МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
60 (2008), 53–57

UDK 517.986
оригинални научни рад
research paper

UNE NOTE SUR LA NOETHÉRIANITÉ

R. Choukri, A. El Kinani, A. Oukhouya

Abstract. We show that a Banach algebra in which all maximal ideals are of finite type is a noetherian algebra, hence of finite dimension. We also consider m-convex Fréchet algebras in which all maximal ideals are principal.

Introduction

Il est bien connu que $C^\infty([0,1])$, l'algèbre de toutes les fonctions complexes de classe C^∞ définies sur l'intervalle $[0,1]$, ne peut être munie d'aucune norme d'algèbre de Banach. C'est une conséquence immédiate d'un résultat de I. M. Singer et J. Wermer [7]. Ceci est du à l'existence, dans $C^\infty([0,1])$, d'une dérivation non nulle (la dérivation naturelle), et donc à une propriété algébrique. Dans cette note, nous retrouvons le résultat ci-dessus par une propriété, également algébrique, que possède cette algèbre. Elle concerne plus précisement ses idéaux maximaux. Par ailleurs, on sait qu'une algèbre de Banach dans laquelle tout idéal (à gauche) est de type fini est de dimension finie [1], Théorème 5, p. 76. Nous établissons dans cette note, que, dans le cas commutatif, la noethérianité est équivalente au fait que tout idéal maximal soit de type fini. Enfin de cette note, nous considérons les algèbres localement multiplicativement convexes de Fréchet commutatives dans lesquelles tous les idéaux maximaux sont principaux. A ce propos, nous retrouvons, également, une famille d'idéaux premiers de l'algèbre $C^\infty([0,1])$.

Préliminaires

Soit A une algèbre commutative unitaire. On dit qu'un idéal I de A est de type fini s'il est engendré par un nombre fini de ses éléments, c'est à dire, s'il existe $x_1,\dots,x_r \in I$ tel que:

$$I = Ax_1 + \cdots + Ax_r.$$

L'idéal I est dit principal s'il est engendré par un de ses éléments.

AMS Subject Classification: 46J10, 46J20
Keywords and phrases: Noetherian algebra; l.m.c. algebra; maximal ideal.

L'algèbre A est dite noethérienne si tous ses idéaux sont de type fini. C'est équivalent à dire que la famille des idéaux de A satisfait la condition de la chaine ascendante. L'algèbre A est dite principale si ses idéaux sont principaux. Une algèbre principale intègre admettant un seul idéal maximal est dite de valuation discrète. Un idéal P de A est dit premier s'il est distinct de A et si l'algèbre quotient A/P est intègre. L'idéal P est dit primaire si tout diviseur de zéro dans l'algèbre quotient A/P est nilpotent.

A est dite une algèbre localement multiplicativement convexe (*a.l.m.c.*) de Fréchet si elle est munie d'une topologie d'algèbre metrisable complète définie par une famille dénombrable de semi-normes sous-multiplicatives. Un élément a d'une telle algèbre est dit un diviseur topologique de zéro si l'application de A vers aA qui à x associe ax n'est pas un homéomorphisme.

Nous notons $C^\infty([0,1])$ l'algèbre de toutes les fonctions complexes de classe C^∞ définies sur l'intervalle $[0,1]$. Munie de la topologie de la convergence uniforme ainsi que les dérivées successives, elle devient une *a.l.m.c.* de Fréchet. D'autre part, ses idéaux maximaux sont les idéaux principaux $C^\infty([0,1])x_\lambda$, où $\lambda \in [0,1]$ et $x_\lambda(t) = t - \lambda,\ \forall t \in [0,1]$.

I. Cas Banach

Avant de citer le résultat principal de cette note, nous donnons le lemme suivant dont on aura besoin par la suite.

LEMME I.1. *Soit A une algèbre de Banach unitaire. Si I est un idéal à gauche de A dont la fermeture $\overline{I}$ est de type fini, alors I est fermé.*

Preuve. [1], Lemme 4, p. 76. ■

REMARQUE I.2. Signalons que ce lemme est valide pour une grande classe d'algèbres topologiques, à savoir celle des F-algèbres dont tout idéal à gauche maximal est fermé comme nous le montrerons plus tard.

THÉORÈME I.3. *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) Tout idéal maximal de A est de type fini,

ii) A est noethérienne (et donc de dimension finie).

Preuve. L'implication $ii) \Rightarrow i)$ est claire. Montrons l'implication inverse. Considérons la famille $\mathcal{F}$ de tous les idéaux de A qui ne sont pas de type fini et supposons qu'elle est non vide. Munie de l'inclusion, elle est inductive. Considérons alors I_0 un élément maximal de $\mathcal{F}$. L'idéal I_0 est premier. En effet, soit $x, y \in A$ tel que $xy \in I_0$ et $x \notin I_0$, $y \notin I_0$. Comme I_0 est strictement contenu dans $I_0 + Ax$, ce dernier est de type fini. Il existe alors $x_1, \ldots, x_r \in I_0$ tel que:

$$I_0 + Ax = Ax_1 + \cdots + Ax_r + Ax.$$

D'autre part, l'idéal $J = \{a \in A : ax \in I_0\}$ contient strictement I_0, donc il est de type fini. Considérons $y_1, \ldots, y_s \in J$ tel que $J = Ay_1 + \cdots + Ay_s$. Alors il est facile de voir que

$$I_0 = Ax_1 + \cdots + Ax_r + Ay_1x + \cdots + Ay_sx,$$

ce qui contredit le fait que I_0 n'est pas de type fini. Par ailleurs, comme conséquence de la définition de I_0, l'algèbre quotient A/I_0 est noethérienne. Par le lemme I.1, I_0 est fermé. Donc l'algèbre de Banach A/I_0 est de dimension finie ([1], Théorème 5, p.76). Elle est alors un corps vu qu'elle est intègre. Par suite I_0 est maximal, ce qui n'est pas le cas. ■

Comme conséquence, nous avons le résultat bien connu suivant.

Corollaire I.4. *L'algèbre $C^\infty([0,1])$ ne peut être munie d'aucune norme d'algèbre de Banach.*

Preuve. Dans l'algèbre $C^\infty([0,1])$, tout idéal maximal est de type fini (il est même principal). Le théorème I.3 permet de conclure. ■

Remarques I.5. 1) Le théorème n'est pas vrai sans la complétude comme le montre, également, l'algèbre $C^\infty([0,1])$ munie, par exemple, de la norme de la convergence uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

2) L'algèbre des séries formelles $\mathbf{C}[[X]]$ admet un seul idéal maximal; il est de type fini (en fait $\mathbf{C}[[X]]$ est principale). L'algèbre de Banach complétée de $\mathbf{C}[[X]]$, pour n'importe quelle norme d'algèbre, admet également un seul idéal maximal. Par le théorème ci-dessus, ce dernier ne peut être de type fini.

II. Cas Fréchet

La preuve du théorème I.3 montre que l'algèbre de Fréchet $C^\infty([0,1])$, qui n'est pas noethérienne, admet des idéaux premiers maximaux pour la propriété "non de type fini". Plus précisement, on a le résultat suivant.

Mais d'abord ces deux lemmes. Le premier est purement algébrique, le second est une extension du lemme I.1.

Lemme II.1. *Soit A une algèbre commutative unitaire noethérienne intègre dans laquelle tout idéal premier non nul est maximal et principal. Alors A est principale.*

Preuve. Soit Q un idéal primaire non nul de A et P son radical. Il existe $x_0 \in A$ tel que $P = Ax_0$. Par ([2], Corollaire, p.241), il existe n tel que $Q \subset Ax_0^n$ et $Q \not\subseteq Ax_0^{n-1}$. Il en résulte que $Q = Ax_0^n$. Si I est un idéal non nul quelconque de A, alors, par [5], Corollaire, p. 109, il existe $Q_1, \ldots, Q_r$ des idéaux primaires de A tel que $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$. Par ce qui précède, il existe des idéaux maximaux $Ax_1, \ldots, Ax_r$ deux à deux distincts et des entiers $n_1, \ldots, n_r$ tel que $Q_i = Ax_i^{n_i}$. Comme les Ax_i sont maximaux, on a $I = Ax_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$.

Lemme II.2. *Soit A une F-algèbre unitaire dans laquelle tout idéal à gauche maximal est fermé et I un idéal à gauche de A tel que $\overline{I}$ soit de type fini. Alors I est fermé.*

Preuve. Supposons que I n'est pas fermé. Considérons $\mathcal{F}$ la famille des idéaux à gauche J de A non fermés tel que $I \subset J \subset \overline{I}$. On montre sans difficulté que cette famille est inductive (pour l'inclusion). Soit J_0 un élément maximal de $\mathcal{F}$. Alors J_0 est nécessairment de type fini. Supposons que ce n'est pas le cas. Considérons la famille $\mathcal{G}$ des idéaux à gauche J de A, non de type fini, tel que $J_0 \subset J \subset \overline{I}$. Cette famille est également inductive. Soit J_1 un élément maximal de $\mathcal{G}$. Si J_1 contient strictement J_0, alors, vu le caractère maximal de J_0 dans $\mathcal{F}$, J_1 est fermé et donc nécessairement $J_1 = \overline{I}$ ce qui ne peut être le cas puisque J_1 n'est pas de type fini. Ainsi $J_0 = J_1$.

Considérons maintenant $x \in \overline{J_0} \backslash J_0$. L'idéal à gauche $J_0 + Ax$, de A, contient strictement J_0 donc il est fermé et par suite $J_0 + Ax = \overline{I} = \overline{J_0}$. Soit alors $x_1, \dots, x_n \in J_0$ tel que:

$$\overline{J_0} = Ax_1 + \cdots + Ax_n + Ax$$

et φ l'application linéaire continue définie de A^{n+1} vers $\overline{J_0}$ par:

$$\varphi(a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i + a_{n+1} x.$$

Par le théorème de l'application ouverte, φ est ouverte. Posons

$$J = \{\, a \in A : ax \in J_0 \,\}.$$

C'est un idéal à gauche de A. Soit M un idéal à gauche maximal de A. Par hypothèse, $A \backslash M$ est un ouvert de A et donc $\varphi((A\backslash M)^{n+1})$ est un ouvert de $\overline{J_0}$. Par suite $\varphi((A\backslash M)^{n+1}) \cap J_0$ est non vide. Il existe alors $a_1, \dots, a_{n+1} \in A\backslash M$ tel que $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i + a_{n+1} x \in J_0$. Il en résulte que $a_{n+1} x \in J_0$ et par suite que $a_{n+1} \in J$. Ainsi J n'est contenu dans aucun idéal à gauche maximal de A et donc $J = A$. Il s'ensuit que $x \in J_0$, ce qui n'est pas le cas. Finalement l'idéal à gauche I est fermé. ■

Proposition II.3. *Soit A une a.l.m.c. de Fréchet commutative unitaire dans laquelle tout idéal maximal est principal et qui n'est pas noethérienne. Soit P un idéal maximal, pour la propriété "non de type fini", de l'algèbre A. Alors:*

i) P est un idéal premier fermé de A,

ii) Il existe $a \in A$ tel que $P = \bigcap_{n \geq 0} Aa^n$.

iii) L'algèbre de Fréchet quotient A/P est principale et est sans diviseurs topologiques de zéro non nuls.

Preuve. D'abord, par [6], Théorème 5.2, c), p. 21, tout idéal maximal de A est fermé. La preuve du théorème I. 3 permet d'affirmer que P est premier. Par le lemme II.2, P est fermé. D'où l'assetion i). Montrons ii). Considérons $a \in A$ tel que Aa soit un idéal maximal de A et contenant P. Comme P, qui est premier, est distinct de Aa, on a $P \subset \bigcap_{n \geq 0} Aa^n$. Par ailleurs, l'algèbre quotient A/P est noethérienne et intègre. Donc par [2], Corollaire, p. 241,

$$\bigcap_{n \geq 0} (Aa^n + P/P) = \{\overline{0}\}.$$

Comme $P \subset \bigcap_{n \geq 0} Aa^n$, on aura $P = \bigcap_{n \geq 0} Aa^n$. D'où l'assertion ii).

D'autre part, d'après [3], Sholie, p. 29, tout idéal premier non nul de A/P est maximal. On conclut que A/P est principale par le lemme II.1. Par ailleurs, d'après [4], Théorème 3, p. 162, tout idéal de l'algèbre A/P est fermé. Comme elle est intègre, on déduit, via le théorème de l'application ouverte, qu'elle est sans diviseurs topologiques de zéro non nuls. D'où l'assertion iii). ∎

Comme conséquences, nous retrouvons, d'une part, le caractère premier d'une famille d'idéaux de l'algèbre $C^\infty([0,1])$ et, d'autre part, une autre propriété algébrique de l'algèbre quotient $C^\infty([0,1])/P$.

Corollaire II.4. *Pour tout* $\lambda \in [0,1]$, *l'idéal* $\bigcap_{n\geq 0} C^\infty([0,1])x_\lambda^n$ *de* $C^\infty([0,1])$ *est premier.*

Preuve. Par la proposition II.3, il existe $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que $\bigcap_{n\geq 0} C^\infty([0,1])x_{\lambda_0}^n$ est premier. D'autre part, si $\lambda \in [0,1]$, il existe un automorphisme d'algèbres de $C^\infty([0,1])$ appliquant l'idéal $\bigcap_{n\geq 0} C^\infty([0,1])x_\lambda^n$ sur l'idéal $\bigcap_{n\geq 0} C^\infty([0,1])x_{\lambda_0}^n$. D'où le corollaire. ∎

Corollaire II.5. *Soit* P *un idéal maximal, pour la propriété "non de type fini", de l'algèbre* $C^\infty([0,1])$. *L'algèbre quotient* $C^\infty([0,1])/P$ *est de valuation discrète.*

Preuve. Par la proposition II.3, l'algèbre $C^\infty([0,1])/P$ est principale. On montre facilement, via le corollaire II.4, qu'elle admet un seul idéal maximal. ∎

REFERENCES

[**1**] B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, L.N.M. **735**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979.

[**2**] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Chapitres 1 à 4*, Masson, (nouveau tirage), Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1985).

[**3**] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Chapitres 8 et 9*, Masson, Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1983).

[**4**] R. Choukri, A. EL. Kinani, M. Oudadess, *Algèbres topologiques à idéaux à gauche fermés*, Studia Mathematica, **168** (2) (2005), 159–164.

[**5**] J. P. Lafon, *Algèbre commutative, Langages géométrique et algébrique*, Hermann, Paris, 1977.

[**6**] E. A. Michael, *Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **11**, Providence (1952).

[**7**] M. Singer and J. Wermer, *Derivations on commutatives normed algebras*, Math. Annalen, **129** (1955), 260–264.

(received 03.04.2007)

R. Choukri, Ecole Normale Supérieure, B.P. 5118. Takaddoum, 10105, Rabat, Maroc.

E-mail: `rachoukri@yahoo.fr`

A. EL Kinani, Ecole Normale Supérieure, B.P. 5118. Takaddoum, 10105, Rabat, Maroc.

E-mail: `abdellah_elkinani@yahoo.fr`

A. Oukhouya, Ecole Normale Supérieure, Marrakech, Maroc.

E-mail: `aoukhouya@hotmail.com`