PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 35 (49), 1984, pp. 68–74

COMPLÉMENTS AUX TRAITÉS DE KAMKE ET DE MURPHY VII. UNE MÉTHODE DE L'OBTENTION DES CLASSES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLELE LINÉAIRE ET HOMOGÈNE DU SECOND ORDRE ÈFFECTIVEMENT INTEGRABLES

Andrzej Kapcia

Résumé. On donne une méthode de l'obtention des classes de l'équation différent'elle (0.1) effectivement intégrables. Les classes obtenues dépendent de deux coefficients arbitraires et du troisième exprimé par ceux-ci et par une fonction arbitraire. On cite six conditions suffisantes de l'intégrabilité effective de ladite équation, ainsi que huit classes de cette équation qui sont effectivement intégrables d'après la connaissance de leurs solutions particulières.

0. Introduction

Dans le travail [**5**], nous avons donné une méthode de l'obtention des classes de l'équation de Riccati effectivement intégrables en profitant de la possibilité de construction leurs solutions particulières (v. [**5**, p. 120]). Dans cette note-ci nous l'appliquons directement à l'équation

$$f(x)u'' + g(x)u' + h(x)u = 0, \tag{0.1}$$

où $f, g, h \in C'_X$, $X \equiv (x_1, x_2)$ et $f \neq 0$. Remarquons que la connaissance d'une solution particulière de l'équation (0.1) donne la possibilité de la résoudre effectivement. On sait bien, d'après le théorème de Liouville que: si la solution uo de l'équation (0.1) est connue, alors on obtient effectivement sa deuxième solution linéairement indépendante (v. p. ex. [**7**, p. 394] ou [**8**, p. 41]). On forme la solution générale de l'équation (0.1) d'une manière bien connue.

Remarquons encore que le problème de chercher des solutions particulières de l'équation (0.1) à coefficients variables joue un rôle important dans la théorie de cette équation. En ce moment on ne connaît aucune méthode permettant de trouver une solution particulière. C'est pourquoi nous voudrons construire les classes

AMS Subject Classification (1980): Primary 34A05, Secondary 34A30

d'équation (0.1) – possiblement générales, pour lesquelles une solution particulière est connue.

1. Méthode de l'obtention des classes de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre effectivement intégrables

Considérons l'équation (0.1). On peut la présenter en formes suivantes:

$$f(x)u'' = -g(x)u' - h(x)u, \tag{1.1}$$

$$g(x)u' = -f(x)u'' - h(x)u, \tag{1.2}$$

$$h(x)u = -f(x)u'' - g(x)u'. \tag{1.3}$$

Introduisons les substitutions suivantes:

$$f(x)u'' = \beta_1(x) \text{ et } -g(x)u' - h(x)u = \beta_1(x), \tag{1.4}$$

$$g(x)u' = \beta_2(x) \text{ et } -f(x)u'' - h(x)u = \beta_2(x), \tag{1.5}$$

$$h(x)u = \beta_3(x) \text{ et } -f(x)u'' - h(x)u' = \beta_3(x). \tag{1.6}$$

Remarquons que, si la solution u est connue, alors la fonction β_i pour $i = 1, 2, 3$ est connue; si u est inconnue, alors les fonctions β_i sont inconnues.

Notre méthode consiste à la résolution succéssivement des systémes d'équations (1.4)–(1.6) par rapport à la fonction u, à la recherche des conditions liant les coefficients f, g, et h avec la fonction β_i;, et enfin à la construction des classes d'équations dont les solutions particulières sont déterminées par les résolutions des équations (1.4)–(1.6).

On voit qu'on peut toujours résoudre effectivemert cinq d'entre six équations (1.4)–(1.6), si β_i est une fonction donnée (i – fixé), mais on ne peut pas résoudre généralement la seconde équation différentielle des équations (1.5), à l'exception des cas particuliers. Malgré cela, en profitant de notre méthode, on peut obtenir six conditions nécessaire et suffisantes de l'intégrabilité effective – très générales – de l'équation linéaire (0.1). De ces conditions on peut obtenir huit classes d'équations du type (0.1) effectivement intégrables.

Introduisons les opérateurs suivants:

$$\mathcal{L}_1(u) \equiv f(x)u'', \tag{1.7}$$

$$\mathcal{L}_2(u) \equiv -g(x)u' - h(x)u; \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}_3(u) \equiv g(x)u', \tag{1.9}$$

$$\mathcal{L}_4(u) \equiv -f(x)u'' - h(x)u; \tag{1.10}$$

$$\mathcal{L}_5(u) \equiv h(x)u, \tag{1.11}$$

$$\mathcal{L}_6(u) \equiv -f(x)u'' - g(x)u'. \tag{1.12}$$

On voit que l'équation (0.1), d'après les équations (1.1)–(1.3) et les opérateurs (1.7)–(1.12), peut être écrite en cette forme:

$$\mathcal{L}_{2k-1}(u) = \mathcal{L}_{2k}(u), \tag{1.13}$$

si $k = 1, 2, 3$ et $x \in X$.

En profitant des fonctions obtenues par la méthode décrite ci-dessus, nous allons formuler des théorèmes en forme des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles soient des solutions de l'équation (0.1).

2. Cas $f(x)u'' = \beta_1(x)$ et $-g(x)u' - h(x)u = \beta_1(x)$

THÉORÈME 2.1. *Soient les fonctions f, g, h et* $\beta_1 \in C_X$ *et* $f \neq 0$ *dans X. La condition nécessaire et suffisante pour que la classc de fonctions*

$$u_0 = \iint \beta_1(x)/f(x)dxdx + C_1x + C_2, \tag{2.1}$$

où C_1 *et* C_2 *- Ctes réelles arbit., soit une solution particuliére de l'éguation* (0.1) *dans X, est gue les fonctions f, g, h et* β, *satisfassent à la condition*

$$\beta_1(x) + g(x)\left[\int \beta_1(x)/f(x)dx + C_1\right] + h(x)\left[\iint \beta_1(x)/f(x)dxdx + C1x + C2\right] = 0 \tag{2.2}$$

dans l'intervalle X.

THÉORÈME 2.2. *Soient les fonctions* $f \in C_X$, *g, h et* $\beta_1 \in C^1_X$, $f \neq 0$ *et* $g \neq 0$ *dans X. La condition nécessaire et suffisante pour gue la classe de fonctions*

$$u_0 = \left(C - \int (\beta_1(x)/g(x)) \exp\left(\int h(x)/g(x)dx\right) dx\right) \cdot \exp\left(-\int h(x)/g(x)dx\right), \tag{2.3}$$

où C – Cte réelle arbit., soit une solution particulière de l'éguation (0.1) *dans X, est gue les fonctions f, g, h et* β_1 *sutisfassent à la condition*

$$\begin{gathered}[g^2(x)/f(x) - (g'(x) + h(x))]\beta_1(x) \\ +g(x)\beta_1'(x) - (g'(x)h(x) - g(x)h'(x) + h^2(x)) \\ \left[\left(C - \int (\beta_1(x)/g(x)) \exp\left(\int h(x)/g(x)dx\right) dx\right) \exp\left(-\int h(x)/g(x)dx\right)\right] = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

dans l'interualle X.

Démonstration. (La construction générale des démonstrations des théorèmes: 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1 et 4.2.).

Dans le but de démontrer les théorèmes 2.1,..., 4.2, il faut appliquer chaque fois la procédure suivante: pour démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2, on doit prendre l'équation (0.1) en forme (1.13), où $k = 1$ et les opérateurs $\mathcal{L}_{2k-1}(u)$ et $\mathcal{L}_{2k}(u)$ pour $k = 1$ (v. (1.7) et (1.8)) etc. Pour k fixé ($k = 1, 2, 3$) et la fonction correspondante u_0

(pour $k = 1$ les fonctions u_0 succéssivement (2.1) et (2.3)) chaque démonstration se fait en deux pas. Necessité: en posant la fonction convenable dans $\mathcal{L}_{2k-1}(u)$ et $\mathcal{L}_{2k}(u)$ nous obtenons $\mathcal{L}_{2k-1}(u_0)$ et $\mathcal{L}_{2k}(u_0)$. Comme d'hypothèse u_0 est la solution particulère de l'équation (0.1) et en conséquence de l'équation (1.13), alors nous avons l'identité (1.13) pour $x \in X$ et k – fixé. De là résulte la condition convenable. *Suffisance*: si la condition convenable est satisfaite, alors en posant la fonction correspondante dans les opérateurs $\mathcal{L}_{2k-1}(u)$ et $\mathcal{L}_{2k}(u)$ nous obtenons $\mathcal{L}_{2k-1}(uo)$ et $\mathcal{L}_{2k}(uo)$. En appliquant maintenant la condition convenable (p. ex. pour $k = 2$ et u_0 en forme (3.1) la condition (3.2)), on obtient: $\mathcal{L}_{2k-1}(u_0) = \beta_k$ et $\mathcal{L}_{2k}(uo) = \beta_k$. Cela entraîne l'identité (1.13) pour k - fixé, $x \in X$ et u_0 convenable. Il en résulte la deuxième partie de la thèse. De plus, dans chaque cas il faut profiter des hypothèses correspondant à la thèse démontr'ee.

Corollaire 2.1. *Si les hypothèses des théorèmes* 2.1 *et* 2.2 *sont satisfaites respectivement, et de plus, les hypothèses suivantes:* $\beta_1 \not\equiv 0$, $\beta_1^2+C_1^2) > 0$, $\beta_1^2+C_1^2+C_2^2 > 0$ *sont satisfaites succéssivement, et les dénominateurs des coefficients des classes citées ci-dessous ne possèdent pas de points isolés de zéro dans l'intervalle* X*, alors les sous-classes de l'éguation* (0.1) *en forme:*

$$\frac{g^2(x)\beta_1(x)}{(g'(x)+h(x)\beta_1(x)-g(x)\beta_1'(x)+(g'(x)h(x)-g(x)h'(x)+h^2(x))v}u''+ \\ +g(x)u'+h(x)u=0, \tag{2.5}$$

où $v \equiv \left(C - \int (\beta_1(x)/g(x)) \exp\left(\int h(x)/g(x)dx\right) dx\right) \exp\left(-\int h(x)/g(x)dx\right)$,

$$f(x)u'' - \frac{\beta_1(x)+h(x)u_0}{u_0'}u' + h(x)u = 0, \tag{2.6}$$

$$f(x)u'' + g(x)u' - \frac{\beta_1(x)+g(x)u_0'}{u_0}u = 0, \tag{2.7}$$

où u_0 *a la forme* (2.1)*, sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulières ont respectivement les formes: dans le cas* (2.5) *la forme* (2.3)*, et dans les cas* (2.6) *et* (2.7) *la forme* (2.1)*.*

3. Cas $g(x)u' = \beta_2(x)$ et $-f(x)u'' - h(x)u = \beta_2(x)$

Théorème 3.1. *Soient les fonctions* f *et* $h \in C_X$, g *et* $\beta_2 \in C_X^1$ *et* $g \neq 0$ *dans* X*. Le condition nécessaire et suffisante pour gue la classe de fonctions*

$$u_0 = \int \beta_2(x)/g(x)dx + C, \tag{3.1}$$

où C *– Cte réelle arbit., soit une solution pctrticulière de l'éguation* (0.1) *dans* X*, est gue les fonctions* f*,* g*,* h *et* β_2 *satisfassent à la condition*

$$\beta_2(x) + f(x)[\beta_2(x)/g(x)]'_x + h(x)\left[\int \beta_2(x)/g(x)dx + C\right] = 0 \tag{3.2}$$

dans l'intervalle X.

THÉORÈME 3.2. *Soient les fonctions f, g, h et* $\beta_2 \in C_X$, $f \neq 0$ *et* $g \neq 0$ *dans X. La condition nécessaire et suffisante pour que la classe de fonctions*

$$u_0 = -\iint \frac{h(x)}{f(x)} \left(\int \frac{\beta_2(x)}{g(x)} dx + C \right) dx dx - \iint \frac{\beta_2(x)}{f(x)} dx dx + C_1 x + C_2, \tag{3.3}$$

où C, C_1 *et* C_2 *- Ctes réelles arbit., soit une solution particulière de l'éyuation* (0.1) *dans X, est gue les fonctions f, g, h et* β_2 *satisfassent à la condition*

$$\begin{aligned} &\int \frac{\beta_2(x)}{g(x)} dx + C + \iint \frac{\beta_2(x)}{f(x)} dx dx + \\ &+ \iint \frac{h(x)}{f(x)} \left(\int \frac{\beta_2(x)}{g(x)} dx + C \right) dx dx - C_1 x - C_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dans l'intervalle X.

Remarquons qu'on ne peut pas résoudre l'identité (3.4) par rapport aux fonctions f, g et h. Il s'ensuit qu'on ne peut pas déterminer dans ce cas les coefficients de l'équation (0.1).

COROLLAIRE 3.1. *Si les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, et de plus les hypothèses:* $\beta_2/g \neq$ *const.*, $\left(\int \beta_2/g dx\right)^2 + C^2 > 0$ *sont satisfaites respectivement, et les dénominateurs des coefficients des classes citées ci-dessous ne possèdent pas de points isolés de zéro dans X, alors les sous-classes de la classe de l'éguation* (0.1) *en forme*

$$\frac{-\beta_2(x) - h(x) u_0}{u_0''} u'' + g(x) u' + h(x) u = 0, \tag{3.5}$$

$$f(x) u'' + g(x) u' - \frac{\beta_2(x) + f(x) u_0''}{u_0} u = 0, \tag{3.6}$$

où uo a la forme (3.1), *sont effectivement intégrables. Leur solution particulière a la forme* (3.1).

4. Cas $h(x)u = \beta_3(x)$ et $-f(x)u'' - g(x)u' = \beta_3(x)$

THÉORÈME 4.1. *Soient les fonctions f, g, h et* $\beta_3 \in C_X$, $f \neq 0$ *dans X. La condition nécessaire et suffisante pour que la classe de fonctions*

$$u_0 = \int \exp\left(-\int \frac{g(x)}{f(x)} dx \right) \left(C_1 - \int \frac{\beta_3(x)}{f(x)} \exp\left(\int \frac{g(x)}{f(x)} dx \right) dx \right) dx + C_2 \tag{4.1}$$

où C_1, C_2 *- Ctes réelles arbit, soit une solution particulière de l'éguation* (0.1) *dans X, est que les fonctions f, g, h et* β_3 *satisfassent à la condition*

$$\begin{aligned} &\beta_3(x) - h(x) \Bigg[\int \exp\left(-\int \frac{g(x)}{f(x)} dx \right) \\ &\left(C_1 - \int \frac{\beta_3(x)}{f(x)} \exp\left(\int \frac{g(x)}{f(x)} dx \right) dx \right) dx + C_2 \Bigg] = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dans l'interrale X.

THÉORÈME 4.2. *Soient les fonctions* $f, g \in C_X$ *et* $h, \beta_3 \in C_X^2$, $h \neq 0$ *dans X. La condition nécessaire et suffisante pour que la classe de fonctions*

$$u_0 = \beta_3(x)/h(x) \tag{4.3}$$

soit une solution particulière de l'équution (0.1), *est que les fonctions f, g, h et* β_3 *satisfassent à la condition*

$$f(x)[\beta_3(x)/h(x)]''_{xx} + g(x)[\beta_3(x)/h(x)]'_x + \beta_3(x) = 0 \tag{4.4}$$

dans l'intervalle X.

COROLLAIRE 4.1. *Si les hypothèses des théorèmes 4.1 et 4.2 sont satisfaites respectivement, et de plus les hypothèses suivantes:* $\beta_3/h \neq K_1x + K_2$, $\beta_3/h \neq K_1$, $C_1^2 + C_2^2 + \beta_3^2 > 0$ *sont satisfaites succéssivement, et les dénominateurs des coefficients des classes citées ci-dessous ne possèdent pas de points isolés de zéro dans X, alors les sous-classes de l'éguation* (0.1) *en forme:*

$$\frac{-\beta_3(x) - g(x)u_0'}{u_0''}u'' + g(x)u' + h(x)u = 0, \tag{4.5}$$

$$f(x)u'' - \frac{\beta_3(x) + f(x)u_0''}{u_0'}u' + h(x)u = 0, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &f(x)u'' + g(x)u' + \\ &+ \beta_3(x)\left\{\int v^{-1}\left(C_1 - \int \beta_3(x)/f(x)v dx\right)dx + C_2\right\}^{-1} u = 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

où u_0 *a la forme* (4.3) *et* $v \equiv \exp\left(\int g(x)/f(x)dx\right\}$, *sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulières ont respectivement les formes: dans les cas* (4.5) *et* (4.6) *la forme* (4.3), *et dans le cas* (4.7) *la forme* (4.1).

Nous remarquons encore que pour $g(x) = 0$ et $h(x) = 1$ dans X, on obtient de (4.5) l'équation $\beta_3(x)u'' - \beta_3(x)u = 0$, citée dans [**10**, p. 74] (v. [**4**, p. 659]).

5. Remarques finales

Les conditions obtenues sont des généralisations de certaines conditions données avant, et les classes introduites comprennent tous les cas particuliers donnés dans les traités de Kamke [**3**] ou [**4**] et Murphy [**9**] et dans d'autres travaux, qu'on peut résoudre d'après la connaissance de leurs solutions particulières. Pour les classes d'équations en forme (0.1) de [**1**], [**2**] et [**10**], on peut très facilement déterminer les fonctions β_i, et obtenir – de nos classes – les équations citées en ces travaux ou leurs généralisations. La méthode présentée peut être appliquée aux autres équations différentielles pour lesquelles la connaissance des solutions particulières possède la signification essentielle. Nous l'avons appliquée déj'a à l'équation de Riccati dans les travaux [**5**] et [**6**]. Elle peut être aussi généralisée et appliquée dans certains cas aux équations linéaires d'ordre supérieur.

LITTÉRATURE

[1] Л.М. Беркович, Н.Х. Розов, А.М. Эйшинский, *О самосопряженных и приводимых линейных дифференциальных уравнениях высших порядков и о некоторых уравнениях второго порядка, интегрируемых в конечном виде*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No **230 - 241** (1968), 61–87,

[2] A.M. Eĭšinskiĭ, J.D. Kečkić, *Some additions to Kamke's treatise*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No **330 - 337** (1970), 39–43.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig, 1959.

[4] Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва, 1965.

[5] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy III. Quelques critères suffisants de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati avec deux coefficients arbitraires*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **22** (**36**) (1977), 119–126.

[6] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy V. Quelques classes de l'équation de Riccati effectivement l'intégrables avec deux coefficients arbitraires et le trosième dependant de ces deux et d'une fonction arbitraire*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **26** (**40**) (1979), 113–129.

[7] N.M. Matwiejew, *Metody calkowania ròwnań ròzniczkowych zwyczajnych*, Warszawa,1970.

[8] D.S. Mitrinović, *Predavanja o diferencijalnim jednačinama*, Univ. Beograd, Subotica – Beograd, 1976.

[9] G.M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Princeton, New Jersey, New York, 1960.

[10] J. Zbornik, *Zur Auflösung linearer homogener Differentialgleichung 2 Ordnung*, Zeitschr. Angew. Math. Physik **7** (1956), 64–74.

Institut Mathématique
L'École Polytechnique, 42–201
42-201 Częstochowa, Pologne

(Reçu le 27 11 1980)
(Version abrégée reçue le 15 12 1983)