De la Comprehension des Processus d'Apprentissage a la Conception de Processus d'Enseignement

Michèle Artigue

I. Introduction

La recherche en didactique des mathématiques, par ses travaux théoriques et expérimentaux nous donne aujourd'hui les moyens de mieux comprendre les processus d'apprentissage en mathématiques, des premiers apprentissages de l'école élémentaire à ceux en jeu à l'université, ainsi que de mesurer les effets des stratégies d'enseignement usuelles. La question de savoir comment tirer parti de cette connaissance pour améliorer l'enseignement reste cependant largement ouverte. A travers elle, se pose celle de l'utilité des recherches didactiques mais aussi celle des cadres théoriques adéquats pour penser le fonctionnement de systèmes complexes comme le sont les systèmes d'enseignement. C'est à ces questions que nous nous intéressons dans ce texte, en privilégiant au niveau des exemples l'enseignement des mathématiques à l'université ou à la transition lycée/université.

II. Qu'est-ce qu'apprendre des mathématiques ? Comment les apprend-t-on ? La diversité des positions épistémologiques

Toute réflexion sur l'apprentissage ou l'enseignement des mathématiques s'appuie, sur des présupposés épistémologiques, même si ces derniers restent souvent largement implicites. Ces présupposés peuvent être, comme le montrent différents travaux, relativement divers (Steiner, 1988). Ils jouent sans aucun doute un rôle restreint dans le travail quotidien des mathématiciens mais ils façonnent leur vision de cette science, de ce qui fait sa spécificité, de ses rapports avec les autres sciences mais aussi avec les pratiques sociales et donc, de ce fait, leur vision des valeurs à transmettre dans l'enseignement.

Cette diversité des présupposés épistémologiques possibles se retrouve, tout aussi grande, au niveau des théories de l'apprentissage. Les trente dernières années ont été marquées sur ce plan, dans le monde de l'éducation, par une domination nette des approches constructivistes, issues de l'épistémologie génétique piagétienne (Brun, 1996). Dans ces approches, l'apprentissage est conçu comme un processus d'adaptation individuel, basé sur des processus d'assimilation et d'accommodation conduisant à l'élaboration de schèmes. Il y a assimilation lorsque les nouvelles situations rencontrées peuvent être prises en charge par de simples adaptations des schèmes cognitifs déjà construits, accommodation lorsqu'un déséquilibre cognitif important se fait jour, nécessitant une réorganisation structurelle. La théorie piagétienne ne se réduit bien sûr pas à cela mais ses autres dimensions n'ont pas eu en éducation mathématique une influence aussi durable.

Les approches constructivistes ont permis de porter un nouveau regard sur l'apprentissage, en montrant qu'il n'est pas le fruit d'un simple processus de transmission des savoirs. Elles ont permis de mieux appréhender la complexité des processus cognitifs dont il résulte et de mettre en évidence le rôle joué dans ces processus par les connaissances antérieures du sujet, par ses conceptions initiales. Elles sont cependant aujourd'hui de plus en plus considérées comme insuffisantes pour modéliser, de façon satisfaisante, les processus d'apprentissage en mathématiques car la dimension sociale et culturelle des apprentissages n'y est pas suffisamment bien prise en compte.

Parallèlement à ce qui se produit dans les travaux d'histoire et de philosophie des mathématiques, ce sont ces dernières dimensions que l'on essaie aujourd'hui de mieux prendre en charge dans les cadres théoriques élaborés. Comme le soulignent A. Sierpinska et S. Lerman (1996) dans leur revue de ces questions, ceci conduit à des constructions diverses qui se différencient notamment par la façon dont elles conçoivent les rapports entre l'individuel et le culturel dans l'apprentissage. Ainsi, dans les approches qualifiées de socio-culturelles, l'apprentissage est d'abord vu comme un processus d'enculturation. Il est social avant d'être intériorisé ; les médiations de pairs et d'adultes, comme les médiations instrumentales par des outils culturels y jouent un rôle fondamental. Les approches interactionistes, quant à elles, ne veulent réduire l'apprentissage, ni à un processus d'adaptation individuelle, ni à un processus d'enculturation dans une culture pré-établie. Ce qui y devient central, ce sont les interactions entre individus à l'intérieur d'une culture qui façonne ces interactions en même temps qu'elle est façonnée par elles. C'est à partir de ces interactions que se construisent, via des processus d'interprétation, les significations individuelles ; c'est le type de ces interactions qui conditionne les formes de connaissance accessibles (Cobb, Bauersfeld, 1995).

Comme le soulignent également A. Sierpinska et S. Lerman, la recherche didactique française a suivi depuis les années 70 un chemin analogue mais original. Elle se situe au départ dans le paradigme constructiviste mais la théorie des situations (Brousseau, 1997), qui en est un des piliers, met au centre de l'analyse, non le sujet apprenant mais les relations qu'il entretient avec le savoir mathématique, ses pairs et l'enseignant, au sein de la situation d'enseignement. C'est l'étude de ces relations qui permet de donner sens aux comportements observés et de les interpréter en termes d'apprentissage. L'apprentissage de l'élève y est de plus vu comme résultant d'un équilibre complexe, variable suivant les individus et les contextes, entre une adaptation " mathématique " et une adaptation aux attentes de l'enseignant et donc de l'institution, même si ces dernières restent largement implicites. Cette dimension institutionnelle de l'apprentissage est prise en compte de façon plus centrale dans l'approche anthropologique développée par Y. Chevallard (1990). L'apprentissage, selon lui, va résulter des rapports aux objets mathématiques que l'élève va nouer au sein des différentes institutions auxquelles il appartient. Il ne se constitue pas non plus indépendamment des rapports à d'autres objets : le rapport à l'Ecole, notamment. Le sujet est donc ici présent avec ses motivations, ses affects, mais ses apprentissages sont contraints par des rapports institutionnels qui se constituent en normes, des normes qui peuvent être, pour un même objet mathématique, sensiblement différentes d'une institution à l'autre.

La diversité des constructions théoriques que nous venons d'évoquer n'exclut pas, fort heureusement, les points de consensus. Sans rentrer plus avant dans l'analyse comparée des différentes positions, nous voudrions en citer quelques uns :

1. L'apprentissage des mathématiques est un processus complexe dans lequel s'imbriquent étroitement l'individuel, le social et le culturel.

2. L'apprentissage des mathématiques n'est pas un processus " continu ". Il nécessite des reconstructions, réorganisations voire parfois de véritables ruptures avec des connaissances et des modes de pensée antérieurs.

3. L'apprentissage des mathématiques ne peut être conçu comme une simple progression vers des niveaux croissants d'abstraction. Il met en jeu de façon tout aussi essentielle la flexibilité du fonctionnement mathématique via notamment l'articulation de points de vue, de registres de représentation, de cadres de fonctionnement mathématique.

4. L'apprentissage des mathématiques est fortement dépendant des instruments matériels et symboliques du travail mathématique. Cette dépendance, qui concerne à la fois ce qui est appris et les modes d'apprentissage, est particulièrement importante à prendre en compte aujourd'hui du fait de l'évolution technologique.

Il s'agit là d'affirmations générales, tout comme le sont les différents cadres théoriques que nous avons évoqués jusqu'ici. Percevoir leur intérêt réel pour l'étude des processus d'apprentissage en mathématiques nécessite, nous semble-t-il, de s'interroger sur des apprentissages précis. C'est ce que nous ferons dans les deux paragraphes suivants, en privilégiant des domaines mathématiques qui posent des problèmes d'enseignement reconnus au niveau universitaire : l'analyse et l'algèbre linéaire. Cette particularisation nous servira également à souligner le rôle essentiel joué dans le travail didactique par l'analyse épistémologique des domaines mathématiques concernés. Vu les contraintes d'espace imposées à ce texte, nous avons choisi de centrer l'exposé sur deux des points évoqués ci-dessus, à savoir les points 2 et 3.

III-Reconstructions et ruptures dans l'apprentissage et l'enseignement mathématique

Si nous avons choisi ce point, c'est que l'enseignement, les recherches le montrent clairement, tend à sous-estimer l'importance de ces reconstructions et ruptures et les difficultés résistantes qu'elles posent à la majorité des élèves et étudiants lorsqu'elles sont laissées à leur seule responsabilité. Nous l'aborderons à partir d'exemples issus du champ de l'analyse élémentaire (" Calculus " dans la culture anglo-saxone). Il montre bien, nous semble-t-il, la nécessité de telles reconstructions et la diversité de leurs types possibles. Les reconstructions vont concerner tout d'abord des objets anciens qui existent pour les élèves avant que ne débute l'enseignement de l'analyse. C'est le cas par exemple pour la notion de tangente qui a été introduite dans un contexte géométrique et qui, pour entrer dans le champ de l'analyse, doit perdre certains de ses attributs et en gagner d'autres, les représentations mentales associées devant se modifier en conséquence (Castela, 1995).

D'autres reconstructions vont s'avérer nécessaires parce que seules certaines facettes d'un concept seront présentes dans un premier contact mais aussi parce qu'il ne serait pas réaliste.de viser d'emblée les rapports les plus aboutis. H. Poincaré le soulignait déjà au début du siècle, dans une conférence sur les définitions en mathématiques (Poincaré, 1904). Y évoquant les notions de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité des fonctions, il rappelait combien l'intuition avait été trompeuse pour les mathématiciens et il insistait sur le fait que ces problèmes n'avaient pu être surmontés qu'en faisant primer la rigueur logique sur l'intuition. Mais un tel choix lui semblait catastrophique pour un débutant et il écrivait notamment :

" Nous voilà donc obligés de revenir en arrière ; sans doute est-il dur pour un maître d'enseigner ce qui ne le satisfait pas entièrement ; mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement ; on doit d'abord se préoccuper de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne. "

a. Les reconstructions internes au champ de l'analyse : le cas de l'intégrale

Le cas de l'intégrale nous paraît bien illustrer cette situation. En France et dans de nombreux pays, l'intégrale est introduite dans l'enseignement secondaire via la notion de primitive, donc comme processus inverse de la dérivation, puis appliquée à des calculs simples d'aires et de volumes, en se basant sur un rapport intuitif à ces notions. Ce n'est qu'au niveau universitaire qu'est introduite une théorie de l'intégration, via l'intégrale de Riemann puis, à des niveaux plus avancés, la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue. Il y a là nécessairement en jeu des reconstructions successives et délicates du rapport à la notion d'intégrale. Les recherches que nous avons menées sur les procédures différentielles et intégrales ont montré les limites évidentes de l'enseignement usuel dans ce domaine (Alibert & al., 1989). Certes les étudiants atteignaient un niveau de performance raisonnable dans la résolution d'exercices mathématiques standard mais, ayant à décider, si telle ou telle situation relevait ou non d'une procédure intégrale, par exemple dans des problèmes de modélisation, ils se trouvaient complètement démunis, ne devant leur salut qu'aux indices linguistiques dont les présentations scolaires de ce genre de problème sont en général truffées (tranches, contributions élémentaires, découpages infinitésimaux...). Pire, un certain nombre, interrogés, n'hésitaient pas à déclarer que, dans ce domaine, le plus sûr était de s'abstenir d'essayer de comprendre et de fonctionner mécaniquement.

La situation que nous allons présenter, élaborée par M. Legrand dans le cadre de cette recherche, a été conçue pour faire face à ce problème, en faisant réellement vivre aux étudiants le besoin de la procédure intégrale. Le problème posé est le suivant : calculer l'intensité de la force d'attraction exercée par un barreau homogène de 6 mètres de longueur, pesant 18kg, sur une masse ponctuelle de 2kg située dans son prolongement, à 3 mètres de son extrémité. On rappelle au départ aux étudiants l'expression de la force d'attraction entre masses ponctuelles.

Exploitée régulièrement depuis plus de dix ans, cette situation a fait la preuve de son efficacité et de sa robustesse. Nous allons essayer d'en faire percevoir les raisons en en démontant les ressorts didactiques. Les étudiants de première année d'université à qui elle est proposée ne reconnaissent pas d'emblée qu'il s'agit là d'un problème relevant d'une procédure intégrale. Ils n'en sont pas pour autant bloqués, notamment parce qu'ils disposent d'une stratégie pour attaquer le problème, inadaptée dans le cas présent mais souvent utilisée en physique : elle consiste à se ramener au cas de l'attraction entre masses ponctuelles en concentrant la masse de la barre en son centre de gravité. Dans les expérimentations, ce type de solution correspond toujours à un pourcentage important de réponses. Mais, dans un groupe de taille raisonnable, certains manifestent à coup sûr des doutes sur sa validité. Comment la tester ? Un des intérêts de cette situation réside dans le fait qu'un tel test est possible en appliquant la même méthode mais d'une autre façon : si elle est valide, elle doit le rester si l'on partage la barre en deux et si l'on applique le principe du centre de gravité séparément à chacun des morceaux. L'invalidation qui en résulte permet de mettre le doigt sur un facteur clef : la contribution d'un morceau du barreau dépend de sa distance à la masse ponctuelle et, à défaut de valeur précise, de proposer un encadrement de la valeur de la force cherchée. La technique à la base de l'invalidation peut alors être engagée dans un processus de raffinement successif du découpage qui aboutit à la conviction que la force, dont l'existence est physiquement assurée, peut être approchée d'aussi près qu'on le veut. Ce que l'on a mis en jeu n'est autre que le processus fondamental de la procédure intégrale. Il fonctionne ici comme " outil implicite " du travail mathématique, au sens développé par R. Douady (1984).

Dans le scénario didactique élaboré, les étudiants sont ensuite appelés à travailler sur des situations qui, dans des contextes divers, mettent en jeu ce même processus, puis à rechercher et expliciter les analogies existantes entre toutes ces situations pour aboutir aux caractéristiques de la procédure intégrale, en faisant ainsi un " outil explicite ". Ce n'est qu'à la suite de ce travail que tout ceci est mis en forme dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Riemann et qu'un travail sur l'intégrale en tant qu'objet est développé. Les évaluations régulièrement faites attestent de l'efficacité du dispositif global.

Nous voudrions insister sur le fait que l'efficacité de la situation décrite cidessus n'est pas uniquement liée à ses caractéristiques mathématiques. Le scénario didactique construit pour organiser la rencontre des étudiants avec cette nouvelle facette de l'intégrale est tout aussi crucial. Ce scénario joue de façon essentielle sur le caractère social de l'apprentissage : c'est par les débats au sein du groupe (qui peut dépasser une centaine d'étudiants dans les expérimentations menées) que se régule la situation ; c'est le jeu collectif qui permet de dépasser la stratégie du centre de gravité pour aboutir à la procédure intégrale, dans un temps raisonnable, sans que l'enseignant n'apporte lui-même la solution ; c'est le jeu collectif qui force des régularités dans les déroulements qui seraient beaucoup moins assurées si les étudiants étaient confrontés individuellement à la même situation et en fait sa robustesse didactique. Il en va de même pour l'ensemble du processus d'enseignement construit.

b. Les reconstructions internes au champ de l'analyse : le cas du concept de limite

Le paysage que nous venons de décrire peut paraître idyllique. Il faut toutefois reconnaître que toutes les reconstructions nécessaires au fil de l'apprentissage de l'analyse ne semblent pas aussi aisément gérables. Les différences sont par exemple sensibles si l'on s'intéresse au concept de limite. Dans beaucoup de pays aujourd'hui, une fois tirées les leçons de la période formaliste des mathématiques modernes, on a renoncé dans l'enseignement secondaire à fonder l'enseignement de l'analyse sur la notion formalisée de limite. Le premier contact avec ce domaine mathématique s'appuie sur des explorations graphiques et numériques aisément accessibles avec les calculatrices actuelles ; il est de l'ordre de l'empirique. On se contente d'une conception dynamique intuitive de la notion de limite, de techniques relevant d'une analyse algébrisée et de quelques théorèmes qui, une fois admis, permettent de gérer des problèmes simples de variation et d'optimisation. La transition vers une analyse formalisée, nécessite des reconstructions coûteuses, à la fois conceptuelles et techniques.

Sur le plan conceptuel, il y a là un saut qualitatif. En effet, ce qui est en jeu, épistémologiquement, à travers la formalisation du concept de limite, c'est avant tout la réponse à des besoins de fondements, de structuration du savoir. Un tel besoin est, les recherches l'attestent, difficile à faire ressentir aux étudiants via des situations analogues à celle décrite ci-dessus pour l'intégrale ; y être sensible nécessite déjà une culture mathématique certaine. C'est pourquoi des chercheurs comme A. Robert préconisent ici des stratégies didactiques spécifiques qui permettent de mieux prendre en compte cette dimension culturelle, en jouant sur des leviers métamathématiques (Robert et Robinet, 1996).

Mais la reconnaissance de ces difficultés de nature conceptuelle ne doit cependant pas conduire à sous-estimer les difficultés techniques de la reconstruction. Dans l'analyse algébrisée des premiers contacts, le travail technique continue à se situer dans la continuité des acquis algébriques. Le passage à une analyse formalisée suppose en particulier une reconstruction des rapports à l'égalité et des modes de raisonnement. L'égalité de deux objets ne résulte plus généralement d'équivalences successives, comme en algèbre, elle résulte d'une proximité à ϵ près, pour tout $\epsilon > 0$. La manipulation des inégalités prend d'ailleurs le pas sur celle des égalités. Parallèlement, aux raisonnements par équivalences successives basés sur la conservation d'égalités, se substituent des raisonnements par conditions suffisantes basés sur la perte contrôlée d'informations dans le traitement d'inégalités. Il y a donc là tout un monde technique nouveau qu'il faut identifier et apprendre à maîtriser. Dans le contexte de la massification de l'enseignement secondaire, une telle reconstruction revient sans aucun doute aujourd'hui à la charge de l'université, pour les filières où elle estime cette évolution de rapport nécessaire. Mais elle doit être alors pensée dans la durée, car elle s'y inscrit nécessairement, vu sa complexité.

Nous nous sommes dans cette partie exprimée en termes de “ reconstruction ”. Nous voudrions cependant souligner que certains chercheurs s'expriment plus nettement en termes de rupture, en se référant à la notion d'obstacle épistémologique empruntée au philosophe G. Bachelard (1938). C'est le cas par exemple dans divers travaux concernant la notion de limite et l'on pourra sur ce point se référer à la synthèse effectuée par B. Cornu (1991).

V. Flexibilité, apprentissage et enseignement

L'apprentissage mathématique est souvent perçu comme une spirale permettant d'accéder à des niveaux d'abstraction croissants. C'est cette vision que nous voudrions relativiser ici, en mettant l'accent sur le rôle joué dans l'apprentissage par l'articulation flexible entre cadres, registres de représentation, points de vue et plus généralement entre formes de pensée mathématique (Dreyfus, Eisenberg, 1996). Ceci nous semble d'autant plus important que le développement de ces flexibilités est, pour l'instant, comme le montrent les recherches, mal pris en charge par l'enseignement usuel. Nous le ferons en privilégiant cette fois le domaine de l'algèbre linéaire et en nous appuyant plus particulièrement sur la synthèse des recherches didactiques dans ce domaine que présente l'ouvrage édité par J.L. Dorier (1997). Comme le souligne cet auteur, l'algèbre linéaire trouve sa source dans différents cadres mathématiques qu'elle a permis d'unifier : cadre géométrique, cadre des équations linéaires, en dimension finie et infinie... Le développement d'une articulation flexible entre ces différents cadres, comme entre chacun d'eux et celui de l'algèbre linéaire abstraite qui permet de les réorganiser conceptuellement, apparaît alors comme une composante essentielle de l'apprentissage dans ce domaine. Ce développement s'appuie sur des articulations entre modes de raisonnement, niveaux de langage et de descriptions, points de vue, registres de représentation dont l'apprentissage n'a rien d'évident. Dans l'ouvrage cité, J. Hillel par exemple analyse les différents langages ou niveaux de représentations à l'oeuvre en algèbre linéaire et leur interaction : le langage de la théorie générale, le langage de R^n et le langage géométrique ; A. Sierpinska, A. Defence, T. Khatcherian et L. Saldanha identifient, quant à eux, trois modes de raisonnement : synthétique-géométrique, analytique-arithmétique et analytique structurel. Tout en soulignant le rôle de l'interaction entre ces modes dans le développement de l'algèbre linéaire, ils montrent, par une étude fine de situations de tutorat à l'université, que l'enseignement, tant par les activités qu'il propose, que par les formats d'interaction enseignant-étudiant qu'il utilise favorise peu le développement d'une articulation souple et cohérente de ces trois modes. Dans ce qui suit, nous évoquerons rapidement, vu les contraintes d'espace, des flexibilités qui outillent en quelque sorte les flexibilités précédentes et auxquelles l'enseignement usuel est tout aussi peu sensible.

a. Flexibilité entre registres de représentations

Le travail en algèbre linéaire mobilise divers registres de représentations sémiotiques (graphiques, tableaux, écriture symbolique, langue naturelle...). Comme le souligne R. Duval (1996), les représentations sémiotiques sont absolument nécessaires à l'activité mathématique car ses objets ne sont pas directement accessibles à la perception. Pourtant l'enseignement tend selon lui à les réduire à un rôle d'extériorisation et de communication et à voir dans la capacité à reconnaître, former, traiter ou convertir dans un autre registre, des représentations sémiotiques, un simple sous-produit de la conceptualisation. La recherche de K. Pavlopoulou (1994) sur la coordination des registres de représentation en algèbre linéaire met bien en évidence que les rapports entre appréhension conceptuelle et appréhension sémiotique sont bien plus complexes. Le module d'enseignement expérimental qu'elle a mis en place pour des étudiants redoublants tend de plus à montrer que l'enseignement, lorsqu'il se veut sensible à la dimension sémiotique du travail mathématique, peut permettre de surmonter des difficultés pourtant apparemment résistantes.

b. Flexibilité entre points de vue

Ce type de flexibilité intervient par exemple en algèbre linéaire dans les rapports entre points de vue cartésien et paramétrique, qui renvoient respectivement, à des caractérisations en termes de systèmes d'équations ou de systèmes de générateurs. Le travail en algèbre linéaire met en effet en jeu régulièrement le passage d'un point de vue à un autre, de façon explicite en dimension finie, de façon plus métaphorique ensuite. La thèse de M. Alves Dias (1998), menée avec à la fois des étudiants français et brésiliens de divers niveaux, met bien en évidence les difficultés résistantes rencontrées par les étudiants à développer une articulation efficace des deux points de vue. En témoignent par exemple les faibles pourcentages de réussite obtenus à un exercice aussi banal que le suivant :

> “ On considère dans R^3 les vecteurs suivants : a=(2,3,-1) b=(1,-1,-2) c=(5,0,7) d=(0,0,1). Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces vectoriels E et F engendrés respectivement par {a,b} et {c,d} ”,

et les nombreux dérapages formels qu'il occasionne (confusion coordonnées/paramètres conduisant à des intersections dans R^2 ou R^4, association brutale d'équations à des vecteurs...), les anticipations et contrôles dans le cadre géométrique ou dans celui des sytèmes linéaires n'étant visiblement ici d'aucun secours pour les étudiants concernés.

Mais ce que montre également cette recherche, à travers l'analyse de manuels représentatifs de l'enseignement dans les deux pays, c'est la très faible sensibilité à ces difficultés que semble manifester l'enseignement. Certes les étudiants disposent, via les techniques de résolution des systèmes linéaires, des moyens de gérer techniquement l'articulation des points de vue, mais ceci ne suffit pas visiblement à leur permettre de lui donner sens, à leur permettre de la gérer et contrôler de façon efficace. La dualité, lorsqu'elle est introduite, devrait leur permettre de repenser cette articulation et de mieux percevoir le rôle qu'y joue l'association vecteur / équation. Mais les deux mondes restent, pour la plupart des étudiants, des mondes trop distants que l'enseignement ne leur donne pas les moyens de connecter de façon efficace.

Cette faible prise en charge institutionnelle de l'articulation ne nous semble pas un cas isolé. Elle semble considérée comme allant de soi, une fois que l'on a “ compris ” la notion, comme s'il s'agissait d'une pure question d'intendance que l'on pouvait laisser au travail privé de l'étudiant. Les recherches montrent que ce n'est malheureusement pas le cas. La flexibilité n'est pas pour autant hors de portée, si l'on est attentif à son développement. Les travaux déjà cités tendent à le montrer en ce qui concerne l'algèbre linéaire. C'est aussi le cas si nous revenons au champ de l'analyse. De nombreux travaux dans ce domaine montrent que les technologies informatiques, si leur utilisation est soigneusement pensée, peuvent jouer un rôle décisif dans le développement d'articulations flexibles ainsi que dans une rééquilibration des rapports entre registre algébrique et graphique, faisant de ce dernier un instrument réellement efficace de l'activité mathématique (Tall, 1996). Nos propres recherches sur l'enseignement des équations différentielles vont dans le même sens, tout en montrant combien le changement de statut du registre graphique nécessaire à son opérationnalisation s'oppose aux rapports institutionnels dominants et est, de ce fait, difficile à négocier (Artigue, 1992).

VI. Des connaissances à leur exploitation : quelques éléments de réflexion

Nous avons essayé, dans ce qui précède, de montrer sur deux points très précis, des types d'apports que pouvaient fournir les travaux didactiques. Ceci ne permet bien sûr qu'une vision très partielle de la façon dont les questions d'apprentissage sont abordées dans le champ didactique et des résultats auxquels elles ont permis d'arriver. Mais ils nous serviront à revenir dans ce dernier paragraphe sur la question des rapports possibles entre les connaissances acquises et l'action sur le système d'enseignement. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, il ne s'agit pas là d'une question facile.

Les résultats des recherches en didactique nous aident indubitablement à mieux comprendre comment fonctionnent les élèves et étudiants, à identifier les difficultés qui jalonnent l'apprentissage, les raisons de résistances constatées à nos efforts d'enseignants, à analyser les liens que peuvent avoir certaines de ces difficultés avec les stratégies d'enseignement dominantes. Ils nous aident aussi, plus globalement, à comprendre les modes de fonctionnement et les dysfonctionnements des systèmes d'enseignement, à mettre en évidence, à ce niveau aussi, des régularités intéressantes.

La connaissance de ces difficultés, de ces dysfonctionnements ne fournit pas pour autant directement les moyens de les surmonter. Certes les travaux de recherche, ne se bornent pas à effectuer des constats et diagnostics ; dans de nombreux cas, ils ont conduit au développement de produits d'enseignement qui ont été expérimentés et évalués. Mais si l'on considère ces produits, ils ne nous permettent que rarement de penser que, par de minimes adaptations de notre enseignement, nous pourrions obtenir des gains substantiels. En général, au contraire, ils requièrent de la part des enseignants un engagement plus lourd que l'engagement standard et des changements substantiels de pratiques. Car ce qui est à réorganiser, ce n'est pas seulement le contenu de l'enseignement, c'est globalement l'ensemble des formes de travail de l'étudiant, pour lui permettre de rencontrer ces contenus de façon satisfaisante, pour lui permettre d'apprendre. C'est sans doute là le prix à payer pour trouver aux systèmes didactiques dans lesquels nous vivons de meilleurs équilibres de fonctionnement, en particulier dans le contexte actuel de massification de l'enseignement universitaire, mais montre clairement que la réussite de l'action dépend de facteurs et contraintes qui échappent au contrôle de la recherche.

A ceci s'ajoutent sans aucun doute, en particulier au niveau de l'enseignement supérieur, des difficultés spécifiques liées à la complexité des connaissances en jeu. Les apprentissages que nous avons évoqués dans ce texte, qu'il s'agisse de l'analyse ou de l'algèbre linéaire, sont des apprentissages qui s'articulent nécessairement avec de nombreux apprentissages antérieurs, des apprentissages qui ne peuvent être pensés et organisés que dans le long terme. La définition même à ce niveau de processus d'enseignement (en prenant donc en charge non seulement l'organisation des contenus mathématiques mais aussi leur gestion didactique) et leur évaluation posent des problèmes qui restent aujourd'hui largement ouverts.

Enfin, il faut reconnaître la complexité des systèmes dans lesquels s'inscrit l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Les connaissances sur le fonctionnement de ces systèmes que nous pouvons inférer des recherches sont bien trop partielles pour permettre d'en contrôler un fonctionnement qui restera nécessairement fortement indéterminé. Ceci marque bien la nécessaire limite d'actions, même fondées sur la recherche, la prudence nécessaire dans les essais de généralisations de dispositifs mis au point dans des conditions expérimentales particulières, l'importance de prévoir des systèmes de régulation de l'action qui permettent de pallier les limites de nos capacités de prédiction. Les idées, mêmes épistémologiquement et cognitivement les plus séduisantes, ne conduisent pas nécessairement à des stratégies pédagogiques viables, dans un enseignement de masse comme celui que nous connaissons aujourd'hui, dans un monde marqué par les incertitudes sociales. C'est ce que nous avons essayé de montrer en analysant l'évolution récente de l'enseignement secondaire de l'analyse en France (Artigue, 1996), c'est sans aucun doute aussi valable pour les enseignements universitaires. Mais, qu'elles qu'en soient les limites, chaque progrès dans la connaissance que nous avons du fonctionnement de cette complexité est précieux, il nous arme pour la comprendre et la piloter, en nous adaptant à des conditions sans cesses changeantes. Ces connaissances méritent d'être capitalisées. Elles le seront nous semble-t-il d'autant plus efficacement que les cadres théoriques qui nous serviront à les organiser ne réduiront pas trop drastiquement la complexité mais prendront en compte l'enseignement, l'apprentissage et leurs rapports, de façon équilibrée, dans leurs composantes non seulement cognitives et épistémologiques mais aussi culturelles et sociales.

RÉFÉRENCES :

Alibert & al., 1989. *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, IREM Paris 7

Artigue M., 1992. Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices, in E.Dubinski & G.Harel (eds), *The concept of function : some aspects of epistemology and pedagogy,* MAA Notes n°25, 109-132.

Artigue M., 1996. Learning and teaching elementary analysis, *Proceedings of ICMI 8*, Sevilla (à paraître).

Alves Dias M., 1998. *Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Thèse, Université Paris 7.

Bachelard G., 1938. *La formation de l'esprit scientifique*, J. Vrin, Paris.

Brousseau G., 1997. *The theory of didactical situations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Brun J., 1996. Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in J.Brun (ed), *Didactique des Mathématiques*, 19-43, Delachaux et Niestlé, Lausanne.

Castela C., 1995. Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°$15.1, 7-47$.

Chevallard Y., 1990. *La transposition didactique* (2ème édition), La Pensée Sauvage, Grenoble.

Cobb P., Bauersfeld H. (eds), 1995. *The emergence of mathematical meaning : interaction in classroom cultures*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, NJ.

Cornu B., 1991. Limits, in D.Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Douady R.,1984. *Dialectique outil-objet et jeux de cadre*, Thèse, Université Paris 7.

Dorier J.L. (ed), 1997. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dreyfus T., Eisenberg T., 1996. On different facets of mathematical thinking, in Sternberg & Benzeev (eds), *The Nature of Mathematical Thinking*, London : Reidel.

Duval R., 1996. *Semiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

Pavlopoulou K., 1994. *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination de registres de représentation sémiotique*, Thèse, Université de Strasbourg I.

Poincaré H., 1904. Les définitions en mathématiques, *L'enseignement des Mathématiques*, n°$6, 255-283$.

Robert A., Robinet J., 1996, La prise en compte du meta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°$16.2, 145-175$.

Sierpinska A., Lerman S., 1996. Epistemologies of mathematics and mathematics education, in A.J.Bishop & al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education,* 827-876, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Steiner H.G., 1988. Relations between historico-epistemological studies and research in mathematics education, in L.Bazzini & H.Steiner (eds), *Proceedings of the first Italian-German bilateral symposium on didactics of mathematics,* 25-35.

Tall D., 1996. Functions and calculus, in A.J.Bishop & al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education,* 289-325, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Michèle Artigue
IUFM de Reims et Equipe DIDIREM
Université Paris 7
Case 7018, 2 place jussieu
75251 Paris Cedex 05, France
artigue@gauss.jussieu.fr