PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 33 (47), 1983, pp. 63–67

UN THÉORÈME SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES À JACOBIENNE INDETERMINÉE

Lando Degoli

Résumé. On démontre la condition nécessaire et suffisante pour qu' un système linéaire de quadriques de S_r soit à matrice Jacobienne identiquement nulle de caractéristique $r-k$.

Un système linéaire L_d $(d \geq r)$ de quadriques de l'espace complexe S_r à r dimensions de coordonnées: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r$ est exprimé par l'équation:

$$\lambda^0 f_0 + \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^d f_d = 0$$

avec: $f_q = a_q^{ik} x_i x_k$.

Prenons en considération la matrice Jacobienne à $d+1$ lignes et $r+1$ colonnes:

$$J = \|\partial f_i / \partial x_s\| \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots, d; \ \ s = 0, 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

En général la matrice Jacobienne égalée à zéro est le lieu géometlique des pornts de S_r conjugués entre eux — mêmes par rapport à toutes les quadriques du système. Si la matrice Jacobienne est identiquement nulle cela signifie que tout l'espace est lieu de points conjugués.

Si la caractéristique de la Jacobienne est r, un point générique de S_r est conjugué avec un seul point. Si au contraire la caractéristique est $r-h$ avec $h>0$ un point quelconque de S_r est conjugué avec un espace S_h.

Premisses. Nous considérerons un système linéaire de quadriques L_d $(d \geq r)$ qui ne possède aucun système subordonné L_g $(r \leq g \leq d-1)$ possédant une Jacobienne identiquement nulle de caractéristique $r-k-1$ $(k \geq 0)$.

Considérons le thórème suivant.

AMS Subject Classification (1970): Primary 54H25, Secondary 47H10.

Key words and phrases: Mappings with contractive iteration at a point, fixed points, convergence of iterations.

La condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire de quadrigues $L_d\,(d \geq r)$, satisfaisant aux prémisses précédentes, ait la Jacobienne identiquement nulle de caractéristigue $r-k$ $(k \geq 0)$, est que les quadriques du système gui passent par un point guelconque de S_r possèdent en commun un S_{k+1}.

Avant tout nous démontrons ce cas particulier:

Si le système L_d est à Jacobienne identiguement nulle de caractéristique r, les guadriques du système qui passent par un point ont en cornmun une droite.

Si la Jacobienne est identiquement nulle de caractéristique r, celà signifie que tous les d'eterminants de la matrice (1) d'ordre $r+1$ sont identiquement nuls.

Considérons le déterminant donné par $r+1$ quadriques quelconques. On ne nuit pas à la généralité en choisissant les premières r quadriques du système:

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}, f_r.$$

On aura:

$$D = \begin{vmatrix} \partial f_0/\partial x_0 & \partial f_1/\partial x_0 & \ldots & \partial f_r/\partial x_0 \\ \partial f_0/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_1 & \ldots & \partial f_r/\partial x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial f_0/\partial x_r & \partial f_1/\partial x_r & \ldots & \partial f_r/\partial x_r \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Les mineurs d'ordre r extraits du déterminant D ne peuvent pas être tous nuls, autrement le système linéaire L_r déterminé par les $r+1$ quadriques précédentes aurait la Jacobienne identiquement nulle de caractéristique $< r$, et pour cela il existerait dans L_d un système subordonné avec la Jacobienne identiquement nulle de caractéristique inférieure à r, contredisant les prémisses du théorème.

Il est donc nécessaire qu'au moins un des déterminants d'ordre $r-1$ ne soit pas zéro. Nous pouvons supposer que c'est le mineur obtenu en éliminant la dernière ligne et la dernière colonne. Nous l'indiquerons avec A:

$$A = \begin{vmatrix} \partial f_0/\partial x_0 & \partial f_1/\partial x_0 & \ldots & \partial f_{r-1}/\partial x_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial f_0/\partial x_{r-1} & \partial f_1/\partial x_{r-1} & \ldots & \partial f_{r-1}/\partial x_{r-1} \end{vmatrix}$$

Prenons en considération la matrice extraite du déterminant D formée avec les premières r lignes et indiquons avec:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$$

les mineurs d'ordre r qu'on obtient en substituant à la première, deuxième, etc., colonne de A la dernière colonne de la matrice. Un seul de ces déterminants peut être nul, parce que si deux déterminants d'ordrc r sont nuls dans la matrice à $r+1$ colonnes et r lignes, par un théorème de Kronecker tous les déterminants seraient nuls et par conséquent il serait nul: A, ce qui est impossible.

Puisque le déterminant D est identiquement nul les quadriques ne sont pas indépendantes et une quelconque, par exemple f_r sera fonction des autres. Nous aurons:

$$f_r = F(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}). \tag{3}$$

Mais parce que les f_i sont toutes des formes de deuxième ordre en remplaçant $x_0, x_1, \ldots, x_r$ par $tx_0, tx_1, \ldots, tx_r$ on obtient:

$$t^2 f_r = F(t^2 f_0, t^2 f_1, \ldots, t^2 f_{r-1})$$

ce qui montre que F est une fonction homogène de premier degré.

En dérivant l'expression (3) on obtient:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial f_0}\frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_{r-1}}\frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_0} = \frac{\partial f_r}{\partial x_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial f_0}\frac{\partial f_0}{\partial x_{r-1}} + \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_{r-1}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_{r-1}}\frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_{r-1}} = \frac{\partial f_r}{\partial x_{r-1}},\end{gathered} \tag{4}$$

un système de premier degré, ce qui donne aisément les derivées partielles de la fonction F, c'est à dire:

$$\partial F/\partial f_0 = -A_0/A,\ \ \partial F/\partial f_1 = -A_1/A, \ldots, \partial F/\partial f_{r-1} = -A_{r-1}/A. \tag{5}$$

Considérons un point x de S_r de coordonnées: $x_0, x_1, \ldots, x_r$, et soit x' de coordonnées: $x'_0, x'_1, \ldots, x'_r$ son conjugué par rapport à toutes les quadriques du système.

La droite qui unit deux points sera donnée par:

$$y_i = t_i x_i + t_2 x'_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, r). \tag{6}$$

En remplaçant (6) dans toutes les quadriques, on obtient pour la quadrique générique f_m:

$$f_m(y) = f_m(x)t_1^2 + f_m(x')t_2^2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, r). \tag{7}$$

parce que les termes $2a_m^{ik} x_i x'_k$ sont nuls, les points x et x' étant conjugués.

En remplaçanr les équations (7) dans les équations (3) et en dérivant par rapport à t_1 et t_2 on obtient:

$$\begin{aligned}\partial f_r/\partial t_1 &= \partial F/\partial f_s \cdot \partial f_s/\partial t_1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, r-1) \\ \partial f_r/\partial t_2 &= \partial F/\partial f_s \cdot \partial f_s/\partial t_2\end{aligned} \tag{8}$$

En dérivant les équations (7) on a:

$$\partial f_m/\partial t_2 = 2t_1 f_m(x),\ \ \partial f_m/\partial t_2 = 2t_2 f_m(x') \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, r).$$

Remplaçons ces dernières dans (8). On obtient:

$$f_r(x) = \partial F/\partial f_s \cdot f_s(x),\ \ f_r(x') = \partial F/\partial f_s \cdot f_s(x') \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, r-1).$$

Et enfin pour les équations (5):

$$\begin{gathered}A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) + \cdots + A_{r-1} f_{r-1}(x) + A f_r(x) = 0 \\ A_0 f_0(x') + A_1 f_1(x') + \cdots + A_{r-1} f_{r-1}(x') + A f_r(x') = 0\end{gathered} \tag{9}$$

Les déterminants A, A_0, $A_1, \ldots, A_{-1}$, sont calculés dans un point générique de S_r, par exemple en x, et un seul d'entre eux est au maximum nul.

En multipliant la première des équations (7) par ti et la deuxième par t_2^2 et additionant après, on obtient:

$$A_0 f_0(y) + A_1 f_1(y) + \cdots + A_{r-1} f_{r-1}(y) + A f_r(y) = 0 \tag{10}$$

où y est le point générique de la droite: $y_i = t_1^2 x_i + t_2^2 x'_1$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$.

Considérons deux quadriques quelconques du systéme: f_h et f_k. Nous savons qu'on peut écrire pour (7):

$$f_h(y) = f_h(x) t_1^2 + f_h(x') t_2^2, \qquad f_k(y) = f_k(x) t_1^2 + f_k(x') t_2^2 \tag{11}$$

On en déduit:

$$t_1^2 = 1/B(f_h(y) f_k(x') - f_k(y) f_h(x')), \quad t_2^2 = 1/B(f_h(x) f_k(y) - f_k(x) f_h(y))$$

avec:

$$B = \begin{vmatrix} f_h(x) & f_h(x') \\ f_k(x) & f_k(x') \end{vmatrix}.$$

En remplaçant t_1^2 et t_2^2 dans (7) on trouve que la quadrique génériquc $f_m(y)$ est une combinaison linéaire des deux quadriques $f_h(y)$ et $f_k(y)$. C'est à dire que le premier membre de (10) ésulte une combinaison linéaire à coefficients constants de $f_h(x)$ et $f_k(x)$ et par (11) on peut écrire:

$$a[f_h(x) t_1^2 + f_h(x') t_2^2] + b[f_k(x) t_1^2 + f_k(x') t_2^2] = 0.$$

L'expression du premier membre est identiquement nulle par rapport aux variables t_1 et t_2 et on arrive aux relations:

$$a f_h(x) + b f_k(x) = 0, \quad a f_h(x') + b f_k(x') = 0$$

avec a et b non nulles en même temps.

Ainsi il faut que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} f_h(x) & f_k(x) \\ f_h(x') & f_k(x') \end{vmatrix}$$

soit nul. C'est a dire: $f_h(x)/f_h(x') = f_k(x)/f_k(x') = c$. On obtient: $f_h(x) = c f_h(x')$, $f_k(x) = c f_k(x')$, c étant une constante non nulle.

Puisque f_h et f_k sont deux quadriques génériques, ces relations seront vérifiées par une quadrique quelconque f_m du système L_d. Nous aurons:

$$f_m(x) = c f_m(x') \tag{12}$$

On en déduit que toutes les quadriques du système L_d qui passent par un point x passent aussi par son conjugué x' et réciproquement. Si x est situé sur la quadrique f_m on aura: $f_m(x) = 0$ et pour (12): $f_m(x') = 0$, en remarquant que

x' est le conjugué de x par rapport à toutes les quadriques de L_d. Il en résulte: $t_1^2 f_m(x) + t_2^2 f_m(x') = 0$ et pour (7): $f_m(y) = 0$ où y est le point générique de la droite xx'.

Donc la droite en question appartient toute entière à la quadrique f_m. On en déduit que toutes les quadnques qui passent par x contiennent la droite xx'.

Supposons maintenant que la Jacobienne du système L_d soit identiquement nulle de caractéristique $r-k$.

Cela signifie qu' un point x de S_r à pour conjugué un S_k.

Considérons un générique S_{r-k} qui passe par x. Le système L_d sera entrecoupé par le S_{r-k} suivant un système linéaire S_d de quadriques de S_{r-k}, qui a son tour coupera le S_k en un point x', qui résulte le conjugué de x par rapport a toutes (es quadriques du sistème $L_{d'}$.

Nous pourrons choisir pour coordonnées de $S_{r-k} : x_0, x_1, \ldots, x_{r-k}$, en annulant toutes les autres coordonnées. C est à dire en écrivant: $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \cdots = x_r = 0$.

Les équations des quadriques $f_0, f_1, \ldots, f_r$ seront du type:

$$f_i(x_0, x_1, \ldots, x_{r-k}, 0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Les dérivées partielles: $\partial f_i / \partial x_s$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, r-k)$ pour $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \cdots = x_r = 0$, seront toutes núlles. La matrice Jacobienne du système $L_{d'}$:

$$\|\partial f_i / \partial x_s\| \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \ldots, d' \\ s = 0, 1, 2, \ldots, r-k \end{array}$$

sera identiquement nulle.

Elle ne pourra pas avoir de caractéristique su érieure à $r-k$ parce que ses lignes ne sont qu'en nombre $r-k+1$, et elle ne pourra pas avoir de caractéristique inférieure à $r-k$, sinon le point x aurait pour conjugué un S_g avec $g > 0$ et non le seul point x'.

Il résulte que le système $L_{d'}$ de S_{r-k} a la caractéristique $r-k$. Cela permet de conclure, pour la prémière partie du théorème, que les quadriques de $L_{d'}$ qui passent par x auront en commun la droite xx'.

Puisque nous pouvons dire la même chose pour tous les S_k qui passent par x on en déduit que les quadriques de L_d qui passent par x auront en commun le S_{k+1} joignant le point x avec S_k.

La condition du Théorème est donc nécessaire.

Elle est aussi suffisante. En effet, si toutes les quadriques de L_d, qui ont en commun un point x, ont en commun un S_{k+1}, il est évident que le point x a pour conjugué le même S_{k+1} par rapport du système L_{d-1} de quadriques qut passent par x. Une autre quadrique du système L_d qui ne passe pas par x a pour conjugué de x un hyperplan qui coupera le S_{k+1} dans un S_k et il en résulte que x aura pour conjugué par rapport au système L_d un S_k.

Cela signifie que la matrice Jacobienne est identiquement nulle de caractéristique $r - k$, comme on voulait démontrer.

Observation. Les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique $r - k$, qui possédent des systèmes subordonnés à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique inférieure, ne satisfont pas au théorème.

Par exemple considérons un système L_d avec $d \geq r + 1$ à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique r, qui possède un systême subordonné L_{d-1} à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique $r - 1$. Les quadriques de L_{d-1} qui passent par un point x ont par le théorème démontré un plan en commun.

Alors une quadrique ultérieure qui n'appartient pas à L_{d-1} et qui passe par le point x sera coupée par le plan dans une conique et par conséquent les quadriques de L_d qui passent par x ont en commun une conique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti Accad. Sci. Torino, Nota II, **51** (1916); Nota III, **55** (1919-20).

[2] C. Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*, R. Accad. Sci. Torino **50** (1914-15).

[3] L. Muracchini, *Sulle Viarietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria*,(Parte II), Riw. Mat. Univ. Parma, **3** (1952), 75–89.

[4] L. Degoli, *Sui sistemi leneari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica* $\leq r$, Accad. Sci. Bologna, Rend. Ser. XI, **10** (1963).

Istituto matematico
dell' Universita
41100 Modena
Italia

(Received 25 04 1981)