PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 33 (47), 1983, pp. 35–39

SYSTEME VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG VOM ELLIPTISCHEN TYPUS MIT ANALYTISCHEN KOEFFIZIENTEN UND METHODE DER VERALLGEMEINERTEN AREOLÄREN REIHEN

Miloš Čanak

1. In seiner ausführlichen Arbeit [**1**] hat I. Vekua das folgende System partieller Gleichungen

$$u'_x - v'_y = a(x,y)u + b(x,y)v + f(x,y), \quad u'_y + v'_x = c(x,y)u + d(x,y)v + g(x,y) \tag{1}$$

erforscht, wobei $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $f(x,y)$ und $g(x,y)$ stetige reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x und y in einem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet T sind. Wenn man die zweite Gleichung (1) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man folgende komplexe Gleichung

$$DU = MU + N\overline{U} + L.tag2$$

Heir ist $M = (a+d+ic-ib)/2$, $N = (a-d+ic+ib)/2$, $L = f+ig$, $U = u+iv$ und $DU = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2U'_{\overline{z}}$ der bekannte Operator von Kolossov.

Es ist bekannt, dass die Funktion

$$U_0(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_T \frac{M(\xi,\eta)}{t-z}d\xi d\eta\right)$$

eine reguläre, partikuläre Lösung der Gleichung $DU = MU$ darstellt. Vekua zeigte, dass die Gleichung (2) durch Substitution $U = wU_0$ in folgende Gleichung

$$Dw = A\overline{w} + B \tag{3}$$

übergeht. Hier ist $A = N\overline{U}/U_0$, $B = L/U_0$.

AMS Subject Classification (1980): Primary 58G05, Secondary 35J99.

N. Theodorescu [**2**] und S. Fempl [**3**] haben einen Integraloperator ${}^{A}\!\int$ eingeführt, der dem Operator D inwers ist. Sie haben auch einige Eigenschaften dieses Operators erforscht.

M. Čanak [**4**] hat eine Abbildung α_k (k = const., $k \in R$) der Menge der differenzierbaren komplexen Funktionen $\{W|w = w(z,\overline{z})\}$ auf die Menge der analytischen Funktionen $\{\Omega|\Omega = \Omega(z)\}$ eingeführt. Die Funktion $\Omega = \alpha_k w$ kann man erhalten, wenn man in der Funktion $w = w(z,\overline{z})$ den Wert $\overline{z}$ unveränderlich lässt und den Wert $\overline{z}$ mit k vertauscht. Z. b

$$\alpha_1(e^{z+2\overline{z}} + z^2 + 3z\overline{z}^3) = e^{z+2} + z^2 + 3z.$$

Weitcrhin führte der Verfasser auch folgende Definition des bestimmten areolären Integra's ein.

Definition. Ea sei ${}^{A}\!\int w(z,\overline{z}) = w(z,\overline{z})$ eine nach z und $\overline{z}$ differenzierbare Funktion in einem endlichen einfach zusammenhängenden Gebiet T. Das areoläre bestimmte Integral mit Integrationsgrenzen a und b ($a, b \in T$), wird durch folgende Formel

$${}^{A}\!\int_a^b w(z,\overline{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_b W - \alpha_a W \tag{4}$$

definiert.

Es ist klar, dass die rechte Seite der Definitionsrelation (4) eine analytische Funktion darstellt.

In der gleichen Arbeit wird auch der Begriff der areolären Reihe eingeführt. Die areoläre Reihe ist eine komplexe Reihe folgender From $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{z}^k \varphi_k(z)$ wobei die Koeffizienten $\varphi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen sind. Diesen Begriff aber können wir verallgemeinern auf die Reihen folgender Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\psi_k(z)}$$

wobei $\varphi_k(z)$ und $\psi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen sind. Diese Reihen nennen wir *verallgemeinerte areoläre Reihen.* In der Praxis wird ihre Konvergenz durch Komparation mit einer majorierenden komplexen Reihe erforscht.

2. In dieser Arbeit beweist der Verfasser zuerst einen Satz und dann löst er die Gleichung (3) durch die Methode der verallgemeinerten areolären Reihen in dem Falle, wenn die Koeffizienten $A(z) = A(x,y)$ und $B(z) = B(x,y)$ analytisch sind.

Satz 1. *Es sei $w_0(z)$ eine gegebene analytische Funktion in einem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet T. Die areoläre Differentialgleichung* (3) *mtt dem Anfangswert*

$$\alpha_0 w(z,\overline{z}) = w_0(z) \tag{5}$$

ist folgender areolären Integralgleichung

$$w = w_0 + {}^{A}\int_{0}^{\overline{z}} (Aw + B), \quad (\overline{z} \in T) \tag{6}$$

äquivalent.

Beweis. Wenn wir auf der linken und rechten Seite der Gleichung (3) den Operator ${}^{A}\int$ anwenden, so erhalten wir

$$w = {}^{A}\int (A\overline{w} + B) + g(z) = \Phi(z, \overline{z}) + g(z) \tag{7}$$

wobei $g(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist und

$$D\Phi = D^{A}\int (A\overline{w} + B) = A\overline{w} + B.$$

Weiterhin können wir auf der Relation (7) den Operator α_0 anwenden und so erhalten wir

$$\alpha_0 w = w_0(z) = \alpha_0 \Phi(z, \overline{z}) + g(z). \tag{8}$$

Durch weitere Substraktion der Gleichungen (7) und (8) erhält man

$$w - w_0 = \Phi(z, \overline{z}) - \alpha_0 \Phi(z, \overline{z}) = {}^{A}\int_{0}^{\overline{z}} (A\overline{w} + B)$$

d.h. die Integralgleichung (6).

Anderseits, wenn man auf die Gleichung (6) den Operator D anwendet, so ergibt sich sofort die Gleichung (3).

Nehmen wir jetzt an, dass die Koeffizienten $A(z)$ und $B(z)$ der Gleichung (3) in einem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet T analytisch sind. Dann existieren solche positive, reelle Zahlen α, γ, δ, r, dass

$$|w_0(z)| \leq \alpha, \quad |A(z)| \leq \gamma, \quad |B(z)| \leq \delta, \quad |z| \leq r, \quad (z \in T).$$

Formieren wir zuerst folgendc Funktionalfolgen:

$$\varphi_0(z) = 1,\ 2\varphi_1(z) = \int_0^z w_0(z)dz,\ 2\varphi_2(z) = \int_0^z A(z)\varphi_0(z)dz, \ldots,$$

$$2\varphi_n(z) = \int_0^z A(z)\varphi_{n-2}(z)dz$$

$$\beta_0(z) = z,\ 2\beta_1(z) = \int_0^z B(z)dz,\ 2\beta_2(z) = \int_0^z zA(z)dz, \ldots,$$

$$2\beta_n(z) = \int_0^z A(z)\beta_{n-2}(z)dz$$

Weiterhin formieren wir folgende verallgemeinerte areoläre Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k-1}\overline{\beta}_k \tag{10}$$

und untersuchen wir ihre Konvergenz.

Für die Koeffizienten der Reihen (9) und (10) gelten folgende Ungleichungen:

$$|\varphi_1(z)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^z w_0(z)dz\right| \le \frac{1}{2}\alpha|z| \le \frac{\alpha r}{2}$$

$$|\varphi_2(z)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^z A(z)\varphi_0(z)dz\right| \le \frac{\gamma r}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\varphi_{2n-1}(z)| \le \gamma^{n-1}\alpha\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^n, \quad |\varphi_{2n}(z)| \le \gamma^n\left(\frac{r}{2}\right)^n$$

$$|\beta_1(z)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^z B(z)dz\right| \le \frac{1}{2}\delta r, \quad |\beta_2(z)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^z zA(z)dz\right| \le \frac{1}{2}\gamma\frac{r^2}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\beta_{2n-1}(z)| \le \delta\gamma^{n-1}(r/2)^{n-1}, \quad |\beta_{2n}(z)| \le \gamma^n(r/2)^n.$$

Durch Ausnützug dieser Ungleichungen erhalten wir:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k\right| \le \alpha\frac{r}{2} + \alpha\gamma\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \alpha\gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)^3 + \cdots = \frac{\alpha}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\gamma\right)^n = \frac{\alpha r}{2-r\gamma} \tag{11}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{k-1}\overline{\beta}_k\right| \le \delta\frac{r^2}{2} + \delta\gamma\left(\frac{r}{2}\right)^4 + \delta\gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)^4 + \cdots = \delta\frac{r^2}{2} + \frac{\delta\gamma r^3}{8-\gamma^3 r^3}. \tag{12}$$

Nun ist nach (11) und (12) klar, dass die beiden areolären Reihen (9) und (10) gleichmässig konvergieren und dass sie zwei stetige komplexe Funktionen

$$\varphi(z,\overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k, \quad \beta(z,\overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_{k-1}\overline{\beta}_k$$

definieren.

Auf Grund der Formel (6) konnstruiren wir folgende sukzessive Funktionalfolge

$$w_n = w_0 + {}^A\!\!\int_0^z (A\overline{w}_{n-1} + B) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{13}$$

Aus der Formel (13) erhalten wir leicht folgende sukzessive Werte

$$w_1 = w_0 +^A \int_0^{\overline{z}} (A\overline{w}_0 + B) = w_0 + A\overline{\varphi}_1 + B\overline{z}/2$$

$$w_2 = (w + 0 + A\overline{\varphi}_1 + A\varphi_1\overline{\varphi}_2) + (B\overline{z}/2 + A\beta_0\overline{\beta}_1/2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_n = w_0 + A\sum_{k=1}^{n} \varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k + B\overline{z}/2 + \frac{A}{2}\sum_{k=2}^{n} \beta_{k-2}\overline{\beta}_{k-1}. \tag{14}$$

Da die verallgemeinerten areolären Reihen (9) und (10) gleichmässig konvergieren, so muss auch die Funktionalfolge (14) gleichmässig konvergieren, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} w_n(z,\overline{z}) = w(z,\overline{z}) = w_0 + A\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k + B\overline{z}/2 + \frac{A}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \beta_{k-2}\overline{\beta}_{k-1}. \tag{15}$$

Die Funktion $w(z,\overline{z})$ stellt die Lösung der Gleichung (3) dar. Nämlich, wenn wir den Wert (15) und den Wert der areolären Ableitung

$$Dw = 2A\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k-1}\overline{\varphi}'_k + B + A\sum_{k=2}^{\infty} \beta_{k-2}\overline{\beta}'_{k-1}$$

in die Gleichung (3) einsetzen, so sehen wir leicht, dass die Koeffizienten der veralgemeinerten areolären Reihe auf der linken Seite, den entsprechenden Koeffizienten auf der rechten Seite gleich sind, d.h. die Funktion $w(z,\overline{z})$ genügt der Gleichung (3). Ausserdem, können wir uns leicht überzeugen, dass die Funktion (15) auch der Bedingung (5) genügt.

Bemerkung: Im Falle wenn wir die Gleichung (3) ohne der Bedingung (5) beobachten, so stellt die Funktion (15) die allgemeine Lösung der Gleichung (3) dar. Die Formel (15) stellt jeder beliebigen in T analytischen Funktion $w_0(z)$ eine in T reguläre, stetige Lösung der Gleichung (3) gegenüber, wobei jeder derartigen Lösung eine einzige, stetige, analytische Funktion $w_0(z)$ entspricht.

LITERATUR

[1] I. N. Vekua, *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben*, Berlin, 1956.

[2] N. Theodorescu, *Dérivée et primitives aréolaires*, Annali di mathematica, Bucarest, **44**, 1960.

[3] S. Fempl, *Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija*, Mat. Vesnik, **1** (**16**), (1964), 29–38.

[4] M. Čanak, *Metode diferencijalnih i funkcionalnih jednačina za rešavanje nekih tipova konturnlh problema*, Thesis, Beograd, 1977.

Katedra za matematiku
Poljoprivredni fakultet
Zemun, Jugoslavija