Champs Associés aux Systémes Dynamiques Autonomes

V.Obădeanu

Résumé

On considère une variété riemannienne (M, g) muni d'un système dynamique non-autonome (spray non-autonome) ; a ceux-ci on associe canoniquement une théorie de champ : potentiel, champ, courant et des ondes, et les équations qui caractérisent, généralement les équations classiques.

1. Soit V une variété différentiable de classe C^∞ et de dimension $2m$. Dans l'ensemble des 2−formes définies sur $E = \mathbb{R}\times V$, de rang $2m$, on définit une relation d'équivalence. Nous dirons que deux 2−formes Ω_0 et Ω sont équivalentes, et nous écrirons $\Omega_0 \sim \Omega$, si Ω_0 et Ω admettent les mêmes caractéristiques. A lieu :

Théorème. *Dans toute classe d'équivalence il existe (au moine locallement) une* $2-$*forme* Ω' *fermée et donc pré-symplectique.*

Démonstration. Supposons donnée sur l'espace E (dim $E = 2m+1$) une 2−forme Ω_0 de rang $2m$ qui, localement s'écrit sous la forme :

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}a_{ij}dx^i \wedge dx^i + a_i dx^i \wedge dt, (a_{ij} = -a_{ji} \text{ et } \det(a_{ij}) \neq 0). \tag{1}$$

Les équations caractéristiques de Ω sont :

$$i_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Omega_0 = a_{ij}dx^j + a_i dt = 0. \tag{2}$$

Chercheons une 2−forme

$$\Omega' = \frac{1}{2}b_{ij}dx^i \wedge dx^j + b_i dx^i \wedge dt, (b_{ij} = -b_{ji}, \det(b_{ij}) \neq 0) \tag{3}$$

férmée et admettant les mêmes caractéristiques que Ω_0. Ses caractéristiques sont donnée par :

$$b_{ij}dx^i + b_i dt = 0. \tag{4}$$

Les formes Ω et Ω' sont équivalentes si les systèmes (1) et (4) sont équivalents ; c'est-à-dire s'il existe une matrice non dégénérée (g_i^j), telle que :

$$b_{ih}dx^h + b_i dt = g_i^j(a_{jh}dx^h + a_j dt); \det(g_i^j) \neq 0, \tag{5}$$

relations desquelles on obtient, par l'identification :

$$b_{ih} = g_i^j a_{jh}, b_i = g_i^j a_j. \tag{6}$$

La condition que Ω' soit férmée se traduit par :

$$b_{ij} + b_{ji} = 0, \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} = 0, \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}, \tag{7}$$

où, dans la deuxième relation la somme se fait suivant les permutations circulaires de (i,j,k), et dans la dernière : $1 \leq i < j \leq 2m$.

En tenant compte de (6) et (7), on arrive à :

$$g_i^j a_{jh} + g_h^j a_{ji} = 0, \quad \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial}{\partial x^k}(g_i^p a_{pj}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(g_i^p a_{pj}) = \frac{\partial (g_i^p a_p)}{\partial x^i} - \frac{\partial (g_j^p a_p)}{\partial x^i}. \tag{8}$$

Ayant en vue que la matrice (a_{ij}) est inversible, de la deuxième relation (8) on obtient :

$$\frac{\partial g_i^p}{\partial t} = \mathcal{F}_i^p(t, x^j, g_k^h, \frac{\partial g_k^h}{\partial x^r}), \tag{9}$$

équations qui, en base du théorème de Cauchy-Kovalewskaya, assurent que le système (8) admet de solutions (dans certaines conditions de différentiabilité que nous les supposons satisfaites).

2. Soient M une varété différentiable C^∞, à m dimensions, $E = \mathbb{R} \times TM$ l'espace d'évolution et $\{\theta^i\}$ les formes de contact, dont l'expression locale est $\theta^i = dx^i - y^i dt$.

Un spray non–autonome est un champs de vecteures $S \in \mathcal{X}(E)$, qui vérifie les propriétés :

$$dt(S) = 1,$$

$$\theta^i(S) = 0.$$

Dans une carte locale $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M, avec les coordonnées (x^h) et respectivement la carte vectorielle $(\overline{\mathcal{U}}, \phi)$ correspondante sur E, avec les coordonées (t, x^i, y^i), l'expression analytique du spray S est :

$$S = \frac{\partial}{\partial t} + y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad S^i \in C^\infty(E). \tag{10}$$

Les équations différentielles de S sur $\mathbb{R} \times TM$ sont :

$$\frac{dx^i}{dt} = y^i, \quad \frac{dy^i}{dt} = S^i(t,x,y). \tag{11}$$

et les équations différentielles du deuxièmes ordre des projections des trajectoires ci-dessus, sur M, sont :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = S^i(t, x, \frac{dx}{dt}), \tag{12}$$

équations qui modèlent la dynamique du système nonautonome.

3. Soit donné le système dynamique (12), associé au spray (10), à l'aide du système (11) on construit la 2−forme :

$$\Omega_0 = (dy^i - S^i dt) \wedge (dx^i - y^i dt) = dy^i \wedge dx^i + (S^i dx^i - y^i dy^i) \wedge dt, \tag{13}$$

nomée la forme de Lagrange et dont les caractéristiques sont des trajectoires du système dynamique.

En base du théorème ci-dessus, au système dynamique donné on lui associe une 2−forme de la forme la plus générale,

$$\Omega = g_{ij} dy^i \wedge dx^j + (E_i dx^i + P_i dy^i) \wedge dt + \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} Q_{ij} dy^i \wedge dy^j, \tag{14}$$

avec les caractéristiques données par le système :

$$\begin{aligned} &B_{ij} dx^j - g_{ji} dy^j + E_i dt = 0 \\ &g_{ij} dx^j + Q_{ij} dy^j + P_i dt = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

auquel les on ajoute leurs combinasion linéaire :

$$E_i dx^i + P_i dy^i = 0.$$

Les systèmes (11) et (15) ont les mêmes caractéristiques si et seulement si

$$\det = \begin{pmatrix} B_{ij} & -g_{ji} \\ g_{ij} & Q_{ij} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{16}$$

et s'ils sont satisfaites les conditions de Lorentz :

$$\begin{aligned} E_i &= B_{ji} y^j + g_{ji} S^j, \\ P_i &= -(g_{ij} y^j + Q_{ij} S^j). \end{aligned} \tag{17}$$

En tenant compte des relations (17), la famille de ces formes se construit par les coefficients antisymétiques B_{ij} et Q_{ij}.

4. En base du théorème ci-dessus, dans la famille de la forme ci-dessus précisée, du type (14) avec les conditions (16) et (17), il existe des formes fermées. La propriété de la forme Ω d'être fermée porte le nome du *Principe de Maxwell* [5].

Le principe de Maxwell imposé à la forme (14) nous conduit aux équations :

$$\begin{aligned}
&a)\ \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial y^j} + \frac{\partial Q_{ij}}{\partial x^h} = 0\ , \qquad && b)\ \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} - \frac{\partial B_{ij}}{\partial y^h} = 0\ , \\
&c)\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_j}{\partial y^i} - \frac{\partial P_i}{\partial x^j} = 0\ , && d)\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} = 0\ , \\
&e)\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial y^i} - \frac{\partial P_i}{\partial y^j} = 0\ , && f)\ \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^h} = 0\ , \\
&g)\ \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial y^h} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

(i, j, k) en désignant une permutation circulaire. Ces équations porte le nome des *équations de Maxwell*, elles généralisent les équations de Maxwell de l'électrodynamique.

5. Nous appelons la $2-$forme Ω, avec la propiété d'être fermée, *forme champ*, et les équations de type Maxwell (18), *équations de champ*.

La $2-$forme Ω etant fermée, elle est localement exacte, il existe donc une $1-$forme λ sur $\mathbb{R} \times TM$ telle que $d\lambda = \Omega$. Soit :

$$\lambda = -V dt + A_i dx^i + C_i dy^i.$$

Cette $1-$forme porte le nome de *forme potentiel.*

En calculant sa differetielle et en identifiant les coefficients de la différentielle avec ceux de Ω, on obtient le système :

$$\begin{gathered}\frac{\partial V}{\partial x^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = -E_i, \quad \frac{\partial V}{\partial y^i} + \frac{\partial C_i}{\partial t} = -P_i,\\ \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \frac{\partial A_i}{\partial x^i} = B_{ij}, \quad \frac{\partial C_j}{\partial y^i} - \frac{\partial C_i}{\partial y^j} = Q_{ij},\\ \frac{\partial A_j}{\partial y^i} - \frac{\partial C_i}{\partial x^j} = g_{ij}.\end{gathered} \tag{19}$$

Le potentiel λ est déterminé à une différentielle près. Un changement de potentiel de la forme :

$$\overline{\lambda} = \lambda + d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - V\right) dt + \left(A_i + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) dx^i + \left(C_i + \frac{\partial \phi}{\partial y^i}\right) dy^i, \tag{20}$$

ne change pas le champ. On peut choisir la fonction ϕ telle que $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = V$, tel que le potentiel se simplifie.

6. Le formalisme que nous avons présenté ci-dessus, porte le nome du *formalisme de Gallissot-Souriau* (G-S).

On appelle le *problème direct* du formalisme G-S, la donné e d'une $2-$forme pré-symplectique Ω sur $\mathbb{R} \times TM$ (de rang $2m$ et fermée) et la détermination du spray (champ de forces), pour lequel Ω est la forme de Lagrange.

Sa résolution consiste en l'écriture des équations des caractéristiques (15) et de mettre celles-ci dans la forme équivalente newtonienne (12).

Pratiquement, on donne, dans le cas le plus général, une $2-$forme (14), fermée et de rang $2m$. Avec l'hypothèse (16), des équations (17) on exprime S^i, ensuite on ecrivent les équations de Newton (12).

On appelle *problème inverse* dans le formalisme G-S, la donnée des équations (12) et la détermination d'une $2-$forme pré-symplectique (fermée et de rang $2m$) dont les caractéristiques sont exactement les solutions des équations de Newton.

Le résultat c'est que tout système newtonien (nondégénéré) admet une représentation G-S. C'est un cas particulier du théorème ci-dessus. On associe au système des équation newtoniennes la $2-$forme Ω_0 (13). Dans la classe d'équivalence de celle-ci il existe une qui est fermée.

Si le système (18) admet deux solutions, alors toute combinaison linéaire de celles-ci, à coefficients réels, est de même une solution.

7. Supposons que la variété M est un espace de Riemann, avec la métrique g, celle-ci définie une connexion linéaire Γ (de Levi-Civita), avec les coefficients $\Gamma^i_j = \Gamma^i_{hj}y^h$ (où Γ^i_{hj} sont les coefficients de Christoffel) et, à la foi, la famille des corepères adaptés [3],

$$(dx^i, \delta y^i = dy^i + \Gamma^i_h dx^h) \ . \tag{21}$$

À l'aide de ceux-ci, la métrique g, définie sur M, peut se relever sur la variété tangente TM, à une métrique G, définie par :

$$G_{ab}dz^a dz^b = g_{ij}(dx^i dx^j + \delta y^i \delta y^j), \tag{22}$$

où par (dz^a) on a noté la cobase $(dx^i, \delta y^i)$.

La métrique G a la matrice des coefficients, dans le repère naturel :

$$(G_{ab}) = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{hk}\Gamma^h_i\Gamma^k_j & g_{ih}\Gamma^h_j \\ g_{jh}\Gamma^h_i & g_{ij} \end{pmatrix},$$

et dans le repère adapté :

$$(G_{ab}) = \begin{pmatrix} g_{ii} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit qu'elle est symétrique, nondégénérée et positivement définie. Par rapport avec cette métrique, les espaces VTM et HTM sont ortogonaux.

L'espace $E = \mathbb{R} \times TM$, peut être maintenant muni de la métrique pseudoéuclidienne :

$$\gamma = dt^2 - G.$$

8. Soit maintenant donné sur $\mathbb{R} \times TM$, un système dynamique autonome ou non (le spray) (10). À celui-ci lui correspond la $2-$forme α (de la forme (14)), fermée et caractéristique pour le système. À la forme champ α on lui associe une *théorie de champ*, comme suit :

1° La forme α étant fermée, elle est localement exacte et donc lui corespond une $1-$forme λ, telle que $\alpha = d\lambda$, la $1-$forme λ porte le nome de *forme potentiel.* Etant donnée la forme potentiel λ, la forme champ α est uniquement déterminée, reciproquement, si l'on donne α, son potentiel est déterminé, à une différentielle totalle près.

2° En utilisant l'opérateur d'autoadjonction $*$ de Hodge-de Rham, à côté de la $2-$forme α, on met de même en évidence une $(m-2)-$forme $\beta = *\alpha$. Ensemble les formes α et β définissent ce que nous appellerons un *champ*. Pour la définition du champ, il suffit la connaissance de l'une de ces deux formes, chaqu'une d'elles détermine l'autre par $*$ et par les propriétés, comment nous verons plus bas.

3° Avec la $1-$forme λ on associe la $(m-1)-$forme ξ, par la formule $\lambda = *\xi$. Ensemble les formes λ et ξ définissent, pour le champ donné, ce que nous appellerons le *potentiel* du champ.

4° Généralement, la forme β n'est pas femée, donc a lieu une relation de la forme $d\beta + \gamma = 0$, ou γ est une $(m-1)-$forme. La forme γ porte le nome de *forme courant*, ensemble avec la $1-$forme $\theta = *\gamma$.

5° Des définitions données ci-dessus, on déduit les équations de Maxwell suivantes, pour le potentiel : $d\xi = 0, d\lambda = \alpha$; pour le champ : $d\alpha = 0, d\beta + \gamma = 0$; por le courant : $d\gamma = 0, d\theta - v = 0$, etc.

6° En utilisant l'opérateur de Laplace-d'Alembert Δ, on arrive aux équations suivantes, appelées *de propagation* ; pour le potentiel : $\Delta\xi = d\delta\xi$, pour le champ : $\Delta\alpha = d\delta\alpha$ et pour le courant : $\Delta\gamma = d\delta\gamma$.

7° L'équation $d\gamma = 0$ est connue sous le nome de *l'équation de continuité*. Une équation importante, qui définit le potentiel par le courant (où le courant par le potentiel) est l'équation : $\Delta\lambda = *\gamma$, si le courant est nul, le potentiel est une forme harmonique.

8° Les équations de type Maxwell et de propagation, ci-dessus déterminées, sont respectivement équivalentes avec des autres équation qui utilisent la codifférentielle.

En conclussion, à tout système dynamique (spray) sur une variété riemannienne, on lui associe une $2-$forme fermmée Ω. Celle-ci joue le rôle de $2-$forme α (sur $\mathbb{R}\times TM$), et par suite, on lui associe une théorie de champ, et donc, un champ et des ondes, comme solutions des équations de propagation.

Références

[1] F. Gallisot, *Les formes extérieures en mécanique*, Ann. de l'Inst. Fourier, t.IV (1952), 145-247.

[2] J. Grifone, *Structures presque-tangentes et connexions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 22, Nn. 1 (1972), 287-334 ; vol. 22, Nn. 3, (1972), 291-338.

[3] R. Miron, M. Anastasiei, *Fibrate vectoriale. Spaţii Lagrange. Aplicaţii în teoria relativităţii*, Edit. Acad. RSR, Bucureşti (1987).

[4] V. Obădeanu, *Systémes dynamiques nonautonomes et des champs associés*, Univ. Vest Tim., Sem. Mec. Nr. 53 (1997).

[5] J. -M. Souriau, *Structure des systémes dynamiques*, Dunod, Paris (1970).

[6] K. Yano, S. Ishiahara, *Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry*, Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks. Marcel Dekker Inc., New York (1973).

Facultatea de Matematică
Universitatea de Vest din Timişoara
1900 Timişoara, România