x}_i} = (v - v^{-i})/h,\ v_{\hat{x}_i} = 0.5(v_{x_i} + v_{\bar{x}_i}), \quad i = 1, 2.$$

Nous introduisons aussi les opérateurs avérage de Steklov:

$$T_i^+ f(x) = \int_0^1 f(x + thr_i)\, dt = T_i^- f(x + hr_i) = T_i f(x + 0.5hr_i).$$

Ces opérateurs commutent et transforment les dérivées en différences finies:

$$T_i^+ D_i f = f_{x_i}, \quad T_i^- D_i f = f_{\bar{x}_i}.$$

Notons que

$$T_i^+ T_i^- f = T_i^2 f = \int_{-1}^1 (1 - |t|) f(x + thr_i)\, dt.$$

Définissons aussi les opérateurs asymétriques:

$$T_{i\pm}^2 f(x) = 2 \int_0^1 (1 - t) f(x \pm thr_i)\, dt, \quad i = 1, 2.$$

Pour l'approximation du problème (1) nous introduisons le schéma aux différences finies suivant:

$$\begin{aligned} &L_h v \equiv m_1(v)_{x_1\bar{x}_1} + 2m_3(v)_{x_1x_2} + m_2(v)_{x_2\bar{x}_2} = Tf, \quad x \in \overline{\omega} \\ &m_i(v) = 0,\ m_i(v)_{\hat{x}_i} + \left[m_3(v) + m_3(v)^{+i}\right]_{x_{3-i}} = 0, \quad x \in \overline{\gamma}_{\pm i} \\ &m_3(v) + m_3(v)^{+1} + m_3(v)^{+2} + m_3(v)^{+1,+2} = 0, \quad x \in A \\ &v(0,0) = c_{00},\ v(0,1) = c_{01},\ v(1,0) = c_{10} \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} &m_1(v) = a_1 v_{x_1\bar{x}_1} + a_0 v_{x_2\bar{x}_2},\ m_2(v) = a_0 v_{x_1\bar{x}_1} + a_2 v_{x_2\bar{x}_2} \\ &m_3(v) = \widetilde{a}_3 v_{\bar{x}_1\bar{x}_2},\ \widetilde{a}_3(x) = a_3(x_1 - 0.5h,\, x_2 - 0.5h) \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$Tf = \begin{cases} T_1^2 T_2^2 f, & x \in \omega \\ T_{1+}^2 T_2^2 f, & x \in \gamma_{-1} \\ T_{1+}^2 T_{2+}^2 f, & x \in A_{00} \\ \text{etc.,} & \end{cases}$$

Définissons les produits scalaires:

$$(v,w) = h^2 \sum_{x\in\omega} vw + 0.5h^2 \sum_{x\in\gamma\setminus A} vw + 0.25h^2 \sum_{x\in A} vw,$$

$$(v,w]_i = h^2 \sum_{x\in\omega^i} vw + 0.5h^2 \sum_{x\in\gamma^i} vw,$$

$$(v,w] = h^2 \sum_{x\in\omega^+} vw$$

et les normes correspondantes:

$$\|v\| = (v,v)^{1/2}, \quad \|v]\!]_i = (v,v]_i^{1/2}, \quad \|v]\!] = (v,v]^{1/2}.$$

Définissons enfin la seminorme:

$$|v|^2_{W_2^2(\omega)} = \|v_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]\!]^2 + \|v_{\bar{x}_2\bar{x}_2}\|^2$$

et la norme:

$$\|v\|^2_{W_2^2(\omega)} = \|v\|^2 + \|v_{\bar{x}_1}]\!]_1^2 + \|v_{\bar{x}_2}]\!]_2^2 + |v|^2_{W_2^2(\omega)}.$$

LEMME 1. *Les normes* $\|v\|_{W_2^2(\omega)}$ *et*

$$\|v\|'_{W_2^2(\omega)} = \left[v^2(0,0) + v^2(0,1) + v^2(1,0) + |v|^2_{W_2^2(\omega)}\right]^{1/2}$$

sont équivalentes.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} v(ih,jh) &= h^3 \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l}^{k-1} v_{x_1\bar{x}_1}(mh,jh) - h^3 \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=k+1}^{N}\sum_{m=k}^{l-1} v_{x_1\bar{x}_1}(mh,jh) \\ &+ h^3 \sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l}^{k-1} v_{x_2\bar{x}_2}(ih,mh) - h^3 \sum_{k=1}^{j}\sum_{l=k+1}^{N}\sum_{m=k}^{l-1} v_{x_2\bar{x}_2}(ih,mh) \\ &- h^2 \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}(kh,lh) + ih^3 \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{j} v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}(kh,lh) + jh^3 \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{N} v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}(kh,lh) \\ &+ v(0,0) + ih[v(1,0)-v(0,0)] + jh[v(0,1)-v(0,0)] \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\bar{x}_1}(ih,jh) = h^2 \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=k}^{i-1} v_{x_1\bar{x}_1}(lh,jh) - h^2 \sum_{k=i+1}^{N}\sum_{l=i}^{k-1} v_{x_1\bar{x}_1}(lh,jh) \\ + h^2 \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{j} v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}(kh,lh) + v(1,0) - v(0,0) \end{aligned}$$

($v_{\bar{x}_2}$ on représente analogiquement) d'où le lemme. (Voir [**2**] pour le cas continuel).
□

Supposons que la solution u et les coefficients a_i du problème (1) sont prolongés preservant la classe dans le domain $(-d, 1+d)^2$, où $d > 2h$. L' erreur $z = u - v$ satisfait aux conditions:

$$
\begin{gathered}
L_h z = \psi, \quad x \in \overline{\omega}, \quad m_i(z) = \eta_i, \quad x \in \gamma_{\pm i} \quad i = 1,2 \\
m_i(z)_{\hat{x}_i} + \left[m_3(z) + m_3(z)^{+i}\right]_{x_{3-i}} = \\
= m_i(u)_{\hat{x}_i} + \left[m_3(u) + m_3(u)^{+i}\right]_{x_{3-i}}, \quad x \in \overline{\gamma}_{\pm i}, \quad i = 1,2 \\
m_3(z) + m_3(z)^{+1} + m_3(z)^{+2} + m_3(z)^{+1,+2} = \\
= m_3(u) + m_3(u)^{+1} + m_3(u)^{+2} + m_3(u)^{+1,+2}, \quad x \in A \\
z(0,0) = z(0,1) = z(1,0) = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

où

$$\eta_i = m_i(u) - T^2_{3-i} M_i(u), \quad i = 1,2, \quad \eta_3 = m_3(u) - T_1^- T_2^- M_3(u)$$

et

$$
\begin{aligned}
\psi &= \eta_{1,x_1\bar{x}_1} + 2\eta_{3,x_1x_2} + \eta_{2,x_2\bar{x}_2}, \quad x \in \omega, \\
\psi &= \left[m_1(u)_{\bar{x}_1} - 2h^{-1} T_2^2 M_1(u)\right]_{x_1} + \\
&\quad + 2\left[m_3(u)_{x_1} - 2h^{-1} T_1^+ T_2^- M_3(u)\right]_{x_2} + \\
&\quad + \left[m_2(u) - T^2_{1+} M_2(u)\right]_{x_2\bar{x}_2}, \quad x \in \gamma_{-1} \\
\psi &= \left[m_1(u)_{\bar{x}_1} - 2h^{-1} T^2_{2+} M_1(u)\right]_{x_1} \\
&\quad + 2\left[m_3(u)_{x_1x_2} - 4h^{-2} T_1^+ T_2^+ M_3(u)\right] \\
&\quad + \left[m_2(u)_{\bar{x}_2} - 2h^{-1} T^2_{1+} M_2(u)\right]_{x_2}, \quad x \in A_{00}
\end{aligned}
$$

etc. Posons aussi:

$$\zeta_i = \begin{cases} T^2_{3-i} M_i(u) - T_{(3-i)\pm} M_i(u), & x \in \overline{\gamma}_{\mp(3-i)} \\ 0, \quad \text{dans les autres nœuds.} \end{cases}$$

En utilisant la sommation partielle, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme 1 on vérifie facilement la proposition suivante:

LEMME 2. *Pour le schéma aux differences finies* (5) *l'estimation a priori*:

$$\|z\|^2_{W_2^2(\omega)} \le C\left(\|\eta_1\|^2 + \|\eta_2\|^2 + \|\eta_3]\|^2 + \|\zeta_1\|^2 + \|\zeta_2\|^2\right) \tag{6}$$

est vérifié.

L'estimation de l'ordre de la convergence

L'estimation de l'ordre de la convergence du schéma (4) se fond sur les deux lemmes suivants. Ils représentent les généralisations du résultat bien connu de Bramble-Hilbert [**1**]

LEMME 3, [**4**]. *Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert avec la frontière continue au sens de Lipschitz et $\varphi(u)$ une fonctionelle linéaire bornée sur $W_p^s(E)$ telle que $\varphi(u) = 0$*

pour les polynomes du degré $\le [s]^-$ ($[s]^-$ — *le plus grand entier* $< s$). *Alors, il existe une constante positive* $C = C(E,s,p)$ *telle que*:

$$|\varphi(u)| \le C|u|_{W_p^s(E)}, \quad \forall u \in W_p^s(E).$$

LEMME 4, ([**2**], [**7**]). *Soient* $E \subset \mathbf{R}^n$ *et* $G \subset \mathbf{R}^m$ *deux ouverts avec des frontières continues au sens de Lipschitz et* $\chi(u,v)$ *une fonctionelle bilinéaire bornée sur* $W_p^s(E) \times W_q^r(G)$ *telle que* $\chi(u,v) = 0$ *si* u *est un polynome du degré* $\le [s]^-$, *ou si* v *est un polynome du degré* $\le [r]^-$. *Alors, il existe une constante positive* $C = C(E,s,p,G,r,q)$ *telle que*:

$$|\chi(u,v)| \le C|u|_{W_p^s(E)}|v|_{W_q^r(G)}, \qquad \forall u \in W_p^s(E), \quad \forall v \in W_q^r(G).$$

THÉORÈME. *Si la solution et les coefficients du problème* (1) *satisfont aux conditions* (2) *et* (3), *alors le schéma aux différences finies* (4) *converge, et l'estimation*

$$\begin{aligned}\|u-v\|_{W_2^2(\omega)} &\le Ch^{\min\{s-2,1.5\}}|\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(s-3.5)|} \\ &\times \max_i \|a_i\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2.5 < s \le 4.\end{aligned} \tag{7}$$

est accomplie.

Démonstration. Pour obtenir l'estimation d'ordre de convergence du notre schéma (4) il faut estimer les termes du côté droit de l'inégalité (6). Présentons d'abord η_1 de la façon suivante: $\eta_1 = \sum_{j=1}^{8} \eta_{1j}$, où:

$$\begin{aligned}\eta_{1k} &= a_{2-k}\left(u_{x_k\bar{x}_k} - T_1^2T_2^2D_k^2u\right), \\ \eta_{1,k+2} &= \left(a_{2-k} - T_1^2T_2^2a_{2-k}\right)(T_1^2T_2^2D_k^2u), \\ \eta_{1,k+4} &= \left(T_1^2T_2^2a_{2-k}\right)\left(T_1^2T_2^2D_k^2u\right) - T_1^2T_2^2\left(a_{2-k}D_k^2u\right), \\ \eta_{1,k+6} &= T_1^2T_2^2\left(a_{2-k}D_k^2u\right) - T_2^2\left(a_{2-k}D_k^2u\right), \quad k = 1,2.\end{aligned}$$

η_2 est représenté analogiquement. Aussi: $\eta_3 = \eta_{31} + \eta_{32}$, où:

$$\eta_{31} = \left(\tilde{a}_3 - T_1^-T_2^-a_3\right)u_{\bar{x}_1\bar{x}_2} \quad \text{et} \quad \eta_{32} = \left(T_1^-T_2^-a_3\right)u_{\bar{x}_1\bar{x}_2} - T_1^-T_2^-\left(a_3D_1D_2u\right).$$

Prenons $e = e(x) = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h)$. Pour $s \ge 2$ la valeur $\eta_{11}(x)$, $x \in \overline{\omega}$, est une fonctionelle linéaire bornée de $u \in W_2^s(e)$:

$$|\eta_{11}| \le C(h)\|a_1\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|_{W_2^s(e)}.$$

En autre, $\eta_{11} = 0$ si u est un polynome du degré ≤ 3. En utilisant le lemme 3 on obtient:

$$|\eta_{11}| \le Ch^{s-3}\|a_1\|_{L_\infty(\Omega)}|u|_{W_2^s(e)} \quad \text{pour } 2 \le s \le 4.$$

D'ici, en utilisant l'inclusion [**12**]:

$$W_p^{s-2+\varepsilon} \subset L_\infty \quad \text{pour } s > 2$$

et la sommation, on obtient:

$$\|\eta_{11}\| \le Ch^{s-2}\|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)}|u|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \le 4. \tag{8}$$

De la même façon on estime η_{12}.

La valeur $\eta_{13}(x)$, $x \in \overline{\omega}$, est une fonctionnelle bilinéaire bornée de $(a_1, u) \in W_p^\lambda(e) \times W_q^2(e)$ où $\lambda p > 2$, $q = \infty$ pour $p = 2$ et $q = 2p/(p-2)$ pour $p > 2$. En outre, $\eta_{13} = 0$ si a_1 est un polynome de degré ≤ 1 ou si u est un polynome de degré ≤ 1. En utilisant le lemme 4 on obtient:

$$|\eta_{13}| \le Ch^{\lambda-1}|a_1|_{W_p^\lambda(e)}|u|_{W_q^2(e)}, \quad 2/p < \lambda \le 2$$

d'où par la sommation:

$$\|\eta_{13}\| \le Ch^\lambda\|a_1\|_{W_p^\lambda(\Omega)}\|u\|_{W_q^2(\Omega)}.$$

En prenant $\lambda = s - 2 + \varepsilon$ et en utilisant les inclusions [**12**]: $W_2^s \subset W_\infty^2$, pour $s > 3$ et $W_2^s \subset W_{2p/(p-2)}^2$, pour $2 < s \le 3$, on obtient:

$$\|\eta_{13}\| \le Ch^{s-2}\|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \le 4. \tag{9}$$

De la même façon on estime η_{14} et η_{31}.

Pour $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 2$ et $q > 2$ la valeur $\eta_{15}(x)$, $x \in \overline{\omega}$, représente une fonctionnelle bilinéaire bornée de $(a_1, u) \in W_q^\lambda(e) \times W_{2q/(q-2)}^\mu(e)$. En plus, $\eta_{15} = 0$ si $a_1 = \text{const}$, ou si u est un polynome du degré ≤ 2. En utilisant le lemme 4 on obtient:

$$\|\eta_{15}\| \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a_1\|_{W_q^\lambda(\Omega)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^\mu(\Omega)},$$

où $0 \le \lambda \le 1$ et $2 \le \mu \le 3$. Prenons $\lambda + \mu = s$. Pour $\lambda + \mu > 3$ on peut choisir $q = q(\lambda, \mu)$ tel que $\lambda \ge 2/q \ge 3 - \mu$. Alors, on a:

$$W_p^{s-2+\varepsilon} = W_2^{\lambda+\mu-2} \subset W_q^\lambda \quad \text{et} \quad W_2^s = W_2^{\lambda+\mu} \subset W_{2q/(q-2)}^\mu.$$

Analogiquement, pour $2 < \lambda + \mu \le 3$ on peut choisir q telle que $\lambda \ge 2/q \ge 2/p - (\mu - 2)$. Dans ce cas on a:

$$W_p^{s-2+\varepsilon} = W_2^{\lambda+\mu-2+\varepsilon} \subset W_q^\lambda \quad \text{et} \quad W_2^s = W_2^{\lambda+\mu} \subset W_{2q/(q-2)}^\mu.$$

En utilisant ces inclusions on obtient:

$$\|\eta_{15}\| \le Ch^{s-2}\|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \le 4. \tag{10}$$

De la même manière on estime η_{16} et η_{32}.

Pour $\lambda > 0.5$ la valeur $\eta_{17}(x)$, $x \in \overline{\omega}$, set une fonctionelle linéare bornée de $a_1 D_1^2 u \in W_2^\lambda(e)$, qui s'annule sur les polynomes du degré ≤ 1. D'après le lemme 3 on obtient:

$$\|\eta_{17}\| \le Ch^\lambda|a_1 D_1^2 u|_{W_2^\lambda(\Omega)}, \quad 0.5 < \lambda \le 2.$$

Utilisant l'inégalité évidente:

$$|a_1 D_1^2 u|_{W_2^\lambda(\Omega)} \le C \|a_1\|_{W_p^{\lambda+\varepsilon}(\Omega)} \|D_1^2 u\|_{W_2^\lambda(\Omega)}, \tag{11}$$

on obtient, en prenant $\lambda = s-2$:

$$\|\eta_{17}\| \le C h^{s-2} \|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2.5 < s \le 4. \tag{12}$$

De la même façon on estime η_{18}.

Pour $\lambda > 0.5$, la valeur $\zeta_i(x)$, $x \in \overline{\omega}$, est une fonctionelle linéaire bornée de $M_i(u) \in W_2^\lambda(e)$, qui s'annule sur les constantes. En utilisant le lemme 3 on obtient:

$$\|\zeta_i\| \le C h^\lambda \Big(|M_i(u)|_{W_2^\lambda(\Omega_{i-})} + |M_i(u)|_{W_2^\lambda(\Omega_{i+})} \Big), \quad 0.5 < \lambda \le 1$$

où $\Omega_{i-} = \{x : -h < x_i < 1+h,\ -h < x_{3-i} < h\}$ et $\Omega_{i+} = \{x : -h < x_i < 1+h,\ 1-h < x_{3-i} < 1+h\}$. En utilisant l'inégalité [10]:

$$\|g\|_{L_2(\Omega_{i\pm})} \le C h^{\min\{\mu, 0.5\}} |\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(\mu-0.5)|} \|g\|_{W_2^\mu(\Omega)}, \quad 0 < \mu \le 1 \tag{13}$$

et (11) on obtient:

$$\begin{aligned} \|\zeta_i\| \le C h^{\min\{s-2, 1.5\}} &|\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(s-3.5)|} \\ &\times \max_j \|a_j\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2.5 < s \le 4. \end{aligned} \tag{14}$$

Finalement, de (8–11) et (6) on obtient l'estimation demandée (7). □

Remarque. On peut obtenir des estimations pareilles dans d'autres normes de Sobolev discrètes. Pour l'équation biharmonique des estimations semblables sont obtenues dans [**5**].

4. Problème de Dirichlet

Considérons, finalement, le problème de Dirichlet pour notre équation:

$$\begin{gathered} Lu = f, \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \Gamma; \qquad D_i u = 0, \quad x \in \Gamma_{\pm i}, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{15}$$

En retenant la notation précédente substituons le problème (15) par le problème discret:

$$\begin{gathered} L_h v = T_1^2 T_2^2 f, \quad x \in \omega \\ v = 0, \quad x \in \gamma; \qquad v_{\hat{x}_i} = 0, \quad x \in \gamma_{\pm i}, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{16}$$

Dans ce cas, l'erreur $z = u - v$ satisfait aux conditions:

$$\begin{gathered} L_h z = \eta_{1,x_1\bar{x}_1} + 2\eta_{3,x_1x_2} + \eta_{2,x_2\bar{x}_2}, \quad x \in \omega, \\ z = 0, \quad x \in \gamma; \qquad z_{\hat{x}_i} = h\xi_i, \quad x \in \gamma_{\pm i}, \quad i = 1,2. \\ \text{où} \quad \xi_i = \begin{cases} (u_{\hat{x}_i} - D_i u)/h, & x \in \gamma_{\pm i} \\ 0, & \text{dans les autres nœudes.} \end{cases} \end{gathered}$$

L'estimation a priori:

$$\|z\|^2_{W_2^2(\omega)} \leq C \left(\|\eta_1\|^2 + \|\eta_2\|^2 + \|\eta_3]]^2 + \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2\right) \tag{17}$$

est accomplie.

La valeur $\xi_i(x)$, $x \in \overline{\omega}$, est une fonctionelle linéaire bornée de $u \in W_2^\lambda(e)$, $\lambda > 2$, qui s'annule sur les polynomes du degrée ≤ 2. En utilisant le lemme 3 et l'inégalité (13) on obtient:

$$\|\xi_i\| \leq Ch^{\min\{s-2,1.5\}} |\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(s-3.5)|} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \leq 4. \tag{18}$$

Utilisant (17), (18) et les estimations précédentes pour η_1, η_2 et η_3 nous pouvons conclure que le schéma aux différences finies (16) converge, en accord avec l'estimation (7).

RÉFÉRENCES

[1] J. H. Bramble, S. R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation*, Numer. Math. **16** (1971), 362–369.

[2] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34** (1980), 441–463.

[4] I. P. Gavriljuk, V. G. Prikazchikov, A. N. Himich, *L'erreur du schéma aux diférences finies pour un problème elliptique du quatrième ordre avec des conditions mixtes aux limites*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **26** (1986), 1821–1830 (Russe).

[5] L. D. Ivanović, B. S. Jovanović, E. E. Süli, *La convergence des schémas aux différences finies pour l'équation biharmonique*, Zh. Vychsl. Mat. Mat. Fiz. **26** (1986), 776–780 (Russe).

[6] B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, E. E. Süli, *Convergence of a finite difference scheme for second order hypebolic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. **7** (1987), 39–45.

[7] B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, E. E. Süli, *Convergence of finite difference schemes for elliptic equations with variable coeficients*, IMA J. Numer. Anal. **7** (1987), 301–305.

[8] R. D. Lazarov, V. L. Makarov, W. Weinelt, *On the convergence of difference schemes for the approximation of the solutions $u \in W_2^m$ $(m > 0.5)$ of elliptic equations with mixed derivatives*, Numer. Math. **44** (1984), 223–232.

[9] V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of Multipliers in Spaces of Differentiable Functions*, Monographs and Studies in Mathematic **23**, Pitman, Boston, Massachusetts, 1985.

[10] L. A. Oganesyan, L. A. Ruhovec, *Méthodes variationelles des différences finies pour la solution des équations elliptiques*, Ed. Acad. Sci. Arm. SSR, Erevan, 1979 (Russe).

[11] E. E. Süli, B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, *Finite difference approximations of generalized solutions*, Math. Comput. **45** (1985), 319–327.

[12] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

Matematički fakultet
11000 Beograd
Yougoslavie

(Reçu le 06 10 1988)