Equidistribution Adélique des Tores et Équidistribution des Points CM

Pour John Coates, à l'occasion de son soixantième anniversaire.

L. Clozel, E. Ullmo

Received: January 4, 2006
Revised: April 28. 2006

Abstract. This paper discusses the relations between a conjecture, proposed by the authors, concerning the equidistribution of homogeneous subvarieties in arithmetic quotients; and the André–Oort conjecture.

1 Introduction

Dans un article récent [3] nous avons étudié la question suivante. Soient G un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{Q}$, $G(\mathbb{R})^+$ la composante neutre de $G(\mathbb{R})$ et $\Gamma \subset G(\mathbb{R})^+$ un sous-groupe de congruence. Soit par ailleurs $H_\alpha \subset G$ $(\alpha \geqslant 1)$ une suite de sous-groupes connexes définis sur $\mathbb{Q}$. On suppose la suite STRICTE :

(1.1) Pour tout sous-groupe $H \subsetneqq G$ (connexe, défini sur $\mathbb{Q}$), $H_\alpha \not\subset H$ pour α assez grand.

Si $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap H_\alpha(\mathbb{R})^+$, on obtient alors naturellement une suite de mesures de probabilité μ_α sur $S(G,\Gamma) = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$. (On suppose G, H_α "de type $\mathcal{F}$" [3] de sorte que les mesures invariantes sont finies). On se demande si, pour $\alpha \to \infty$, μ_α tend vers la mesure de probabilité naturelle μ_G sur $S(G,\Gamma) = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$. Dans certains cas il n'en est rien [3, § 2.3]. Nous avons donc donné une reformulation adélique de la conjecture [3]. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ le sous-groupe compact ouvert définissant Γ, de sorte que $S(G,\Gamma) = S(G,K)^+$ où

$$S(G,K) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K\ .$$

Pour $H \subset G$, soit $S^+(H, K_H)$ la réunion des composantes connexes de $S(H, K_H) = H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})/K_H \subset S(G, K)$ contenues dans $S(G, K)^+$. Elle est munie d'une mesure de probabilité naturelle (H de type $\mathcal{F}$); notons-la $\mu_{a,\alpha}$ si $H = H_\alpha$. Alors la conjecture est

(1.2) $(\mathcal{E}_a)$ - La suite de mesures $\mu_{a,\alpha}$ tend vers μ_G (pour la convergence faible) si $\alpha \to +\infty$.

Nous ne connaissons pas de contre-exemple à $(\mathcal{E}_a)$. Noter que cette conjecture se formule naturellement de façon adélique : par exemple, si G est simple et simplement connexe (et $G(\mathbb{R})$ non compact) $(\mathcal{E}_a)$ est équivalente à la conjecture analogue pour les sous-espaces

$$H_\alpha(\mathbb{Q})\backslash H_\alpha(\mathbb{A}) \subset G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}).$$

Dans [3], $(\mathcal{E}_a)$ est démontrée dans de nombreux cas, essentiellement quand la théorie de Ratner s'applique, i.e., quand les groupes H_a "contiennent assez d'unipotents" (mais voir a contrario [3, Théorème 3.3] où l'on démontre $\mathcal{E}$ mais non $(\mathcal{E}_a)$). Le cas pur et inaccessible à ces méthodes est celui où G est semi-simple et où les H_α sont des tores; dans [3, § 5-7] on vérifie qu'il est lié à des questions profondes de théorie analytique des nombres.

La théorie de Ratner a par ailleurs été appliquée dans [2] à des questions issues de la conjecture d'André-Oort. On y démontre l'équidistribution de familles de sous-variétés modulaires de dimension positive d'une variété de Shimura, associées à des sous-groupes semi-simples du groupe ambiant. Au contraire, il est bien connu [3, 16] que l'équidistribution des familles de points CM est lié au problème d'équidistribution des orbites toriques.

Le but de cet article est d'éclaircir cette dernière relation, dans le cadre de la conjecture d'André-Oort. Notons maintenant S une variété de Shimura, associée à un groupe réductif $G/\mathbb{Q}$ est aux données usuelles (§ 2), et soit $z_\alpha \in S$ une suite de points CM. Ainsi tout point z_α est associé à un tore $T_\alpha \subset G$, son groupe de Mumford-Tate. La variété S est définie sur un corps de nombres E (le corps reflex); z_α est défini sur la clôture algébrique $\bar{E}$ de E et son orbite sous $\mathfrak{g}_E = \mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ est décrite par Shimura et Deligne, et liée à l'action de $T_\alpha(\mathbb{A}_f)$ sur S, $\mathbb{A}_f$ désignant l'anneau des adèles finis.

Plus précisément, soit $E_\alpha = E(z_\alpha)$ le corps reflex de z_α (c'est le corps $E(T_\alpha, h_\alpha)$ de [4,§ 2.5] où $h_\alpha : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ est associé à z_α). Pour simplifier la notation, écrivons simplement T pour T_α et soit $R = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$, un $\mathbb{Q}$-tore. Il existe alors un morphisme surjectif de tores algébriques dit de réciprocité

$$\mathrm{rec} : R \to T$$

et l'orbite de z_α sous $\mathfrak{g}_{E_\alpha}$ est contrôlée par l'image de $R(\mathbb{A}_f)/\overline{R(\mathbb{Q})}$. Notons U le noyau de l'application de réciprocité: c'est un groupe diagonalisable sur $\mathbb{Q}$. Nous démontrons (Théorème 3.3) l'énoncé suivant.

Théorème 1.1 *Soit (G, X) une donnée de Shimura de type adjoint. Il existe un entier k tel que pour toute sous-donnée de Shimura spéciale (T, h) telle* *que T est le groupe de Mumford-Tate de h et telle que $U = \mathrm{Ker}(R \to T)$ est connexe, l'ordre du conoyau de rec (vu comme morphisme des tores à valeurs dans $\mathbb{A}_f$, modulo l'adhérence des points rationnels) est fini, d'ordre borné par k. Il en résulte que la taille de l'orbite sous $\mathfrak{g}_E$ d'un point CM z, associé à une sous-donnée de Shimura spéciale (T, h) vérifiant les hypothèses précédentes, est (à un facteur majoré près) celle de $T(\mathbb{A}_f)$.*

Il est donc crucial de comprendre la connexité de U, et c'est ce que nous avons fait dans la première partie (§ 2, 3), au moins pour les groupes classiques. Nous nous sommes limités en général aux points z_α (ou aux tores T_α) "Galois-génériques". Ceci veut dire tout d'abord que le groupe de Mumford-Tate est de dimension maximale (si G est adjoint, c'est en fait un tore maximal); puis, que l'image de $\mathfrak{g}_E = \mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ dans $\mathrm{Aut}(X^*(T))$, $X^*(T)$ étant le groupe des caractères, est aussi maximale (cf. § 2, 3). On peut alors calculer le groupe $\pi_0(U)$.

Dans le § 2, ceci est fait pour les groupes adjoints classiques, à l'aide du formalisme de Shimura et Deligne. Dans le § 3, on reprend le problème pour $G = GSp(g, \mathbb{Q})$ ou $G = GU(h)$, groupe de similitudes unitaires.

Ces groupes sont plus naturels que les groupes adjoints, en relation avec les problèmes de modules des variétés abéliennes. De plus, pour les groupes unitaires quasi-déployés à la place réelle, on verra que le noyau U est connexe alors que son analogue ne l'est pas pour le groupe adjoint. Le § 3 contient aussi la démonstration du Théorème mentionée plus haut.

Enfin, le § 4, plus géométrique, contient une application (conditionnelle) à la Conjecture d'André-Oort (Théorème 4.7):

Théorème 1.2 *Soit S une variété de Shimura associée à une donnée de Shimura (G, X) avec G un groupe de type adjoint. Soit $Z \subset S$ est une sous-variété Hodge-générique (condition naturelle, cf. § 4) contenant une famille infinie bornée (pour la topologie usuelle) de points CM tels que le noyau U est connexe. Si la conjecture $(\mathcal{E}_a)$ est vérifiée alors $Z = S$.*

En particulier, sous $(\mathcal{E}_a)$, on peut donc démontrer la conjecture d'André-Oort pour des familles de points CM (bornées) "Galois-génériques" quand les résultats de § 2 et du § 3 nous assurent la connexité du noyau U. Notons aussi que dans notre situation l'analogue de la conjecture $(\mathcal{E}_a)$ sur la variété de Shimura est l'équidistribution des orbites toriques des points CM de S. Une conséquence surprenante de l'étude de la conjecture $(\mathcal{E}_a)$ initiée dans [3] est que la conjecture $(\mathcal{E}_a)$ semble plus facile à obtenir que son analogue sur la variété de Shimura. Si G est le groupe $PGL(2, F)$ pour un corps de nombres totalement réel, la conjecture $(\mathcal{E}_a)$ et son analogue sur la variété modulaire de Hilbert se ramènent via une formule de Waldspurger à des estimations analytiques de la valeur $L(\Pi, \frac{1}{2})$ de la fonction L du changement de base Π d'une représentation automorphe π pour $PGl(2, F)$ à un corps de multiplication complexe $E = F[\sqrt{d}]$. La preuve de $(\mathcal{E}_a)$ se déduit de propriétés élémentaires de convexité des fonctions L alors que l'analogue sur la variété de Shimura est une

conséquence de la SOUS-CONVEXITÉ bien plus difficile à obtenir. L'hypothèse de Lindelöf conséquence de l'hypothèse de Riemann généralisée donnerait des résultats plus précis dans les deux situations.
Le Théorème 3.3 de cet article est étroitement lié à des arguments déjà utilisés par Edixhoven et Yafaev [7]. On se référera aussi à un article récent de Zhang [16] où des résultats plus complets sont obtenus dans un cas particulier. Néanmoins, Edixhoven et Yafaev appliquent ces idées en une place, ou un nombre fini de places, p-adiques; ils n'ont donc pas besoin de la connexité du noyau. La portée réelle, globale, du résultat, dans la situation particulière de ce texte (quand le noyau du morphisme de réciprocité est connexe) ne semble pas avoir été remarquée.
Dans tout l'article, notre référence implicite pour la théorie des variétés de Shimura est à Deligne [4].

2 Connexité des noyaux de réciprocité : groupes adjoints

2.1

Dans tout ce paragraphe, G est un groupe semi-simple connexe sur $\mathbb{Q}$ et DE TYPE ADJOINT (= de centre trivial). Notons $T \subset G$ un tore maximal; soit $T_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$ les groupes obtenus par extension des scalaires à $\mathbb{C}$ et B un sous-groupe de Borel de $G_{\mathbb{C}}$ contenant $T_{\mathbb{C}}$. (Si X est un groupe sur k et k'/k une extension, $X_{k'} = X \times_k k'$).
Soient $X^*(T)$ le groupe des caractères de $T_{\bar{\mathbb{Q}}}$, $R \subset X^*(T)$ l'ensemble des racines de (G,T) et $W = W(R)$ le groupe de Weyl. Soit Γ le groupe d'automorphismes de R préservant les racines de B. Alors $A(R) = W \rtimes \Gamma$ est le groupe d'automorphismes de R; soient $\{\alpha_1, \dots \alpha_\ell\}$ les racines simples.
L'image I de $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Aut}(X^*(T))$ est contenue dans $A(R)$. Soit $\pi : A(R) \to \Gamma$ la projection et soit $I_\Gamma = \pi(I)$. Alors I_Γ est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix de T et B; l'application $\mathfrak{g} \to I_\Gamma$ définit en fait la classe des formes intérieures de G parmi les $\mathbb{Q}$-formes de $G_{\bar{\mathbb{Q}}}$. On a $I \subset W \rtimes I_\Gamma$. On dira que T est GALOIS-GÉNÉRIQUE s'il est maximal et si $I = W \rtimes I_\Gamma$.
On se donne par ailleurs une classe de conjugaison X, sous $G(\mathbb{R})$, d'homomorphismes $h : \mathbb{S} \to G(\mathbb{R})$ où $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. On suppose que X vérifie les conditions de Deligne [4, 2.1.1, 1-3]. Pour $h \in X$ on note $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ le groupe à un paramètre associé, "$z \mapsto h(z,1)$" [4, 1.1.1]. On rappelle que si $H \subset G$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe, $h(\mathbb{C}^\times) \subset H(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mu(\mathbb{C}^\times) \subset H(\mathbb{C})$ [4, Lemme 1.2.4]. Pour $h \in X$ soit $MT(h) \subset G$ le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe H tel que $H(\mathbb{R})$ contienne $h(\mathbb{C}^\times)$ – ou que $H(\mathbb{C})$ contienne $\mu(\mathbb{C}^\times)$.

PROPOSITION 2.1 *Il existe un sous-ensemble X' de X, dense pour la topologie complexe, tel que, si $h \in X'$, $MT(h)$ est un tore maximal Galois-générique.*

Notons en effet M l'espace de modules des tores maximaux de G : c'est une variété rationnelle définie sur $\mathbb{Q}$ (Platonov-Rapinchuk [12, p. 104]) et on dispose d'un espace fibré tautologique $\mathcal{T} \to M$ tel que $\mathcal{T}_m$ est le tore maximal associé à $m \in M$. En particulier, soit $\mathcal{T}_\eta$ le tore au-dessus du point générique η de M : c'est donc un tore sur $\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_N)$. Si L est le corps de décomposition de $\mathcal{T}_\eta$, on sait d'après Voskresenskii [15] que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_N))$ est égal à $W \rtimes I_\Gamma$. D'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert (cf. Serre [13, Prop. 1 p. 122]) on sait alors que

$$V = \{m \in M(\mathbb{Q}) : \mathcal{T}_m \text{est Galois-générique}\}$$

est le complémentaire d'un ensemble mince; il en résulte que V est dense dans $M(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle (voir Lang [10, Cor. 2.5 p. 231] pour une variété M de dimension 1. En général, on peut combiner ce théorème avec un balayage de $\mathbb{P}^N$ ou $\mathbb{A}^N$ par des droites, cf. Serre [13, Theorem p. 127]).
Si $U \subset M(\mathbb{R})$ est l'ensemble des tores compacts de $G(\mathbb{R})$, alors U est ouvert dans $M(\mathbb{R})$. On en déduit :

Lemme 2.2 *L'ensemble des tores maximaux Galois-génériques T tels que $T(\mathbb{R})$ est compact est dense dans U.*

Soit $T \subset G$ un $\mathbb{Q}$–tore maximal et $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to T_\mathbb{C}$. On a par ailleurs :

Lemme 2.3 (cf. Serre [14, Lemme 3 (b)])
Supposons que $Im(\mu)$ n'est contenu dans $H(\mathbb{C})$ pour aucun $\mathbb{Q}$-sous-groupe normal propre H de G. Alors l'orbite $\mathfrak{g} \cdot W\mu$ de μ dans $X_*(T_\mathbb{C}) = X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}})$ engendre le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}$.

En effet les sous-espaces de $X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}$ stables par W et $\mathfrak{g}$ correspondent aux $\mathbb{Q}$-sous-groupes normaux connexes de G.
Soit (G, X) une donnée de Shimura, on rappelle que le groupe de Mumford-Tate générique de X est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe $G'_\mathbb{Q}$ de $G_\mathbb{Q}$ tel que les $x \in X$ se factorisent par $G'_(\mathbb{R})$. Un point x de X est dit Hodge-générique si son groupe de Mumford-Tate est le groupe de Mumford-Tate générique de X. Il existe toujours des points Hodge-génériques. Rappelons que G, étant adjoint, est égal au groupe de Mumford-Tate d'un point Hodge-générique de X. Si $h \in X$ et μ est associé à h, on en déduit aussitôt que l'hypothèse du Lemme 2.3 est vérifiée puisqu'elle est invariante par conjugaison de h sous $G(\mathbb{R})$.
Le lemme suivant permet de calculer simplement le groupe de Mumford-Tate associé à un paramètre h dont l'image est contenue dans un tore.

Lemme 2.4 *Soit $T \subset G$ un $\mathbb{Q}$-tore, de sorte que $\mathfrak{g}$ opère sur $X = X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}})$. Soient $h : \mathbb{S} \to T_\mathbb{R}$ et μ le paramètre associé. Soient V l'espace engendré par $\mathfrak{g}\mu$ dans $X \otimes \mathbb{Q}$ et $\Lambda = X \cap V$. Alors Λ est le réseau des cocaractères de $MT(h) \subset T$.*

En effet Λ est un réseau primitif de X, invariant par $\mathfrak{g}$, et définit donc un sous-tore rationnel de T contenant l'image de μ et évidemment minimal.

Lemme 2.5 *Si $T \subset G$ est un $\mathbb{Q}$-tore maximal Galois-générique et si*

$$h : \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}},$$

alors T est le groupe de Mumford-Tate de h.

Avec les notations du Lemme précédent, soit en effet $V_\mu \subset X \otimes \mathbb{Q}$ le sous-espace engendré par $\mathfrak{g} \cdot \mu$. Puisque T est Galois-générique, $W \cdot \mu \subset \mathfrak{g} \cdot \mu$. D'après le Lemme 2.3, $V_\mu = V$. On conclut grâce au Lemme 2.4.

2.2

Nous supposons maintenant que G, toujours adjoint, est absolument simple sur $\mathbb{Q}$. Puisqu'il existe une donnée de Shimura pour G, $G_{\mathbb{R}}$ est absolument simple et la conjugaison complexe agit sur le diagramme de Dynkin par l'involution d'opposition [4].

Soit $h \in X$ une donnée dont le groupe de Mumford-Tate est un tore maximal Galois générique (i.e., une donnée passant par $T_{\mathbb{R}}$ où T est Galois-générique, cf. Lemme 2.5). Soient $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ associé à h et $E = E(T, h)$ le corps reflex: ainsi μ est défini sur E:

$$\mu : \mathbb{G}_{m,E} \to T_E \subset G_E.$$

On dispose alors d'un morphisme de réciprocité

$$\mathrm{rec} : R = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \to T \ ,$$

défini sur $\mathbb{Q}$, d'où par fonctorialité

$$\mathrm{rec}_* : X_*(R_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}}).$$

Rappelons que les corps reflex sont, par hypothèse, contenus dans $\mathbb{C}$; on note $\bar{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. On a alors naturellement

$$X_*(R_{\mathbb{C}}) \cong \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} \mathbb{Z} \cdot [\sigma]$$

et $\mathrm{rec}([\sigma]) = \sigma(\mu) := \mu_\sigma \in X_*(T)$, $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opérant naturellement sur $X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}})$. (Si T est un tore sur $\mathbb{Q}$, on écrira simplement $X_*(T)$ pour le groupe $X_*(T_{\mathbb{C}}) = X_*(T_{\bar{\mathbb{Q}}})$ des cocaractères géométriques de T).

Notons L_μ le sous $\mathbb{Z}$-module de $X_*(T)$ engendré par les μ_σ ($\sigma : E \to \mathbb{C}$). Puisque T est le groupe de Mumford-Tate, l'application $R \to T$ est surjective. Du point de vue des cocaractères, ceci se traduit par le fait que $L_\mu \otimes \mathbb{Q} = X_*(T) \otimes \mathbb{Q}$. Notre but est d'expliciter L_μ pour les groupes de type A, B, C, D et les cocaractères minuscules associés aux variétés de Shimura. Dans les énoncés, T est un tore maximal Galois-générique du groupe (du type indiqué) G, et h se factorise par T. Le groupe de Galois opère donc sur T par

$I = W \rtimes I_\Gamma$. Enfin, les possibilités pour μ sont décrites par Deligne [4]: ce sont les poids minuscules de Bourbaki [1].
Dans tous les calculs qui suivent, nous avons utilisé sans commentaire les notations de Bourbaki [1] relatives aux systèmes de racines; en particulier nous n'avons pas rappelé la description des bases naturelles, des poids fondamentaux associés, etc.

2.3 Type C_ℓ ($\ell \geqslant 2$)

Proposition 2.6 *Si $T \subset G$ et G est de type C_ℓ,*

$$L_\mu = X_*(T).$$

Notons $X_\mathbb{R} = X \bigotimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ et $Y_\mathbb{R}$ le dual de $X_\mathbb{R}$, engendré par les coracines. On peut alors identifier $X_\mathbb{R}$ et $Y_\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^\ell$, la dualité étant le produit scalaire usuel. On a les racines et coracines [1] :

$$R = \{\pm 2\varepsilon_i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant \ell\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ ,\ i < j\}$$
$$R^\vee = \{\pm\varepsilon_i\ ,\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}.$$

Le groupe $A(R)$ est $W(R) = \mathfrak{S}_\ell \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$, opérant de la façon usuelle; il est égal à I.
Le seul cocaractère minuscule est $\mu = \omega_\ell^\vee = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\ell)$, ℓ-ième copoids (Bourbaki [1]); son orbite sous I, de cardinal 2^ℓ, est l'ensemble $\{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \cdots \pm \varepsilon_\ell)\}$. Donc L_μ contient $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\ell$ ainsi que $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_\ell)\}$; G étant adjoint $X_*(T)$ est le réseau des copoids de T, qui est engendré par ces $(\ell + 1)$ éléments.

2.4 Type B_ℓ ($\ell \geqslant 2$).

Avec les notations précédentes,

$$R = \{\pm\varepsilon_i\ ,\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}$$
$$R^\vee = \{\pm 2\varepsilon_i\ ,\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}.$$

Le groupe de Weyl opère comme dans le cas C_ℓ. L'unique copoids minuscule est $\mu = \omega_1^\vee = \varepsilon_1$ (Bourbaki [1, p. 255); on a fixé la base usuelle de R et donc de $R^\vee$). Alors $L_\mu = X_*T = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_\ell$, réseau des copoids (Bourbaki, loc. cit.). Ainsi :

Proposition 2.7 (*G de type B_ℓ*)

$$L_\mu = X_*(T).$$

[1] On a utilisé, sans risque de confusion, R pour un système de racines ainsi que pour le tore $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \ldots$

2.5 Type D_ℓ ($\ell \geqslant 4$).

Nous excluons pour l'instant, dans le cas où $\ell = 4$, les groupes associés à la trialité. Distinguons deux cas :
– Si ℓ est pair, le groupe réel déployé de type D_ℓ est forme intérieure de sa forme compacte. D'après l'hypothèse qui précède, le groupe I_Γ est isomorphe à $\{1\}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans le second cas, $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ opère donc sur le diagramme de Dynkin par $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ où F est une extension quadratique réelle de $\mathbb{Q}$ (cf. Deligne [4, 2.3.4]).
– Si ℓ est impair, le groupe compact de type D_ℓ correspond à une action non triviale de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur le diagramme de Dynkin. Donc $I_\Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Dans ce cas

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant \ell\}$$
$$R^\vee = R \quad (\mathbb{R}^\ell \text{ étant identifié à son dual}).$$

$W(R) = \mathfrak{S}_\ell \rtimes (\pm 1)^{\ell-1}$, $(\pm 1)^{\ell-1}$ étant donné par les changements de signe de produit égal à 1 des coordonnées et par hypothèse $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ opère par $W(R)$ ou par $W(R) \rtimes \{1, c\}$ où c permute les racines $\alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell$ et $\alpha_\ell = \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell$; alors $W(R) \rtimes \{1, c\} = \mathfrak{S}_\ell \rtimes (\pm 1)^\ell$.
Il y a deux possibilités pour le cocaractère μ [4, p. 261] :
– si $G_\mathbb{R}$ est un vrai groupe orthogonal, $\mu = \omega_1^\vee = \varepsilon_1$
– si $\ell \geqslant 5$ et si $G_\mathbb{R}$ est le groupe symplectique d'un module hermitien sur une algèbre de quaternions, $\mu = \omega_\ell^\vee = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\ell)$.
Enfin, $X_*(T) = P(R^\vee) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_1^\ell \varepsilon_i)$.
– Si $\mu = \omega_1^\vee$, l'orbite de μ est, quelle que soit l'image de $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$, égale à $\oplus\mathbb{Z}\varepsilon_i$. On a donc une suite exacte

$$1 \to L_\mu \to X_*(T) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \tag{2.1}$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ étant identifié à $P(R^\vee) \bigoplus \mathbb{Z}\varepsilon_i$.
– Si $\mu = \omega_\ell^\vee$, et si $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ est d'image $\mathfrak{S}_\ell \rtimes (\pm 1)^\ell$, L_μ contient $\omega_\ell^\vee$ et $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell)$ donc ε_ℓ, donc $\bigoplus_i \mathbb{Z}\varepsilon_i \oplus \mathbb{Z}\omega_\ell^\vee = X_*(T)$.
Si l'image de $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ n'est pas totale, ℓ est pair; $X_*(T)/\mathbb{Z}R^\vee \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par les images de $\omega_\ell^\vee$ et ε_1; L_μ contient $\frac{1}{2}\sum \varepsilon_i$, donc $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \sum_{i>2} \varepsilon_i)$, donc $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, donc enfin $R^\vee$.
Enfin $X_*(T) = \{x = (x_i \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^\ell : x_i \equiv x_j[1]\}$. L'homomorphisme $X_*(T) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $x \mapsto \sum_{i \leqslant \ell} x_i - \sum_{i > \ell} x_i$ [2] annule $\mathbb{Z}R^\vee$ et $\omega_\ell^\vee$ est invariant par l'action de $W(R)$. Il n'est pas trivial sur ε_1, d'où de nouveau une suite exacte de la forme (2.1), $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ étant l'image de ε_1.
Revenons sur le cas de la trialité. L'image I de $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ dans $A(R)$ contient $W(R)$ qui est d'indice 1, 2 ou 6 dans I. Dans le second cas, nous pouvons supposer

pour un choix de base convenable de R que $I = \mathfrak{S}_4 \rtimes (\pm 1)^4$. Les deux caractères $\omega_1^\vee$ et $\omega_\ell^\vee$ ne sont pas conjugués par I et la relation entre L_μ et $X_*(T)$ est celle décrite précédemment. Enfin, si $|I/W(R)| = 6$, $\omega_1^\vee$ et $\omega_4^\vee$ sont conjugués par I. Ils sont donc indiscernables de notre point de vue, et le calcul précédent montre que $L_\mu = X_*(T)$. Pour résumer :

PROPOSITION 2.8 (*G de type D_ℓ; si $\ell = 4$, $\omega_1^\vee$ et $\omega_4^\vee$ sont définis comme ci-dessus*).
(1) *Si $\mu = \omega_1^\vee$ et si G n'est pas trialitaire sur $\mathbb{Q}$, L_μ est d'indice 2 dans $X_*(T)$.*
(2) *Si $\mu = \omega_\ell^\vee$ et si G n'est pas trialitaire, $|X_*(T)/L_\mu| = 1$ si $|I/W(R)| = 2$; $|X_*(T)/L_\mu| = 2$ si $I = W(R)$.*
(3) *Si $\ell = 4$ et G est trialitaire, $L_\mu = X_*(T)$.*

2.6 TYPE A_ℓ ($\ell \geqslant 2$)

C'est le cas le plus riche, puisque tous les poids fondamentaux sont associés à des variétés de Shimura. On pose $n = \ell + 1$, donc G est une forme de $\mathrm{PGL}(n)$. On identifie $X_\mathbb{R} = X_*(T) \otimes \mathbb{R}$ à

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i = 0\} \ .$$

La dualité euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ permet d'identifier H à son dual. Alors

$$\begin{aligned} R = R^\vee &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i, j \leqslant n \ , \ i \neq j\} \\ B = B^\vee &= \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots \alpha_\ell = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\} \ . \end{aligned}$$

Le groupe $W(R) = \mathfrak{S}_n$ opère par permutation; $A(R) = W(R) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, égal à I car $G(\mathbb{R})$ doit être forme extérieure de $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$.
Le réseau des racines est

$$Q(R) = Q(R^\vee) = \{x \in \mathbb{Z}^n : \sum x_i = 0\} \ ;$$

le réseau des poids est engendré par les poids

$$\begin{aligned} \omega_p = \omega_p^\vee &= \text{projection sur } H \text{ de } \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p \\ &= \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p - \frac{p}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \qquad (1 \leqslant p \leqslant \ell). \end{aligned}$$

On a donc :

$$P(R) = P(\check{R}) = (x \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}^n : \sum x_i = 0 \ , \ x_i \equiv x_j \ [1]\} \ ;$$

L'isomorphisme, qu'on notera det : $P(\check{R})/Q(\hat{R}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donné par $x = (x_i) \mapsto x_i$ [mod 1] où l'on a identifié $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et i est arbitraire.
Fixons $p \in \{1, \dots \ell\}$ et soit $r = (n, p)$.

Proposition 2.9 (*G de type A_ℓ, $n = \ell + 1$, $\mu = \omega_p^\vee$*).

(i) *L_μ contient $Q(R^\vee)$*

(ii) *On a une suite exacte*

$$0 \to L_\mu \to X_*(T) \underset{\det}{\to} < \frac{n}{r} \cdot 1 > \to 0$$

le quotient étant donc isomorphe à $\mathbb{Z}/(r)\mathbb{Z}$.

Notons π la projection de $\mathbb{R}^n$ sur H. Alors L_μ contient $\pi(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p)$ donc, étant stable par $\mathfrak{S}_n$, $\pi(\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{p+1})$, donc $\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_{p+1})$; l'action de $\mathfrak{S}_n$ montre alors que L_μ contient $Q(R^\vee)$. Par ailleurs

$$\det(\omega_p^\vee) = -\frac{p}{n}(\in \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \equiv -p(\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

qui engendre le sous-groupe $< r \cdot 1 >$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Mais l'image inverse de ce sous-groupe dans $P(R^\vee) = X_*(T)$ est stable par $A(R)$ car $\det(\sigma x) = \det(x)$ si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\det(\theta x) = -\det(x)$ si θ est le générateur du sous-groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $A(R)$, qui opère par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_n, \ldots, -x_1)$.

Corollaire 2.10 *$L_\mu = X_*(T)$ si, et seulement si, $(p, n) = 1$.*

C'est le cas, en particulier, si $p = 1$ ou si $n = 2p + 1$: dans ce dernier cas $G_\mathbb{R}$ est quasi déployé. Dans le paragraphe suivant on vérifiera que si $n = 2p$ (donc $G_\mathbb{R}$ quasi-déployé) on peut améliorer le résultat en considérant un groupe de similitudes unitaire.

2.7

La signification de ces calculs pour le contrôle de l'application de réciprocité est donnée par le résultat évident qui suit :

Proposition 2.11 *Si $L_\mu = X_*(T)$, $U = \ker(\mathrm{rec} : R \to T)$ est connexe. En général, $X_*(T)/L_\mu$ s'identifie à U/U^0 où U^0 est la composante neutre (géométrique) de U.*

Si en effet X est un tore, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, X) = \{0\}$, sur $\bar{\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{C}$; si X est un groupe (diagonalisable) fini, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, X)$ est naturellement isomorphe à $X(\bar{\mathbb{Q}})$ (ou $X(\mathbb{C})$).
La suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, U) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, X) \\
\| & & \| & & & & \| \\
X_*(R) & & X_*(T) & & & & \{0\}
\end{array}$$

permet de conclure.
On remarquera que (pour G de type A_ℓ) la description explicite du conoyau donnée par la Proposition 2.9 contient l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur U/U^0.
Enfin, terminons sur l'espoir qu'un expert des calculs relatifs aux groupes exceptionnels pourra résoudre ce problème pour les groupes de type E_6 et E_7 (Deligne [4, p. 261]).

3 Connexité des noyaux de réciprocité : une autre approche

Dans ce paragraphe nous ne supposons pas G adjoint; nous supposerons en fait que G est associé, à la Shimura-Deligne-Langlands, à un problème de modules pour des variétés abéliennes (cf. tout particulièrement [8] pour une description précise.) Nous reprenons dans ce cadre l'étude de la surjectivité de l'application $R \to T$ du § 2. Dans ce cas la question ne se réduit pas à un problème relatif aux systèmes de racines. Nous avons décrit les tores, et les applications, en restant proche du problème de modules. Nous nous limitons au groupe symplectique et aux groupes unitaires.

3.1 Le formalisme de la multiplication complexe

Soient E un corps CM, F son sous-corps totalement réel maximal et $c \in \mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})$ la conjugaison complexe. Notons E^{gal} la clôture galoisienne de E dans $\bar{\mathbb{Q}}$ (comme dans le § 2, on suppose les corps de nombres plongés dans $\mathbb{C}$). Soient J l'ensemble des plongements $E \to \bar{\mathbb{Q}}$ et $\Sigma \subset J$ un type CM : ainsi $J = \Sigma \amalg {}^c\Sigma$.
Notons $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/\mathbb{Q})$. Alors $\mathfrak{g}$ opère sur J, transitivement et fidèlement, $c \in \mathfrak{g}$ et $c\sigma = \sigma c$ $(\sigma \in \mathfrak{g})$.
Soit $g = [F : \mathbb{Q}]$.
Nous pouvons indexer Σ par les indices $\{1, \dots g\}$ et ${}^c\Sigma$ par les indices $\{g + 1, \dots 2g\}$ de sorte que c s'identifie à la permutation $(1, 2g)(2, 2g-1) \cdots (g, g+1)$. Le centralisateur de c dans $\mathfrak{S}_{2g}$ s'identifie à $C_g = \mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$; si $\sigma \in \mathfrak{S}_g$ l'élément associé de $\mathfrak{S}_{2g}$ laisse stable Σ et ${}^c\Sigma$, opère sur $\Sigma \cong \{1, \dots g\}$ de la façon naturelle et sur ${}^c\Sigma \cong \{g + 1, \dots 2g\}$ par $2g + 1 - i \mapsto 2g + 1 - \sigma(i)$ $(i = 1, \dots g)$. Un élément $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ opère par le produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{g} s_i^{\varepsilon_i}$ où $s_i = (i, 2g + 1 - i) \in \mathfrak{S}_{2g}$. Noter que le groupe C_g est bien sûr isomorphe au groupe de Weyl de type C_g. On a ainsi associé à un corps CM un groupe $\mathfrak{g} \subset C_g \subset \mathfrak{S}_{2g}$ transitif sur $J \equiv \{1, \dots 2g\}$.

3.2 Le cas de $GSp(g)$

Fixons une forme bilinéaire alternée – par exemple, de matrice $\begin{pmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{pmatrix}$ – sur $\mathbb{Q}^{2g}$ et soit $G = GSp(g)$ le groupe de similitudes symplectiques associé.

Soit $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ un paramètre associé au problème de modules usuel des variétés abéliennes (Kottwitz [8] : avec la description donnée de G, h est conjugué à

$$h_0 : z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

où les blocs sont de taille g). On suppose que h définit un point CM d'une variété S_K associée à G, avec $K \subset G(\mathbb{A}_f)$. Soit T un tore maximal de G contenant l'image de h.
Alors $T_{\mathbb{R}}$ est un tore maximal elliptique de $G_{\mathbb{R}}$ et T est donc un tore maximal elliptique de G. Rappelons que ceux-ci sont décrits par les données suivantes. Posons $g = g_1 + \cdots + g_r$ $(r \leqslant g)$ et donnons-nous, pour tout j, un corps de nombres F_j de degré g_j et une extension quadratique E_j de F_j ; on note simplement $z \mapsto \bar{z}$ la conjugaison de E_j par rapport à F_j. Pour tout j soit $\iota_j \in E_j$ tel que $\bar{\iota}_j = -\iota_j$. On munit E_j d'une forme $\mathbb{Q}$-linéaire alternée donnée par $< x, y >= Tr_{E_j/\mathbb{Q}}(\bar{x}\iota_j y)$. Alors le tore $\{x \in E_j : x\bar{x} \in \mathbb{Q}^\times\}$ se plonge dans le groupe des similitudes symplectiques de E_j. Lorsque les données proviennent de h, les paires (E_j, F_j) doivent être des données CM. Le tore rationnel T associé a pour points rationnels :

$$T(\mathbb{Q}) = \{(x_j \in E_j : x_j\bar{x}_j = x \in \mathbb{Q}^\times)\} \ ,$$

de dimension $g+1$. On le plonge dans G en identifiant les espaces symplectiques $\bigoplus E_j$ et $\mathbb{Q}^{2g}$.
Nous dirons que h, ou T est Galois-générique s'il en est de même pour les données à eux associées pour le groupe adjoint. Ceci veut dire que le corps CM E est unique, de dimension $2g$, et que le groupe $\mathfrak{g}$ décrit dans le § 3.1 est égal à C_g. (On vérifie que ceci ne dépend pas du choix d'un type CM). La Proposition 2.1 nous garantit l'existence de (nombreux) tores Galois-génériques.
Notons S le tore associé à T dans $GL(\mathbb{Q}^{2g})$ – son centralisateur. Alors $S \cong \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$ et $h : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{C}^\times)^{2g}$ s'écrit à permutation près des coordonnées sous la forme

$$z \mapsto (z, \dots, z, \bar{z}, \dots, \bar{z}) \quad (z \in \mathbb{C}^\times).$$

Le paramètre μ associé est

$$z \mapsto (z, \dots, z, 1, \dots, 1).$$

Si on note (x_i) $(i \leqslant 2g)$ les coordonnées de $x \in S$, T est décrit par

$$T = \{(x_1, \dots, x_{2g}; x) : x_i x_{2g+1-i} = x\} \subset S \times \mathbb{G}_m$$

(l'indexation étant choisie, pour l'action de la conjugaison complexe, conformément au § 3.1) et

$$\mu : z \mapsto ((z, \dots, z, 1, \dots 1); z). \tag{3.1}$$

Nous utiliserons aussi ces descriptions sur $\bar{\mathbb{Q}}$, l'action du groupe de Galois $\mathfrak{g}$ (ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$) s'y lisant de façon évidente. On a aussi

$$\mu = ((1, \dots 1, 0, \dots 0); 1) \in X_*(S \times \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}^{2g+1}.$$

Le réseau $X_*(T) \subset X_*(S \times \mathbb{G}_m)$ s'identifie à l'ensemble des

$$\underline{\lambda} = \{(\lambda_1, \dots \lambda_{2g}; \lambda) : \lambda_i + \lambda_{2g+1-i} = \lambda\} \ . \tag{3.2}$$

Calculons d'abord le corps reflex, que l'on notera ici K. C'est le corps de rationalité de μ, donc

$$\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/K) = \{\sigma = (s, \varepsilon) \in \mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g : \sigma \text{ fixe } \mu\} = \mathfrak{S}_g.$$

Donc $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/\mathbb{Q})/\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/K) \cong \{j : K \to \bar{\mathbb{Q}}\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ (isomorphismes d'ensembles). On remarquera que $|\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/K)|$ est le degré de la représentation du groupe dual associée par Langlands à la variété de Shimura : tous deux sont en effet égaux au cardinal de l'orbite de μ par le groupe de Weyl.

A ce point du calcul on peut vérifier que T est le groupe de Mumford-Tate du paramètre h, ce qu'on pourrait bien sûr déduire du § 2. On a en effet une suite exacte

$$0 \to \underline{E}_1^\times \to T \to \mathbb{G}_m \to 0$$

où $\underline{E}_1^\times$ est le $\mathbb{Q}$-tore défini par le noyau de $N_{E/F} : E^\times \to F^\times$. Le groupe de Mumford-Tate s'envoie surjectivement sur $\mathbb{G}_m$, cf. (3.1); C_g opère naturellement sur $X^*(S) = \mathbb{Z}^{2g}$ et commute à la conjugaison complexe c (§ 3.1). Décomposons $\mathbb{R}^{2g} = V = V^+ \oplus V^-$ sous l'action de c. Alors l'action de C_g sur $X^*(\underline{E}_1^\times) \otimes \mathbb{R}$ est sa représentation sur V^-, qui est l'action naturelle, irréductible, du groupe de Weyl. Le groupe de Mumford-Tate doit donc contenir $\underline{E}_1^\times$ et est égal à T.

Vérifions la surjectivité de $\mathrm{rec}_* : X_*(R) \to X_*(T)$. On a $X_*(R) = \bigoplus_{\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g} \mathbb{Z}\varepsilon$, et $X_*(T)$ s'identifie à $\mathbb{Z}^{g+1}$ par les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_g, \lambda)$ de (3.2). Alors $\mu = (1, \dots, 1; 1) \in \mathbb{Z}^{g+1}$; si $\varepsilon = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ (0 à la place i), $\varepsilon(\mu) = (0, \dots, 1, \dots 0; 1)$ (1 à la place i). Notons ε_i cet élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$, et soit $\theta = (1, \dots 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$.

L'application

$$\mathrm{rec}_* : \bigoplus_{\varepsilon = \varepsilon_j, \theta} \mathbb{Z}\varepsilon \to X_*(T) = \mathbb{Z}^{g+1}$$

a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant 1. L'application $X_*(R) \to X_*(T)$ est donc surjective. On en déduit, par la Proposition 2.11, la connexité du noyau.

Remarquons qu'il est vraisemblable que la connexité du noyau du morphisme de réciprocité pour le groupe adjoint (et un morphisme μ^{ad}) devrait l'impliquer pour le groupe de similitudes (et μ d'image μ^{ad}). Nous n'avons pas su le démontrer.

Terminons par quelques calculs dans le cas $g = 2$; G est alors associé à l'espace de modules de surfaces abéliennes. Supposons que T est un tore maximal irréductible, i.e., défini par un corps CM E de degré 4. On ne suppose plus E Galois-générique. D'après le § 3.1, $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/\mathbb{Q})$ s'identifie à un sous-groupe $\mathfrak{g}$ de $C_2 = \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, contenant la conjugaison complexe $c = (14)(23)$, et transitif sur I_4. Soit $s := \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}$ le générateur du facteur $\mathfrak{S}_2$. Il y a deux possibilités pour $\mathfrak{g} \neq C_2$:

(a) $\mathfrak{g} = \{1, c, s, sc\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

(b) $\mathfrak{g} = \{1, \tau, \tau^2, \tau^3\}$ où $\tau = s\varepsilon$, $\varepsilon = (14)$ ou $(23) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Alors $\tau^2 = c$ et $\mathfrak{g}$ est cyclique d'ordre 4.

Soit $V = \mathbb{Q}^4$, muni de la représentation naturelle de $\mathfrak{g}$; on a $V = V^+ \oplus V^-$ sous l'action de c, et le groupe de Mumford-Tate M est déterminé par le sous-espace de V^- stable par $\mathfrak{g}$, tel que le tore associé à ce sous-espace et au facteur de V^+ correspondant au sous-espace diagonal de V contienne l'image de h : $z \mapsto (z, z, \bar{z}, \bar{z})$. Dans le cas (a), c'est le cas pour $(V^-)^s$. On a un diagramme d'extensions

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, dash, "< c >"'] \arrow[dr, dash, "< s >"] & \\ F \arrow[dr, dash] & & E_0 \arrow[dl, dash] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

avec F quadratique réel, E_0 quadratique imaginaire, et

$$M(\mathbb{Q}) = E_0^\times \subset T(\mathbb{Q}) = \{z \in E^\times : N_{E/F} z \in \mathbb{Q}^\times\}.$$

Le corps reflex est $K = E_0$. Identifiant $X_*(M)$ à $\mathbb{Z}^2$ de la façon naturelle, on a $X_*(R) \to X_*(M)$ donné par $\mathrm{Gal}(R/\mathbb{Q}) = \{R \to \bar{\mathbb{Q}}\} = \{1, c\}$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto (1,0) \in X_*(M) \\ c &\mapsto (0,1). \end{aligned}$$

Le morphisme de réciprocité est donc l'isomorphisme canonique $E_0^\times \to E_0^\times$ et donc bijectif.

Considérons le cas (b), par exemple pour $\varepsilon = (14)$; alors $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 2)$. Puisque τ^2 opère par (-1) sur V^-, τ n'a pas de sous-espace rationnel stable. Par conséquent $M = T$. On vérifie que le corps reflex est E.

L'application de réciprocité est donnée par

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto (1,1,0,0;1) \\ \tau &\mapsto (1,0,1,0;1) \\ \tau^2 &\mapsto (0,0,1,1;1) \\ \tau^3 = c\tau &\mapsto (0,1,0,1;1) \end{aligned}$$

On vérifie aisément qu'elle est surjective de $X_*(R)$ vers $X_*(T)$.
Il serait bien sûr intéressant d'étudier la surjectivité pour les corps CM arbitraires, mais ceci semble difficile.

3.3 Groupes de similitudes unitaires

Dans cette section $E_0/\mathbb{Q}$ est un corps quadratique imaginaire, et G est le groupe de similitudes unitaires d'un espace hermitien de dimension n sur E_0. (Les calculs qui suivent s'appliquent aussi aux groupes unitaires définis par des algèbres à division).

Rappelons la description des tores maximaux (elliptiques) de G : soit $n = \sum_1^r n_i$ et pour tout i soit F_i une extension de $\mathbb{Q}$ linéairement disjointe de E_0 de degré n_i et $E_i = E_0F_i$. Sur E_i notons simplement $z \mapsto \bar{z}$ la conjugaison par rapport à F_i. Alors

$$T(\mathbb{Q}) = \{(z_i \in E_i^\times) : z_i\bar{z}_i = x \in \mathbb{Q}^\times\}.$$

Le tore T ne peut être Galois-générique que si $r = 1$; pour que $T(\mathbb{R})$ contienne l'image d'un paramètre de Shimura, il faut que F soit totalement réel; E est alors un corps CM.
Choisissons un plongement complexe ι_0 de E_0. (E_0 n'est pas a priori un corps reflex, donc n'a pas de plongement préféré dans $\mathbb{C}$). Les places complexes de E s'identifient alors aux plongements complexes $E \to \mathbb{C}$ par le choix, pour toute place w, d'un plongement ι, ι_0-linéaire, définissant w; ceci définit un type CM pour E. Si T est associé à E,

$$T(\mathbb{Q}) = \{z \in E^\times : N_{E/F}z \in \mathbb{Q}^\times\} \tag{3.3}$$

et $T(\mathbb{R})$ est défini par la relation déduite de (3.3) dans

$$S(\mathbb{R}) = (E \otimes \mathbb{R})^\times = E_{w_1}^\times \times \cdots \times E_{w_n}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n; \tag{3.4}$$

on a noté S le tore $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$.
Les paramètres h déduits des problèmes de module naturels, pour les variétés abéliennes, associés à G sont décrits par Kottwitz [8]. Si h se factorise par $T(\mathbb{R})$ on a alors

$$h : z \mapsto (z, \dots z, \bar{z} \dots \bar{z}) \quad (z \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times) \tag{3.5}$$

avec p occurences de z et $q = n - p$ occurences de $\bar{z}$. Noter que l'image de h est bien dans $T(\mathbb{R})$ défini, dans la description (3.4) par

$$T(\mathbb{R}) = \{(z_i = z_{w_i}) : z_i \bar{z}_i = x \in \mathbb{R}^\times\}.$$

On a naturellement

$$X_*(S) = \bigoplus_w (\mathbb{Z}\iota \oplus \mathbb{Z}\bar{\iota}) \cong \mathbb{Z}^{2n}$$

où pour tout $w = w_1, \dots, w_n, \iota$ est défini comme ci-dessus, et $X_*(T)$ s'identifie alors à

$$X_*(T) = \{(\lambda_\iota, \lambda_{\bar{\iota}} : \lambda_\iota + \lambda_{\bar{\iota}} = \lambda)\}$$

isomorphe à $\mathbb{Z}^{n+1}$ par le choix des coordonnées (λ_ι, λ). Le paramètre μ déduit de h est alors

$$\mu : z \mapsto (z, \dots z, 1, \dots, 1; z) \quad (z \in \mathbb{G}_m)$$

ou de façon équivalente

$$\mu = (1, \dots 1, 0 \dots 0; 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

(p occurences de 1).

Enfin, le tore adjoint associé T^{ad} est Galois-générique si et seulement si $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$ permutant les plongements $\{\iota\}$ et le générateur c de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opérant par conjugaison complexe.

Calculons le groupe de Mumford-Tate. Soit d'abord $V = X_*(S) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{2n}$. Sous l'action de c, V est la somme de deux modules V^+ et V^-, chacun somme d'un module irréductible $V_{n-1}^\pm$ sous $\mathfrak{S}_n$ et d'un module trivial $V_1^\pm$. La représentation de $\mathfrak{S}_n \times < c >$ sur $X_*(T) \otimes \mathbb{Q}$ est somme de V_1^+, V_1^- et V_{n-1}^-.

On a une application naturelle (rapport de similitude)

$$T \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}, \qquad z \mapsto N_{E/F}(z), \qquad (z \in T(\mathbb{Q})),$$

et l'on sait que le groupe de Mumford-Tate $M \subset T$ a pour image $\mathbb{G}_m$. De plus son image dans T^{ad} est égale à T^{ad}, par exemple d'après le § 2 (T^{ad} est son groupe de Mumford-Tate). Il en résulte que $X_*(M) \otimes \mathbb{Q} \subset X_*(T) \otimes \mathbb{Q}$ est égal à $V_1^+ \oplus V_1^- \oplus V_{n-1}^-$ ou à $V_1^+ \oplus V_{n-1}^-$. Le second module correspond au sous-tore T_1 de T défini par

$$T_1(\mathbb{Q}) = \{z \in E^\times : N_{E/F} z \in \mathbb{Q}^\times, N_{E/E_0} z \in \mathbb{Q}^\times\}.$$

Si $z \in T_1(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ s'écrit (z_i) avec $z_i \in E_{w_i}^\times \cong \mathbb{C}^\times$ (3.4), les relations définissant T_1 donnent alors :

$$z_i \bar{z}_i = x \in \mathbb{R}^\times \tag{3.6}$$

$$z_1 \cdots z_n = y \in \mathbb{R}^\times. \tag{3.7}$$

Revenons à l'expression (3.5) de h : h vérifie (3.6), et (3.7) si, et seulement si, $p = q$. On a donc démontré :

Lemme 3.1 *Si $p \neq q$, T est égal à son groupe de Mumford-Tate. Si $p = q$, le groupe de Mumford-Tate d'un paramètre h passant par T est égal à T_1.*

Soit K le corps reflex de μ, donc $K \subset E^{\mathrm{gal}}$. Un calcul simple montre que $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/K) = \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q \subset \mathfrak{S}_n$ si $p \neq q$, et que $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{gal}}/K)$ est le produit semi-direct de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p$ avec $\{1, c\}$ si $p = q$.
Supposons maintenant $p \neq q$ $(p, q \geqslant 1)$ et considérons le morphisme de réciprocité

$$r_* : X_*(R) \to X_*(T) = \mathbb{Z}^{n+1} \tag{3.8}$$

où $X_*(R) \cong \mathbb{Z}^{2N}$ $(N = \binom{n}{p})$, et où l'on a utilisé le fait que T est le groupe de Mumford-Tate. Une base de $X_*(R)$ correspond à la réunion des sous-ensembles $I \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal p (action de $\mathfrak{S}_n$) et des sous-ensembles I de cardinal q (action de $\mathfrak{S}_n \times c$). Si e_I sont les éléments de $\mathbb{Z}^n$ donnés par $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ dans la base canonique, et si l'on choisit $(n+1)$ éléments $I_1, \dots, I_{n+1}$ ($I_j \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal p ou q), le mineur correspondant de r_* est

$$\det \begin{pmatrix} e_{I_1} & \cdots & e_{I_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

Si $(p, q) = (p, n) = r$, on vérifie aisément que ce déterminant est divisible par r (remplacer la première ligne par la somme des n premières lignes). Les résultats du § 2 ne peuvent donc être améliorés.
Considérons, au contraire, le cas où $p = q$ et $n = 2p$. On note toujours T_1 le groupe de Mumford-Tate, de sorte que $T_1 \subset T \subset S$. On a naturellement

$$X_*(T) = \{(\lambda_1, \dots \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n})\} \subset \mathbb{Z}^{2n} = X_*(S)$$

où $\lambda_j + \lambda_{j'} = \lambda$ $\;(j' = 2n + 1 - j)$; $X_*(T)$ s'identifie donc à $\mathbb{Z}^{n+1} = \{(\lambda_j, \lambda)\}$. La relation (3.7) définit alors $X_*(T_1) \subset X_*(T)$ par

$$\sum \lambda_j = \sum \lambda_{j'} = \sum (\lambda - \lambda_j)$$

donc $X_*(T_1)$ est défini par $\{(\lambda_j, \lambda) : 2 \sum \lambda_j = 2p\lambda\}$ soit enfin

$$\begin{aligned} X_*(T_1) &= \{(\lambda_j, \lambda) : \sum_1^n \lambda_j = p\lambda\} \\ &\cong \mathbb{Z}^{2p-1} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

par les coordonnées $((\lambda_j)_{j \leqslant 2p-1}, \lambda)$.
Pour tout $I \subset \{1, \dots 2p - 1\}$ de cardinal p, l'image de $X_*(R)$ dans $X_*(T_1)$ contient, avec la notation précédente, le vecteur $(e_I, 1)$; si $I' \subset I$ est de cardinal $p - 1$, elle contient aussi $(e_{I'}, 1)$: remplacer I par $I' \cup \{n\}$. Donc l'image

contient les vecteurs $(e_i, 0)$ $(i = 1, \dots 2p-1)$ ainsi qu'un vecteur quelconque $(e_I, 1)$. Puisque le déterminant d'ordre $2p$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & & 1 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & & 1 \\ & & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, on a démontré :

Proposition 3.2 *Si $G(\mathbb{R})$ est de type (p,p), le noyau de réciprocité est connexe pour les tores maximaux Galois-génériques.*

3.4 Uniformité du conoyau de l'application de réciprocité

Dans cette section nous supposons simplement que (G, X) est une donnée de Shimura vérifiant les conditions de Deligne [4, § 2.1]. Soit $T \subset G$ un tore; on suppose qu'il existe un élément de X $h : \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ et que T est le groupe de Mumford-Tate de h. Soit E le corps reflex, $R = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ et

$$\mathrm{rec} : R \to T$$

le morphisme de réciprocité.

Si T est un tore, $\pi_0(T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q}))$ est son groupe de composantes connexes, qui s'identifie à $\pi_0(T(\mathbb{R})) \times T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$ (adhérence topologique). On notera simplement $\pi(T)$ le groupe $T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$, modifiant un peu la notation de Deligne.

Si $T \to S$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-tores tel que l'application $T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q}) \to S(\mathbb{A})/S(\mathbb{Q})$ soit de conoyau fini, il en est de même de l'application induite au niveau des composantes connexes ; si l'on dispose, pour une famille de tores, d'une borne universelle pour l'ordre du conoyau, il en est de même pour l'application induite.

Le groupe $\pi_0(R(\mathbb{R})) \times \pi(R)$ s'identifie, par la théorie du corps de classes, au groupe $\mathrm{Gal}(E^{ab}/E)$. Rappelons que le composé

$$\mathrm{Gal}(E^{ab}/E) \to \pi(R) \xrightarrow{\mathrm{rec}} \pi(T)$$

décrit l'action du groupe de Galois abélien sur les points z des variétés de Shimura $S_K(G, X)$ $(K \subset G(\mathbb{A}_f))$ déduits de h ([4 ,p. 269]; § 4).

Dans l'énoncé suivant, $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ varie parmi les paramètres CM; T est le groupe de Mumford-Tate associé; R est le tore associé au corps reflex $E = E(h)$.

Théorème 3.3 *Si* (h, T) *varie parmi les sous-données CM de* (G, X) *telles que le noyau*

$$U = \ker(\mathrm{rec} : R \to T)$$

est connexe, le conoyau de rec : $\pi(R) \to \pi(T)$ *est de taille uniformément bornée.*

Noter que si G est adjoint, $T(\mathbb{R})$ est compact et connexe et l'application de réciprocité envoie $\mathrm{Gal}(E^{ab}/E)$ vers $T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})$.
Pour la démonstration, on utilise la description de la dualité de Tate-Nakayama donnée par Kottwitz et Shelstad [9]. Considérons la suite exacte

$$1 \to U \to R \underset{\mathrm{rec}}{\to} T \to 1 \tag{3.9}$$

Puisque U est un tore, elle se scinde sur $\bar{\mathbb{Q}}$; avec les notations de [9] on en déduit une suite exacte

$$1 \to U(\bar{\mathbb{A}})/U(\bar{\mathbb{Q}}) \to R(\bar{\mathbb{A}})/R(\bar{\mathbb{Q}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{\mathbb{Q}}) \to 1\ . \tag{3.10}$$

Si X est un module continu sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on écrira simplement $H^\bullet(\mathbb{Q}, X)$ pour $H^\bullet_{ct}(\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}, X)$. Alors (3.9) donne

$$H^0(\mathbb{Q}, R(\bar{\mathbb{A}})/R(\bar{\mathbb{Q}})) \to H^0(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{\mathbb{Q}})) \to H^1(\mathbb{Q}, U(\bar{\mathbb{A}})/U(\bar{\mathbb{Q}})). \tag{3.11}$$

Le dernier terme de (3.11) est dual de $H^1(\mathbb{Q}, X^*(U))$ donc fini ([9, p. 621]) ; noter que le terme suivant est $H^1(\mathbb{Q}, X^*(R))^\vee = H^1(E, \mathbb{Z})^\vee = \{0\}$ d'après le lemme de Shapiro, donc (3.11) est surjective à droite.
Par ailleurs, pour tout tore T sur $\mathbb{Q}$, la suite exacte

$$1 \to T(\bar{\mathbb{Q}}) \to T(\bar{\mathbb{A}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{\mathbb{Q}}) \to 1$$

donne

$$1 \to T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q}) \to H^0(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{\mathbb{Q}})) \to H^1(\mathbb{Q}, T) \to H^1(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}}));$$

avec les notations de [9], cf. en particulier [9, 3.4.3], si on note $H^1(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}})) = \bigoplus_{p,\infty} H^1(\mathbb{Q}_v, T(\bar{\mathbb{Q}}_v))$ alors

$$\ker^1(\mathbb{Q}, T) = \ker[H^1(\mathbb{Q}, T) \to H^1(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}})],$$

est le groupe de Shafarevich-Tate, fini pour un tore. Réécrivons donc la suite exacte précédente comme

$$1 \to T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q}) \to H^0(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{\mathbb{Q}})) \to \ker^1(\mathbb{Q}, T) \to 1\ . \tag{3.12}$$

Le morphisme de suites exactes (3.12) appliquées aux groupes R et T de (3.9) donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'' & --- > & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & R(\mathbb{A})/R(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{Q}, R(\bar{\mathbb{A}})/R(\bar{\mathbb{Q}})) & \longrightarrow & \ker^1(\mathbb{Q}, R) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{Q}, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{\mathbb{Q}})) & \longrightarrow & \ker^1(\mathbb{Q}, T) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
--- > & & B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

où d'ailleurs $A'' = \ker^1(\mathbb{Q}, R) = \{1\}$ d'après le théorème 90 de Hilbert. D'après (3.11),

$$B' = H^1(\mathbb{Q}, U(\bar{\mathbb{A}})/U(\bar{\mathbb{Q}})) = H^1(\mathbb{Q}, X^*(U))^\vee$$

(dualité de Pontryagin); $B'' = \ker^1(\mathbb{Q}, T)$ et le conoyau B du morphisme de réciprocité s'identifie donc à

$$\ker[H^1(\mathbb{Q}, X^*(U))^\vee \to \ker^1(\mathbb{Q}, T)]. \tag{3.13}$$

B est donc fini, les deux groupes figurant dans (3.13) l'étant; pour borner uniformément $\# B$, il suffit de borner $\# H^1(\mathbb{Q}, X^*(U))$. Le lemme très simple qui suit est fondamental (cf. [7]).

Lemme 3.4 *Quand h varie parmi les paramètres CM,* $\dim U = \dim R - \dim T$ *est uniformément borné.*

Pour démontrer le Lemme, on n'a pas à supposer la connexité de U. Il suffit bien sûr de borner $\dim R = [E : \mathbb{Q}] =$ cardinal de l'orbite de μ sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le corps reflex est un sous corps du corps de décomposition d'un $\mathbb{Q}$-tore de G donc est de degré uniformément borné par le maximum des cardinaux des sous groupes finis de $GL(s, \mathbb{Z})$ où s désigne le rang de G (considérer l'action de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ sur le groupe des caractères d'un tore de G) .
Terminons la démonstration du Théorème. On considère $H^1(\mathbb{Q}, X^*(U)) \cong H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^r)$ où r est borné d'après le Lemme; $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ opère par un sous-groupe fini $\mathfrak{g} \subset \mathrm{GL}(r, \mathbb{Z})$; à conjugaison près le nombre de possibilités pour $\mathfrak{g}$ est fini. Considérons la suite exacte

$$1 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{g} \to 1 .$$

Elle donne une suite exacte

$$1 \to H^1(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{h}, \mathbb{Z}^r)) \to H^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}^r) \to H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{Z}^r)^{\mathfrak{g}}.$$

Le dernier terme, égal aux invariants de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Hom}_{ct}(\mathfrak{h}, \mathbb{Z}^r)$, est trivial. Le premier est égal à $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}^r)$. Puisque le nombre de sous-groupes $\mathfrak{g}$, munis de leur plongement, à conjugaison près, dans $\mathrm{GL}(r, \mathbb{Z})$, est fini il n'y a qu'un nombre fini de possibilités.

4 Une conséquence géométrique

4.1

Soient G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$, X une classe de conjugaison de morphismes $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$, vérifiant les conditions de Deligne [4, 2.1]. Soient $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ et $S = S_K(G,X)$ la variété associée.
Si E_0 est le corps de rationalité de la classe de conjugaison de $\mu : \mathbb{G}_m \to G$ déduit d'un élément arbitraire $h \in X$, la théorie des modèles canoniques définit S sur E_0. (Pour un exposé des résultats finaux, voir Milne [11]).
Soit $h : \mathbb{S} \to T$ un point CM, T étant le groupe de Mumford-Tate. Le corps reflex $E = E(h,T)$ contient E_0. Dans ce qui suit, on notera souvent x le point de X défini par (égal à) h. Si $(x,g) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ on note $[x,g]$ sa classe dans S_K. L'action de $\mathrm{Gal}(E^{ab}/E)$ sur x est décrite par le morphisme de réciprocité [§ 3.4].
Soit S^+ la composante connexe de l'image de $X^+ \times 1$ dans S, où l'on a fixé une composante connexe X^+ de X. On considère une sous-variété fermée $Z \subset X^+$. On dit que Z est Hodge-générique si Z n'est pas contenue dans une sous-variété de type Hodge propre [3] de S^+.
Fixons un domaine fondamental $\mathcal{F} \subset X^+$ pour l'action de $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K$. Si $z \in S^+$ et si $x \in \mathcal{F}$ relève z, on note $MT(z) \subset G$ le groupe de Mumford-Tate de x.

Proposition 4.1 *Supposons Z Hodge-générique et que G est le groupe de Mumford-Tate générique de X. Si H est un sous-groupe connexe propre de G défini sur $\mathbb{Q}$, l'ensemble des points $CM\{z \in Z : MT(z) \subset H\}$ n'est pas Zariski-dense dans Z.*

La condition que G est le groupe de Mumford-Tate générique est nécessaire (prendre H le groupe de Mumford-Tate générique). On peut en fait supposer que G est adjoint. Soit en effet $\pi : G \to G^{ad}$ le morphisme canonique et H un sous-groupe propre connexe de G tel que l'ensemble des points $CM\{z \in Z : MT(z) \subset H\}$ soit Zariski-dense dans Z. La proposition pour la donnée adjointe (G^{ad}, X^{ad}) nous assure que $\pi(H) = G^{ad}$ donc que $H^{der} = G^{der}$. L'hypothèse que G est Hodge générique assure alors que $H = G$.
On suppose donc G de type adjoint. Fixons $H \subsetneq G$ sur $\mathbb{Q}$ et soit (z_α) une suite Zariski-dense de Z telle que $MT(z_\alpha) \subset H$.

Lemme 4.2 *$H_{\mathbb{Q}}$ est réductif.*

Soit en effet $H_{\mathbb{Q}} = N\ H'_{\mathbb{Q}}$, où N est unipotent et $H'_{\mathbb{Q}}$ est réductif, une décomposition de Levi. Puisque $MT(z_\alpha)$ est un tore on peut choisir cette décomposition de sorte que $MT(z_\alpha) \subset H'_{\mathbb{Q}}$. Alors $Z_G(H'(\mathbb{R})) \subset Z_G(h_\alpha(\sqrt{-1}))$ où $h_\alpha : \mathbb{S} \to G$ est associé à x_α, donc $Z_G(H'(\mathbb{R}))$ est compact. En particulier H' n'admet pas de caractère rationnel non trivial. Rappelons un lemme d'Eskin, Mozes et Shah [6, Lemme 5.1].

Lemme 4.3 *Soit $F \subset G$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe sans caractère non trivial. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *$Z_G(F)$ est anisotrope (réductif).*

(ii) *Tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe de G contenant F est réductif.*

Appliquant le Lemme à H' on en déduit que $H = H'$ est réductif.
Revenant à la démonstration de la Proposition, soit

$$H = S\ H_1 \cdots H_r$$

(produit quasi-direct) où S est un tore – tel que $S(\mathbb{R})$ est compact – et les H_i sont semi-simples et irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Soit π_i la projection de H sur $H/S\prod_{j\neq i} H_j$. On peut supposer dans cette démonstration que $\pi_i \circ h_\alpha \neq 1$ pour tout i.

Lemme 4.4 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ soit X_α la $H(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h_α; donc $X_\alpha \subset X$.*

(i) *(H, X_α) est une sous-donnée de Shimura de (G, X).*

(ii) *Pour α variable il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour X_α.*

Pour les définitions précises relatives aux données et sous-données de Shimura on renvoie à [2].
La partie (i) est une variante de [2, Prop. 3.2]. Fixons α tel que $MT(x_\alpha) \subset H$. Si $C = h_\alpha(\sqrt{-1})$, C est de carré central dans $H(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Lie}(G/\mathbb{R})$ définit une représentation fidèle et C-polarisable de $H_\mathbb{R}$, selon la terminologie de Deligne; d'après celui-ci [4, 1.1.15] $\mathrm{Int}(C)$ est une involution de Cartan de $H(\mathbb{R})$. Par ailleurs $G(\mathbb{R})$ opère fidèlement sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathrm{Lie}(G/\mathbb{C}) = k_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{C} \oplus \bar{\mathfrak{p}_\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{S}(\mathbb{R})$ opérant par $(1, z/\bar{z}, \bar{z}/z)$ via h_α et C par $(1, -1, -1)$. Puisque $\pi_i \circ h_\alpha \neq 1$, $h_\alpha(z)$ n'opère pas trivialement sur $\mathrm{Lie}(H_i)$ par l'action adjointe. Il en résulte que C n'est pas triviale sur $H_i(\mathbb{R})$. Enfin, la représentation de $\mathbb{S}$ sur $\mathrm{Lie}(H/\mathbb{R})$ est de type $(0; (1, -1); (-1, 1))$ comme sous-représentation de $\mathrm{Lie}(G/\mathbb{R})$. Ainsi (H, X_H) vérifie les conditions d'une sous-donnée de Shimura [3, 3.1].
Pour la partie (ii), noter tout d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les classes de conjugaison géométrique des $h_\alpha : \mathbb{S} \to H/\mathbb{C}$ par $H(\mathbb{C})$. Si $h : \mathbb{S} \to H/\mathbb{R}$ est donnée, et si $L \subset H$ est le stabilisateur de h pour la conjugaison, le nombre de classes de conjugaison réelles de h dans le classe de h sous $H(\mathbb{C})$ est $\# \ker((H^1(\mathbb{R}, L) \to H^1(\mathbb{R}, H))$ donc fini.
Complétons la démonstration de la Proposition 4.1. On peut supposer donnée (z_α) telle que z_α soit défini par $x_\alpha \in X^+$ et que la donnée (H, X_α) soit constante; notons X_H la classe X_α. Alors pour tout α, z_α est donné par $[x_\alpha, 1] \in S_{K^+}$, qui est contenu dans l'image de $Sh_{K\cap H(\mathbb{A}_f)}(H, X_H) = H(\mathbb{Q})\backslash X_H \times H(\mathbb{A}_f)/K \cap H(\mathbb{A}_f)$. Pour un sous-ensemble Zariski-dense de Z,

z_α est donc contenu dans une composante irréductible d'une sous-variété de Shimura, i.e., une variété de type Hodge. Donc Z est contenu dans cette sous-variété, contrairement à l'hypothèse.
On déduit aussitôt de la Proposition :

Corollaire 4.5 *Soit Z une sous-variété Hodge-générique. Supposons que Z contient une suite dense de points $CM, (z_\alpha)$, et soit $T_\alpha = MT(z_\alpha)$. Alors Z contient une suite Zariski-dense de points $CM, (z_\beta)$, tels que la suite (T_β) soit stricte.*

En effet Z, contenant un ensemble dense D de points algébriques, est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$; les adhérences de Zariski des sous-ensembles de D sont définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et donc forment un ensemble dénombrable. Si l'on ordonne, $Z_1, Z_2, \dots Z_k, \dots$ ces adhérences $\neq Z$ on peut trouver une suite extraite (z_{α_j}) telle que $z_{\alpha_j} \notin Z_k$ $(j \geqslant k)$. Alors, pour tout $H \underset{\neq}{\subset} G$, $T_{\alpha_j} \not\subset H$, si j est assez grand, d'après la Proposition.

4.2

Avec les hypothèses énoncées au début du § 4.1, et G étant adjoint, soit alors $Z \subset S^+$ une sous-variété Hodge-générique contenant une suite dense de points CM. On en extrait une sous-suite, qu'on notera simplement (z_α), ayant la propriété du Corollaire 4.5.
Supposons pour l'instant que Z est définie sur E_0, et que la suite T_α associée à z_α est telle que rec : $\pi(R_\alpha) \to \pi(T_\alpha)$ soit surjective (cf. Thm. 3.3 ; les notations sont évidentes). Noter que ceci apparaît par exemple dans un des exemples traités à la fin du § 3.2. Puisque $z_\alpha \in S^+$ on peut écrire

$$z_\alpha = [x_\alpha, 1] \in Z \ . \tag{4.1}$$

Alors x_α définit le tore T_α; sous notre hypothèse de surjectivité, on a alors

$$[x_\alpha, t] \in Z \quad \forall t \in T_\alpha(\mathbb{A}_f)/T_\alpha(\mathbb{Q}) \tag{4.2}$$

Notons $\tilde{S}_K(G)$ ou simplement $\tilde{S}$, l'espace $G(\mathbb{R})$-homogène $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$. On notera $[[g_\infty, g]]$ la classe d'un élément $(g_\infty, g) \in G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)$. Enfin, $\tilde{S}^+$ est la composante connexe de (la classe de) 1 dans $\tilde{S}$.
Supposons alors l'hypothèse $\mathcal{E}_a$ (§ 1) vérifiée pour la famille T_α, et soit $g_\infty \in G(\mathbb{R})^+$. La convergence de la suite de mesures implique évidemment, pour tout α, la densité de

$$\bigcup_{\beta \geqslant \alpha} \tilde{S}^+(T_\beta, K_\beta)$$

dans $\tilde{S}^+$, avec $K_\beta = K \cap T_\beta(\mathbb{A}_f)$.
En particulier

$$[[g_\infty, 1]] = \lim_\alpha [[t_\alpha^\infty, t_\alpha]]$$

où $(t_\alpha^\infty, t_\alpha) \in T_\alpha(\mathbb{A})$ et la convergence est dans $\tilde{S}^+$. On en déduit qu'il existe une suite $\gamma_\alpha \in G(\mathbb{Q})$ telle que

$$\gamma_\alpha(t_\alpha^\infty, t_\alpha) \to (g_\infty, 1)$$

dans $G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)/K$. Le second facteur étant discret, ceci veut dire que

$$\begin{cases} \gamma_\alpha\ t_\alpha^\infty \to g_\infty\ , \\ \gamma_\alpha\ t_\alpha \in K \qquad (\alpha >> 0). \end{cases} \tag{4.3}$$

Par ailleurs d'après (4.2)

$$[\gamma_\alpha\ x_\alpha, \gamma_\alpha\ t_\alpha] \in Z\ .$$

Si $\gamma_\alpha\ t_\alpha \in K$, on a donc

$$[\gamma_\alpha\ x_\alpha, \gamma_\alpha\ t_\alpha] = [\gamma_\alpha\ x_\alpha, 1] \in Z\ .$$

Mais t_α^∞ appartient au centralisateur de $x_\alpha := h_\alpha$, donc

$$[\gamma_\alpha\ t_\alpha^\infty\ x_\alpha, 1] \in Z\ . \tag{4.4}$$

Supposons alors que la suite (z_α) admet une sous-suite convergente dans S^+. On peut alors choisir le relèvement x_α de (4.1) convergent dans X^+ en choisissant un domaine fondamental comme dans le § 4.1. Soit donc $x_\alpha \to x_\infty \in X^+$. Alors $\gamma_\alpha\ t_\alpha^\infty\ x_\alpha \to g_\infty\ x_\infty \in X^+$ et (4.4) implique $[g_\infty\ x_\infty, 1] \in Z$. Puisque g_∞ était arbitraire, ceci implique que $S^+ \subset Z$. (Noter que X^+ étant connexe est une orbite de $G(\mathbb{R})^+$).
Nous supposons maintenant que G est adjoint, Z Hodge-générique dans S^+; soit E' un corps de rationalité de Z, et supposons seulement que les conoyaux de rec : $\pi(R_\alpha) \to \pi(T_\alpha)$ sont uniformément bornés. Pour tout α, l'image de $\mathrm{Gal}(E_\alpha^{ab}/E_\alpha E')$ (où E_α est le corps reflex du tore T_α) est un sous-groupe d'indice uniformément borné dans $\pi(T_\alpha)$. Notons $\bar{T}_\alpha^0$ ce sous-groupe de $\bar{T}_\alpha = T_\alpha(\mathbb{A}_f)/T_\alpha(\mathbb{Q})$. L'argument qui précède donne alors :

Lemme 4.6 *Supposons $g_\infty \in G(\mathbb{R})^+$, et*

(i) $x_\alpha \to x_\infty \in X$

(ii) $[[g_\infty, 1]] = \lim[[h_\alpha^\infty, h_\alpha]])$

avec $h_\alpha \in T_\alpha(\mathbb{A}_f)$ d'image contenue dans $\bar{T}_\alpha^0$. Alors $[g_\infty x_\infty, 1] \in Z$.

Notons alors $\tilde{Z} \subset \tilde{S}^+$ l'image inverse de Z par l'application $\tilde{S}^+ \to S$,

$$[[g_\infty, 1]] \to [g_\infty x_\infty, 1].$$

Cette application est une submersion, donc $\tilde{Z}$ est une sous-variété (différentielle) de $\tilde{S}^+$, sous-variété propre si $Z \neq S^+$.

Considérons par ailleurs les plongements

$$(T_\alpha(\mathbb{Q})\backslash T_\alpha(\mathbb{A})/K_\alpha)^+ \to (G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)^+ = \tilde{S}^+ \tag{4.5}$$

(notations du § 1 : le terme de gauche est l'ensemble des éléments du quotient dont l'image est dans $\tilde{S}^+$). D'après la loi de réciprocité des modèles canoniques pour les composantes connexes de S_K (Deligne [4]) le groupe $G(\mathbb{A}_f)$ opère sur les composantes connexes de $\tilde{S}$ via l'action transitive d'un quotient abélien. On en déduit que la composante (+) du membre de gauche de 4.5 est un sous-groupe. Il contient un sous-groupe ouvert d'indice fini, l'image de $\bar{T}^0_\alpha$, et l'indice de cette image est uniformément borné.
Si $\mu_{a,\alpha}$ est la mesure de Haar du membre de gauche de (4.5), identifiée à son image sur $\tilde{S}^+$, l'hypothèse $(\mathcal{E}_a)$ est

$$\mu_{a,\alpha} \to \mu_G \ ; \tag{4.6}$$

quitte à supposer l'indice de l'image de $\bar{T}^0_\alpha$ constant, égal à r, on peut écrire

$$\mu_{a,\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \mu^i_\alpha$$

où $r\ \mu^1_\alpha$ est la mesure de Haar normalisée sur cette image, et $\mu_{a,i}$ est positive de masse $\frac{1}{r}$.
Soit alors f une fonction continue à support compact, telle que $f(x) \leqslant 1$ $(x \in \tilde{S}^+)$, $f(x) = 0$ $(x \in \tilde{Z})$ et $\mu_G(f) = 1 - \varepsilon$. Si $\mu^1_\alpha(f) \neq 0$ pour une suite infinie de α, $\mathrm{Supp}(f)$ doit rencontrer $\tilde{Z}$ d'après le Lemme 4.6. On a donc $\mu^1_\alpha(f) = 0$ $(\alpha >> 0)$ et donc

$$\mu_{a,\alpha}(f) = \sum_{2}^{r} \mu^i_\alpha(f) \leqslant \frac{r-1}{r}$$

ce qui contredit (4.6) pour $\varepsilon < \frac{1}{r}$. On a ainsi démontré le théorème suivant dans le cas où $Z \subset S^+$; le cas général s'en déduit de la façon usuelle en translatant Z par un élément de $G(\mathbb{A}_f)$.

Théorème 4.7 (*G adjoint*).
Soit Z une sous-variété de $S = S_K(G,h)$ et supposons :

(i) *Z contient un sous-ensemble Zariski-dense de points CM (z_α) dont le groupe de Mumford-Tate T_α vérifie :*

$$\ker(\mathrm{rec} : \pi(R_\alpha) \to \pi(T_\alpha)) \text{ est connexe.}$$

(ii) *(z_α) contient une sous-suite convergente pour la topologie complexe.*

(iii) *Z est Hodge-générique.*

Alors, sous l'hypothèse $\mathcal{E}_a$ *pour les groupes* $T_\alpha \subset G$, Z *est une composante connexe de* S.

D'après les § 2-3, l'hypothèse (i) sera très souvent vérifiée si Z contient un ensemble dense de points CM Galois-génériques.

Pour terminer (et pour justifier notre § 3.3), notons que l'hypothèse "G adjoint", si elle est commode, n'est pas cruciale. Expliquons l'argument quand G est un groupe de similitudes (de type (p,p) à l'infini, cf. § 3.3) et quand les points z_α sont Galois génériques. Soit E_0 le corps quadratique imaginaire associé à G. On notera ici $\underline{E}_0^\times$ le $\mathbb{Q}$-tore $\mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_m$.

Le tore $T = T_\alpha$ est décrit par $T(\mathbb{Q}) = \{z \in E^\times : N_{E/F}\, z \in \mathbb{Q}^\times, N_{E/E_0}\, z \in \mathbb{Q}^\times\}$. Le centre Z de G s'identifie à $\underline{E}_0^\times \supset \mathbb{G}_m$. Soit $\bar{G} = G/\mathbb{G}_m$: on a donc des morphismes naturels

$$G \to \bar{G} \to G^{ad}.$$

Pour des choix de compacts naturels, les variétés de Shimura associées sont identiques (sur $\mathbb{C}$). Si (z_α) est une suite de points de $S_K(G)$, dense dans une variété Hodge-générique, un sous-groupe $H \subset G$ contenant les T_α doit être d'image totale dans G^{ad}. Son image dans $\bar{G}$ doit donc être $\bar{G}$ ou le groupe dérivé de celui-ci. Mais la composante neutre de l'image inverse dans G de $\bar{G}^{\mathrm{der}}$ est G^{der}, avec $G^{\mathrm{der}}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(p,p)$ et le paramètre $h : z \mapsto (z, \dots z, \bar{z}, \dots \bar{z})$ ne passe pas par ce sous-groupe. Par conséquent les arguments du § 4.1 s'appliquent à $\bar{G}$.

Rappelons que la conjecture d'équidistribution n'est naturelle que pour les groupes de type $(\mathcal{F})$, ce qui exclut G à cause de son centre déployé. On procède donc dans $\bar{G}$, de centre $\underline{E}_0^\times/\mathbb{G}_m$. Les arguments du § 4.1 s'étendent : il reste donc à vérifier l'essentielle surjectivité des applications $\pi(R) \to \pi(\bar{T})$ ($\bar{T} \subset \bar{G}$ Galois-générique).

Si $\mu : \mathbb{G}_m \to T \to \bar{T}$ est un paramètre Galois-générique, on vérifie tout d'abord que le corps reflex coïncide dans T et $\bar{T}$. Ceci résulte immédiatement de la trivialité de $H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{G}_m)$ où $\mathbb{G}_m = \ker(T \to \bar{T})$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & R & = & R & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \bar{T} & \longrightarrow & 1\,.
\end{array}$$

On en déduit une suite exacte

$$1 \to \ker(R \to T) \to \ker(R \to \bar{T}) \to \mathbb{G}_m \to 1\ ;$$

puisque les deux termes extrêmes sont connexes, il en est de même du terme médian.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Ch. VII-VIII), Hermann, Paris, 1975.

[2] L. Clozel, E. Ullmo, *Equidistribution de sous-variétés spéciales*, Ann. of Math 161 (2005), 1571-1588.

[3] L. Clozel, E. Ullmo, *Equidistribution de mesures algébriques*, Compositio Math 141 (2005), 1255-1309.

[4] P. Deligne, *Variétés de Shimura : Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, in Automorphic forms, Representations and L-functions (Borel, Casselman eds.), Proc. Symp. Pure Math. XXXIII 33 (Part II), Providence, R.I. 1979, 247-290.

[5] W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Inv. Math. 92 (1988), 73-90.

[6] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, *Non divergence of translates of certain algebraic measures*, Geom. Funct. Analysis 7 (1997), 48-80.

[7] B. Edixhoven, A. Yafaev, *Subvarieties of Shimura varieties*, Ann. of Math. (2) 157 (2003), 621-645.

[8] R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. A. M. S. 5 (1992), 373-444.

[9] R. Kottwitz, D. Shelstand, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255, Paris, S.M.F., 1999.

[10] S. Lang, *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer 1983.

[11] J.S. Milne, *Shimura varieties and motives*, in Motives, Jannsen, Kleiman, Serre eds., Proc. Symp. Pure Math. 55 vol. II, AMS, Providence 1994, 447-524.

[12] V. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press, 1994.

[13] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Math., Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[14] J.-P. Serre, *Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate*, Astérisque 65 (1969), 155-188 [= Oeuvres, vol. III, 469-502].

[15] V.E. Voskresenskii, *Maximal tori without effect in semi-simple algebraic groups*, Math. Notes 44 (1988), 651-655. [russe : Mat. Zametki 44 (1988), 309-318].

[16] S.-W. Zhang, *Equidistribution of CM points on quaternion Shimura varieties*, preprint.

L. Clozel
UMR 8628 du CNRS
Mathématique Bât 425
Univesité Paris Sud
91405 Orsay
France
laurent.clozel@math.u-psud.fr

E. Ullmo
UMR 8628 du CNRS
Mathématique Bât 425
Univesité Paris Sud
91405 Orsay
France
Emmanuel.Ullmo@math.u-psud.fr