PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 33 (47), 1983, pp. 97–101

TECHNOLOGIES HOMOGÈNES ET CÔNES LOCALEMENT COMPACTS

G. Isac

1. Le problème de l'existence des couples proportionnels pour les technologies homogènes a été imposé par l'étude de l'accumulation du capital, de l'efficience de l'allocation des ressources et par l'étude de la ration d'intérêt [**4**], [**1**].

Premièrement, ce problème a été étudié comme un problème d'existence des valeurs propres pour les processus convexes $[1, a]$, mais la démonstration proposée a certaines inexactitudes.

Dans l'ouvrage $[1, b]$, D. Gale et R. Rockwell ont proposé une autre démonstration correcte dans les espaces de dimension finie.

On démontre directement l'existence des couples proportionnels pour les technologies homogènes.

Dans cette note, on donne une démonstration de l'existence des couples proportionnels pour une technologie homogène dans les espaces localement convexes. C'est le cas des models continus.

L'existence des couples proportionnels est une conséquence de l'hypothèse que certains cônes sont supposés localement compacts.

2. Soit (E, τ) un espace localement convexe. Un ensemble $K \subset E$ est un cône convexe si:

i) $K + K \subset K$;   ii) $(\forall \lambda \in R_+)$ $(\lambda K \subset K)$.

L'ensemble B est une base pour le cône K si:

b_1) B est convexe

b_2) $(\forall x \in K \setminus / \{0\})$ $(\exists R \setminus \{0\}$, unique$)$ $(\exists b \in B$, unique$)$ $(x = \lambda \cdot b)$.

On dit que l'ensemble convexe $B_1 \subset E$ *engendre* le cône K si:

$$K = \bigcup_{\lambda \in R_+} \lambda \cdot B_1.$$

Le cône convexe $K \subset E$ s'appelle bien basé s'il est engendré par un ensemble convexe et borné A tel que $0 \notin \overline{A}$.

Proposition 1. *Le cône convexe et forme $K \subset E$ est bien basé si et seulement si, il existe une fonctionnelle linéaire et continue f telle gue:*

$$(*) \qquad (\forall \| \|_p, \text{ semi-norme continue})\,(\exists \gamma_p \in R_+ \setminus \{0\})\,(\forall x \in K)\,(\gamma_p |x|_p \leq f(x)).$$

Démonstration Soit $\{| \,|_p\}_{p \in P}$ la pamille des semi-normes continues sur l'espace E; elle vérifie les propriétés suivants:

s_1) $\forall x \in E \setminus \{0\})\,(\exists p \in P)\,(|x|_p \neq 0)$

s_2) $(\forall p', p'' \in P)\,(\exists p \in P)\,(\forall x \in E)\,(|x|_{p'}, |x|_{p''} \leq |x|_p)$.

On suppose que le cône K est bien basé, donc il existe un A convexe et borné tel que $0 \in \overline{A}$, $K = \bigcup\limits_{\lambda \in R_+} \lambda A$.

Un théorème connu de séparation implique qu'il existe une fonctionnelle linéaire et continue f telle que:

1) $(\forall a \in \overline{A})\,(f(a) > 1)$ 2) $f(0) < 1$.

L'ensemble: $B = \{x \in K |\, f(x) = 1\}$ est une base pour le cône K.

L'ensemble $M = \mathrm{co}\,(\{0\} \cup A)$ est borné et $B \subset M$ parce que, $b = (1-\lambda)0 + \lambda a_1$ où $a_1 \in A$ et $\lambda \in]0,1[$ (si, $\lambda \leq 1$ on obtient que $f(b) = \lambda f(a_1) > 1$ ce qui est absurde).

Soit $p \in P$; comme B est borné il existe un nombre $\beta_p > 0$ tel que $(\forall z \in B)\,(|z|_p \leq \beta_p)$.

Si $x \in K \setminus \{0\}$ et $|x|_p \neq 0$ il existe $\lambda_x > 0$ tel que $(x/|x|_p)/\lambda_x \in B$. Dans ce cas on a $|(x/|x|_p)/\lambda_x|_p = 1/\lambda_x \leq \beta_p$ d'où il résulte: $f(x/|x|_p) = \lambda_x \geq 1/\beta_p$. Soit $\gamma_p = 1/\beta_p$, il résulte $\gamma_p |x|_p \leq f(x)$, relation vérifiée aussi si $|x|_p = 0$ parce que par construction f est positive sur le cône K.

Si la relation $(*)$ est vérifiée alors s_1) implique que f est strictement positive sur le cône K, donc l'ensemble $B = \{x \in K |\, f(x) = 1\}$ est une base pour le cône K [**3**], [**5**].

Comme f est continue et le cône K fermé la base B est fermée et évidemment $0 \notin B$.

Les relations $(*)$ et s_2) impliquent que B est borné et la proposition est démontrée.

Remarque. Le cône convexe $K \subset E$ est localement compact si et seulement si, il a une base compacte [le théorème de Klee]. Dans ce cas K est fermé et $K \cap (-K) = \{0\}$.

3. Soit (E, τ) un espace localement convexe.

Définition 1 On appelle *technologie homogène* sur l'espace E un cône convexe $T \subset E \times E$ avec les propriétés:

1°) T est fermé dans l'espace $E \times E$

2°) $X = \{x \in E | \, \exists y \in E, \, (x, y) \in T\}$ est un cône convexe fermé et $X \cap (-X) = \{0\}$

3°) $Y = \{y \in E | \, \exists x \in E, \, (x, y) \in T\}$ est un sous-cône convexe du cône X.

X s'appelle *l'ensemble des entrées* et Y l'ensemble des sorties.

On dit que la technologie T est localement compacte si X est localement compact.

Définition 2. On dit que le sous-cône $X' \subset X$ définit une sous-technologie de T si: 1) $X' \neq \{0\}$ 2) X' est fermé 3) $(\forall x \in X') \, (\exists y \in X') \, ((x, y) \in T)$.

Définition 3. Le couple $(y, z) \in T$ s'appelle proportionnel si $(y, z) \neq (0, 0)$ et s'il existe $\lambda, \mu \in R_+$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tels que $\mu \cdot y = \lambda \cdot z$.

Proposition 2. *Soit $K \subset E$ un cône convexe localement compact et $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_i\}_{i \in I}$, $\{z_i\}_{i \in I}$ trois suites généralisées d'éléments de K. Si:*

1) $(\forall i \in I) \, (x_i = y_i + z_i)$, 2) $\{x_i\}_{i \in I}$ *est bornée alors* $\{y_i\}_{i \in I}$ *et* $\{z_i\}_{i \in I}$ *sont bornées.*

Démonstration. On suppose que $\{y_i\}_{i \in I}$, n'est pas bornée; alors utilisant la rélation $(*)$ de la proposition 1, on obtient une sous-suite $\{y_i\}_{j \in J}$ de la suite $\{y_i\}_{i \in I}$ telle que $\lim_{j \in J} f(y_j) = +\infty$.

On met: $\overline{y}_j = y_j / f(y_j)$; $\overline{z}_j = z_j / f(y_j)$; $\overline{x}_j = x_j / f(y_j)$.

Le cône K étant localement compact et la suite $\{x_j\}_{j \in J}$ étant bornée, elle est relativement compacte, donc il existe une sous-suite convergente de la suite $\{x_j\}_{j \in J}$. Soit cette sous-suite $\{x_j\}_{j \in J}$. Donc on a $\lim_{j \in J} \overline{x}_j = 0$.

Comme $f(\overline{y}_j) = 1$, utilisant la relation $(*)$ de la proposition 1, il résulte que la suite $\{y_j\}_{j \in J}$ est bornée, donc relativement compacte.

Alors, il existe une sous-suite convergente de la suite $\{\overline{y}_j\}_{j \in J}$. Soit cette sous-suite $\{\overline{y}_j\}_{j \in J}$ et $\overline{y} = \lim_{j \in J} \overline{y}_j$. Evidemment, $\overline{y} = 0$ et comme $\overline{x}_j = \overline{y}_j + \overline{z}_j$, il résulte qu'il existe $(\overline{y}, \overline{z}) = \lim_{j \in J} (\overline{y}_j, \overline{z}_j)$, où $\overline{z} \neq 0$.

Le cône K étant fermé il résulte que $\overline{y}, \overline{z} \in K$ et $0 = \overline{y} + \overline{z}$, ce qui est une contradiction parce que $K \cap (-K) = \{0\}$.

Proposition 3. *Soit T une technologie homogène sur l'espace E et $\{X_n\}_{n \in N}$ la suite de sous-ensembles donnés par:*

$$X_0 = X \ \ \textit{(les entrées de T)}$$
$$X_{n+1} = \{x \in X | \, \exists y, z \in X_n, \ (y, z) \in T, \ x = y + z\}.$$

Alors, quel que soit $n \in N$, X_n définie une sous-tehnologie de T.

Démonstration. Par hypothèse, X_0 définit one sous-technologie de T. On suppose que X_n définit une sous-technologie de T.

Alors, X_{n+1} est un sous-cône convexe de X, et $X_{n+1} \neq \{f0\}$, parce que si $X_{n+1} = \{0\}$ alors il résulte que $X_n \cap (-X_n) \neq \{0\}$ ce que est absurde. Le cône convexe X_{n+1} est fermé.

En effet, soit $x = \lim_{i \in I} x_i$ où $\{x_i\}_{i \in I}$, est une suite généralisée de X_{n+1}. Alors, pour toút $i \in I$ il existe $y_i, z_i \in X_n$ tels que $x_i = y_i + z_i$.

De la proposition 2 il résulte que les suites $\{y_i\}_{i \in I}$, et $\{z_i\}_{i \in I}$ sont bornées, donc relativement compactes. On peut trouver les sous-suites convergentes $\{y_{i_k}\}$ et $\{z_{i_k}\}$ de $\{y_i\}_{i \in I}$ (resp. de $\{z_i\}_{i \in I}$).

Soit $\overline{y} = \lim_{k \in J} y_{i_k}$, $\overline{z} = \lim_{k \in J} z_{i_k}$ et comme T est fermé on a que $(\overline{y}, \overline{z}) \in T$ et aussi $\overline{y}, \overline{z} \in X_n$ (X_n étant fermé). Donc, $\overline{x} = \overline{y} + \overline{z}$, d'où $\overline{x} \in X_{n+1}$.

Il reste à prouver que si $x \in X_{n+1}$ alors il existe un $y \in X_{n+1}$ tel que $(x, y) \in T$.

En effet de la construction de X_{n+1} il résulte que $x = u + v$, où $u, v \in X_n$ et $(u, v) \in T$.

Comme X_n définit une sous-technologie de T il existe un $w \in X_n$ tel que d'où $(v, W) \in T$ étant un cône convexe on a $(u + v, v + w) = (u, v) - (v, w) \in T$, d'où $(u + v, v + w) = (x, v + w) \in T$, et on prend $y = u + w$ ce qui démontre la proposition.

Soit $A \subset E$ un ensemble convexe. Un point $x_0 \in A$ s'appelle *extrême* si et seulement si l'ensemble $A \setminus \{x_0\}$ est convexe.

Un point x_0 du cône convexe $K \subset E$ s'appelle extrémal si et seulement si quel que soit $y \in [0, x_0] = \{z | \, 0 \leq z \leq x_0\}$ a il résulte que $y = \alpha x_0$, où $\alpha \in R_+$.

THÉORÈME. *Paur toute technologie homogène T localement compacte de l'espace localement convexe E il existe un couple proportionnel.*

Démonstration. Par construction, pour tout $n \in N$, $X_{n+1} \subset X_n$ où $\{X_n\}_{n \in N}$ est la su te de la propostion 3.

Comme le cône convexe X est localement compact il a une base compacte ce qui donne que $X_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ est un cône convexe fermé et tel que $X_\infty \neq \{0\}$.

Soit B une base compact du cône X, alors $B_\infty = B \cap X_\infty$ est un ensemble convexe compact.

On peut prouver que chaque point extrême de l'ensemble B_∞ est un point extrémal pour le cône X_∞.

En effet, soit $e \in B_\infty$ un point extrême et $y \in [0, e]$. On peut supposer que $O < y < e$. Donc il existe $z \in X_\infty \setminus \{0\}$ tel que $e = y + z$.

Comme B_∞ est une base pour le cône X_∞ il résulte qu'il existe $\alpha, \beta \in R$; $\alpha, \beta > 0$ et $b_1, b_2 \in B_\infty$ tels que $y = \alpha b_1$ et $z = \beta b_2$.

Donc, $e = \alpha b_1 + \beta b_2$. Comme B_∞ est une base du cône X_∞ il résulte que $\alpha + \beta = 1$ [**5**].

Mais, e étant extrême pour B_∞ il résulte que $y = \alpha e$, c'est-à-dire e est extrémal pour le cône X_∞.

Comme chaque ensemble convexe compact a des points extrêmes on peut cholsir un élément extrémal $\overline{x} \in X_\infty$ tel que $\overline{x} \neq 0$ [**6**].

De la construction de X_∞ il résulte que quel que soit $n \in N$ il existe $y_n, z_n \in X_n$ tels que $\overline{x} = y_n + z_n$ et $(y_n, z_n) \in T$.

De la proposition 2 il résulte que les suites $\{y_n\}_{n \in N}\{z_n\}_{n \in N}$ sont bornées et comme X est localement compact et T fetmé on peut trouver les sous-suites $\{y_{n_k}\}$ convergentes (resp. $\{z_{n_k}\}$) de $\{y_n\}_{n \in N}$ (resp. $\{z_n\}$) telles que $(\overline{y}, \overline{z}) \in T$ oì: $\overline{y} = \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k}$; $\overline{z} = \lim\limits_{k \to \infty} z_{n_k}$, $\overline{x} = \overline{y} + \overline{z}$ et $(\overline{y}, \overline{z}) \in X_\infty$ parce que pour tout $n \in N$, X_n est fermé.

Comme $\overline{x}$ est extrémal pour le cône X_∞ il existe $\lambda, \mu \in R_+$ tels que $\overline{y} = \lambda \overline{z}$ et $\overline{z} = \mu \overline{x}$, et il est impossible d'avoir $\lambda = \mu = 0$ parce que cela implique $x = 0$, ce qui est absurde; donc $(\overline{y}, \overline{z})$ est un couple proportionnel pour la technologie homogène T, parce que $\mu \overline{y} = \lambda \overline{z}$.

On dit qu'une technologie homogène T sur l'espace localement convexe E est bien basée si le cône X est bien basé.

Corollaire. *Pour toute rechnologie homogène bien basée T sur un espace localement convexe semi-réflexif E il existe un couple proportionnel.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Gale, R. Rockwel, (a) *On the Interest Rate of Malinvaud and Staret*, Econometrica **43** (1975) 347–360. (b) *The Malinvaud eigenvalue lemma*: Correction and amplification, Econometrica 44, **6** (1976) 1323–1324.

[2] G. Isac, *Sur les cônes convexes engendrés par des ensembles bornés et cônes complètement réguliers*, Ann. Fac. Sci. Kinshasa Zaire Sect. Math. – Phys. **1** (1975).

[3] J. O. Jameson, *Ordered linear spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag,1970.

[4] E. Malinvaud, *Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources*, Econometrica **21** (1953) 233–268.

[5] A. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper and Row 1967.

[6] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Mac Milan 1967.

Départément de mathématiques
Collège Militaire Royal de
Saint-Jean, Qu'ebec. JOJ 1RO
Canada

(Reçu 11 03 1981)