Sur l'induction automorphe pour des p–extensions radicielles et quelques autres opérations fonctorielles (mod p)

Laurent Clozel

Received: August 6, 2015
Revised: June 11, 2016

Communicated by Don Blasius

Abstract. Soit E/F une extension de degré d de corps de nombres, $\mathbb{A}_E, \mathbb{A}_F$ leurs anneaux d'adèles. Le principe de fonctorialité de Langlands postule entre autres une opération d'induction automorphe [1] construisant une représentation automorphe de $GL(nd, \mathbb{A}_F)$ à partir d'une représentation cuspidale de $GL(n, \mathbb{A}_E)$. Quand l'extension E/F est résoluble, ceci a été démontré dans [1]. Si l'extension n'est pas galoisienne, le seul cas connu, dû à Jacquet et Piatetski-Shapiro [18], est celui où $n = 1$ et $d = 3$. Nous montrons l'existence de l'induction automorphe quand $d = p$ est un nombre premier et l'extension radicielle, mais pour des classes de cohomologie mod p. Les démonstrations reposent sur le travail récent de Treumann et Venkatesh [20].

2010 Mathematics Subject Classification: 11 F 03, 11 F 75, 11R 39

Introduction

Soit p un nombre premier, F un corps de nombres, G un groupe réductif connexe défini sur F et $\sigma : G \to G$ un F–automorphisme d'ordre p ; soit $H \subset G$ le groupe réductif formé des points fixes de H. On considère par ailleurs les quotients arithmétiques $S(G, K)$ et $S(H, U)$ définis par des sous–groupes compact–ouverts K, U des points de G, H à valeurs dans les adèles finis de F (voir les définitions précises dans le § 2, pour le cas qui nous intéresse.) On suppose K invariant par σ.

Sous des hypothèses naturelles $S(H, U) \subset S(G, K)$. Considérons la cohomologie de ces espaces à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. Soit par ailleurs $\mathcal{H}(G, \bar{\mathbb{F}}_p)$ et $\mathcal{H}(H, \bar{\mathbb{F}}_p)$ les algèbres de Hecke non ramifiées de G, H (définies en évitant un ensemble fini de places de ramification des données.) Le groupe cyclique $\Sigma =< \sigma >\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ opère alors sur $\mathcal{H}(G, \bar{\mathbb{F}}_p)$.

Dans un article récent, Treumann et Venkatesh [20] montrent alors tout d'abord :

(0.1) Il existe un homomorphisme naturel d'algèbres, l'homomorphisme de Brauer

$$Br : \mathcal{H}(G, \bar{\mathbb{F}_p})^\Sigma \longrightarrow \mathcal{H}(H, \bar{\mathbb{F}_p}) .$$

Ils montrent ensuite, sous des hypothèses naturelles :

(0.2) Tout caractère η_H de $\mathcal{H}(H, \bar{\mathbb{F}_p})$ apparaissant dans la cohomologie de $S(H, U)$ apparaît (composé avec Br) dans la cohomologie de $S(G, K)$.

La cohomologie doit être, évidemment, à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}_p}$. En général, l'algèbre des Σ–invariants est distincte de $\mathcal{H}(G, \bar{\mathbb{F}_p})$. Treumann et Venkatesh définissent une application naturelle de $\mathcal{H}(G, \bar{\mathbb{F}_p})$ vers l'algèbre des invariants, de sorte qu'on obtient un nouvel homomorphisme

$$br : \mathcal{H}(G, \bar{\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \mathcal{H}(H, \bar{\mathbb{F}_p}) .$$

Ils montrent alors

(0.3) L'application br admet une interprétation en dualité de Langlands, à l'aide d'un homomorphisme de groupes duaux $\hat{H} \to \hat{G}$.

Les groupes duaux, de nouveau, doivent être pris à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}_p}$. (Je néglige ici le cas où G et H ne sont pas déployés.) L'homomorphisme dual, dans certains cas, n'existe pas en caractéristique nulle.
Considérons une extension E/F de degré p de corps de nombres, et supposons E radicielle :

$$E = F(\xi^{1/p}) , \ \xi \in F , \ \xi \notin F^p .$$

On ne suppose pas l'extension galoisienne. Alors $\beta = \xi^{1/p}$ étant vu comme un élément de $GL(p, F)$ définit par conjugaison intérieure un automorphisme d'ordre p, σ. Plus généralement, on obtient de même un automorphisme d'ordre p de $GL(pM, F)$. Le groupe des points fixes s'identifie à $GL(M, E)$.
Dans ce cas, l'algèbre des Σ–invariants est, en presque toute place de F, l'algèbre de Hecke non ramifiée entière pour $G = GL(N)$ où $N = pM$. On travaillera donc simplement avec le premier homomorphisme, Br.
Les conditions imposées par Treumann et Venkatesh (G, H semi–simples) ne sont pas ici vérifiées. Cependant, la dualité de Langlands s'exprime ici simplement en termes de représentations galoisiennes (aux places finies non ramifiées.) On voit alors aisément que Br doit se traduire par l'induction galoisienne de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$ à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$, quand les représentations globales existent ; par l'opération locale correspondante, quand on ne le sait pas. Le but de cet article est de montrer, POUR LES CLASSES DE p–TORSION (et dans le cas radiciel) que cette opération, liant valeurs propres de Hecke pour la cohomologie des quotients arithmétiques de $GL(M, E)$ et de $GL(N, F)$, existe en effet.
Renvoyant au corps de l'article pour les théorèmes principaux (et pour la définition précise, due à Ash [2] et revue dans [8], de la correspondance entre caractères de l'algèbre de Hecke et représentations galoisiennes), citons ici seulement deux résultats.

THÉORÈME A.— *Soit E/F radicielle de degré p, et soit $\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \to \bar{\mathbb{F}}_p$ un caractère d'Artin à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$, que l'on peut voir comme un caractère abélien de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$. Il existe alors une classe de cohomologie $\omega \in H^\bullet(S(G, K), \bar{\mathbb{F}_p})$, où $G = GL(p, F)$ et $S(G, K)$ est le quotient arithmétique associé à un sous–groupe compact ouvert convenable de $G(\mathbb{A}_{F,f})$, telle que ω soit une classe propre de*

$\mathcal{H}(G,\bar{\mathbb{F}}_p)$ *(l'algèbre de Hecke étant définie par les places de F hors un ensemble fini) et que le caractère η associé corresponde à la représentation de* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$ *semi–simplifiée de*

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)}\chi$$

Dans le cas général $N = pM$, on ne sait pas toujours qu'une classe $\omega \in H^\bullet(S(H,U),\bar{\mathbb{F}}_p)$ (où $H = GL(M,E)$) provient d'une représentation galoisienne. On a donc un résultat conditionnel :

Théorème B.— *Supposons qu'un caractère η_E de $\mathcal{H}(H,\bar{\mathbb{F}}_p)$ (algèbre de Hecke en presque toute place) provenant d'une classe ω soit associé à une représentation galoisienne r_E de* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_E)$*. Alors il existe une classe $\theta \in H^\bullet(S(G,K),\bar{\mathbb{F}}_p)$ — pour un choix convenable de K — associée à la semi–simplifiée de*

$$r_F = \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)} r_E\,,$$

au moins en presque toute place.

Le résultat démontré est en fait plus général (Théorème 3.1) puisque l'existence de r_E n'intervient pas, évidemment, dans les démonstrations.
On remarquera que les résultats s'appliquent véritablement aux classes de torsion (terme par lequel nous désignons les classes de cohomologie mod p, qu'elles se relèvent ou non en caractéristique 0). Nos corps étant arbitraires (F pourrait par exemple être un corps quadratique imaginaire), on conjecture (cf. [4]) qu'il existe de très nombreuses classes de torsion qui ne peuvent se relever en caractéristique nulle. Du reste l'induction ainsi obtenue n'est pas, en général, compatible avec l'induction automorphe en caractéristique 0 qui existe d'après [1], et ceci pour des raisons de poids. Ceci est expliqué dans le chapitre 4.

La fin de l'article (chapitre 5) applique ces méthodes aux formes automorphes sur les groupes unitaires compacts à l'infini qui jouent un rôle important dans la théorie de Taylor-Wiles en degré supérieur [8]. On montre comment la fonctorialité "endoscopique" est réalisée naturellement mod p dans certains cas. Le résultat, ainsi que le Théorème 4.3, est très voisin de celui de [20, § 9.5], mais Treumann et Venkatesh se limitent au cas où $p = 2$. Noter que, les quotients étant finis, l'argument est essentiellement celui de [6], [7].
Pour les démonstrations, nous avons été amené à reprendre celles de Treumann–Venkatesh puisque leurs hypothèses ne sont pas vérifiées. La preuve a d'ailleurs réservé quelques surprises. Les identités cherchées ne sont pas formelles, comme c'est le cas d'habitude en théorie de Langlands : quand l'extension E/F n'est pas galoisienne, elles reposent sur les propriétés précises de la décomposition des idéaux premiers de F dans E, celle–ci résultant bien sûr de la théorie de Kummer (§ 2.4). Les identités non triviales sont démontrées (pour $M = 1$) dans le § 2.5. Le cas où M est arbitraire s'en déduit assez aisément (§ 3.3).
Le plan de l'article est le suivant. Le chapitre 1 rappelle l'interprétation cohomologique (pour les quotients arithmétiques de $GL(1)\cdots$) des caractères d'Artin. Le chapitre 2, le plus substantiel, est consacré au cas où $M = 1$, c'est–à–dire à la démonstration du Théorème A. Le chapitre 3 traite le cas où M est arbitraire. Le chapitre 4 fait le lien avec les cas où les représentations galoisiennes ont été

construites (corps CM) et détaille la relation avec les représentations en caractéristique nulle associées aux représentations automorphes cohomologiques et régulières. En particulier, si F est CM et si $E = F(\sqrt[p]{\xi})$, nous montrons l'existence d'une représentation galoisienne de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$ de degré pM qui exhibe, sinon la représentation r de degré M associée à une classe de cohomologie mod p pour $GL(M,E)$, au moins la somme

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} r \otimes \omega^i$$

où ω est le caractère cyclotomique (mod p) (Théorème 4.1).
Enfin, le chapitre 5 est consacré aux groupes unitaires "compacts à l'infini". Dans ce cas, la méthode de Treumann-Venkatesh, basée sur la théorie de Smith, n'est pas nécessaire et les démonstrations reposent sur les arguments plus élémentaires de [6], [7]. Nous utilisons cependant, comme dans le reste de l'article, leur définition de l'homomorphisme de Brauer.

Je remercie Christophe Soulé et Richard Taylor pour d'utiles indications. Je remercie aussi le rapporteur dont les remarques ont, je l'espère, rendu l'article beaucoup plus lisible.

1 La « variété de Shimura » du groupe des classes d'idèles et sa cohomologie

Soit E un corps de nombres ; on notera $\mathbb{A}_E$ son anneau d'adèles, $\mathbb{A}_{E,f}$ ou parfois $\mathbb{A}_E^\infty$ l'anneau des adèles finis. Si $E = \mathbb{Q}$ on écrit simplement $\mathbb{A}, \mathbb{A}_f$, ... On note G le groupe $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} GL(1)$. Ainsi

$$G(\mathbb{R}) = \prod_{v|\infty} E_v^\times .$$

Soit A_G le groupe $\mathbb{R}_+^\times$ plongé diagonalement dans $G(\mathbb{R})$.
Un sous–groupe compact connexe maximal de $G(\mathbb{R})$ est donné par

$$U_\infty = \prod_{v \text{ complexe}} U(1)$$

où $U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \ : |z| = 1\}$. Soit par ailleurs U un sous–groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. On considère les quotients compacts

$$\begin{aligned} S(G,U) &= A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/U_\infty U \\ &= \mathbb{R}_+^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / (\prod_{v \ complexe} U(1) \times U)\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\mathbb{R}_+^\times$ est plongé diagonalement comme ci–dessus. On suppose que le quotient par $E^\times$ est le quotient par une action libre, i.e. que $U \cap E^\times$ ne contient pas de racine de l'unité.
Soit (a_i) des représentants (dans le groupe des idèles finis) du groupe strict des classes d'idéaux de E. On a alors

$$\mathbb{A}_E^\times = \coprod_i E^\times (E_\infty^\times)^+ a_i U_0$$

où $U_0 \subset \mathbb{A}_{E,f}^\times$ est le groupe des unités adéliques, et $(E_\infty^\times)^+$ la composante neutre de $E_\infty^\times$, soit

$$\mathbb{A}_E^\times/U = \coprod_i E^\times (E_\infty^\times)^+ a_i U_0/U\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S(G,U) &= \coprod_i \mathbb{R}_+^\times E^\times \backslash E^\times (E_\infty^\times)^+ a_i U_0/U_\infty U \\ &= \coprod_i (\mathbb{R}_+^\times \mathcal{E}\backslash (E_\infty^\times)^+/U_\infty) a_i U_0/U \end{aligned}$$

où $\mathcal{E} = E^\times \cap U$ est un sous–groupe sans torsion du groupe des unités. Le quotient $\mathbb{R}_+^\times \mathcal{E}\backslash (E_\infty^\times)^+/U_\infty$ s'identifie, par l'application logarithmique L de Dirichlet, à $L(\mathcal{E})\backslash \mathbb{R}^{r_1+r_2-1} = L(\mathcal{E})\backslash \mathbb{R}^r$, où $L(\mathcal{E})$ est un réseau. On a donc enfin

$$S(G,U) = \coprod_i (L(\mathcal{E})\backslash \mathbb{R}^r) a_i \; U_0/U\,.$$

Par ailleurs le quotient fini

$$C\ell(U) = E^\times (E_\infty^\times)^+ \backslash \mathbb{A}_E^\times/U$$

s'identifie à $\coprod_i a_i U_0/U$, sur lequel opère $\mathbb{A}_{E,f}^\times$; celui–ci opère donc sur $C(C\ell(U), \mathbb{C})$ par les restrictions des caractères de Dirichlet de $\mathbb{A}_E^\times$ (constants sur U).

Pour tout anneau commutatif R, on a

$$\begin{aligned} &H^\bullet(L(\mathcal{E})\backslash \mathbb{R}^r, R) \\ &= H^\bullet(U(1)^r, R) \\ &= \bigoplus_{i=1}^r R^{\binom{r}{i}} \end{aligned}$$

Soit h le produit du nombre des classes strictes d'idéaux et de $[U_0 : U]$. En définitive, pour $S = S(G,U)$:

Lemme 1.1.— (1) *En tous degrés* $0 \le i \le r$, $H^i(S,R)$ *est libre de dimension* $h\begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix}$ *sur* R. *En particulier*

$$H^i(S, \bar{\mathbb{Z}}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p = H^i(S, \bar{\mathbb{F}}_p)\,.$$

(2) $\mathbb{A}_{E,f}^\times$ *opère sur* $H^i(S,R)$ *par les caractères d'Artin de* $\mathbb{A}_{E,f}^\times$, *à valeurs dans* $R^\times$, *invariants par* U.

Si χ est un caractère à valeurs dans $\bar{\mathbb{Z}}_p{}^\times$, donc dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$, il est d'ordre fini et donc à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times \subset \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$. Si on se donne un plongement de (la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$) $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, on peut donc l'identifier à un caractère à valeurs complexes. Pour l'action de $\mathbb{A}_{E,f}^\times$ dans la cohomologie, on voit donc que si U vérifie la condition ci–dessus :

Lemme 1.2.— *Tout caractère* $\chi : \mathbb{A}_{E,F}^\times \to \bar{\mathbb{F}}_p$ *qui apparaît dans* $H^\bullet(S(G,U), \bar{\mathbb{F}}_p)$ *est la réduction* $\bmod p$ *d'un caractère d'Artin à valeurs complexes* $\tilde{\chi}$. *Réciproquement, la réduction* $\bmod p$ *d'un caractère d'Artin complexe apparaît dans* $H^i(S(G,U), \bar{\mathbb{F}}_p)$ *(et ceci pour tout* i*).*

2 INDUCTION AUTOMORPHE (CAS D'UN CARACTÈRE)

2.1

Rappelons plus précisément notre choix, arithmétique, de paramétrisation locale. Dans cette section seulement, et pour simplifier les notations, F désigne un corps p–adique. Soit q le cardinal du corps résiduel. Soit $n \geq 1$ fixé. D'après la conjecture de Langlands locale [16, 17] il existe une bijection entre représentations irréductibles admissibles de $GL(n,F)$ et représentations Frobenius semi–simples du groupe de Weil–Deligne WD_F. On peut la normaliser de différentes façons. Les diverses compatibilités énumérées dans [16], [17], étant imposées, il nous suffit de la spécifier dans le cas non ramifié.
Soit alors π une représentation non ramifiée de $GL(n,F_v)$, et supposons que c'est un sous–quotient de l'induite UNITAIRE, du sous–groupe de Borel, des caractères non ramifiés $(\chi_1,\dots,\chi_n)$. Le paramètre de π pour la correspondance de Langlands unitaire est alors

$$t(\pi) = \mathrm{diag}(\chi_1(\varpi),\dots \chi_n(\varpi))$$

où ϖ est une uniformisante. Soit Frob $\in W_F$ un élément de Frobenius géométrique.

DÉFINITION 2.1.— *La normalisation arithmétique de la correspondance locale associe à π (non ramifiée) la représentation semi–simple non ramifiée r de W_F telle que les valeurs propres de* Frob *soient* $\{q^{\frac{n-1}{2}}\chi_i(\varpi)\}$.

Soit T_α $(\alpha = 0,1,\dots n)$ l'opérateur de Hecke donné par la fonction caractéristique de

$$GL(n,\mathcal{O}) \begin{pmatrix} \varpi & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varpi & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} GL(n,\mathcal{O}) \subset GL(n,F)\,.$$

où α coefficients diagonaux sont égaux à ϖ. On a alors d'après des calculs connus [8] :

LEMME 2.2.— *Si π est une représentation non ramifiée, la valeur propre a_α de T_α dans les $GL(n,\mathcal{O})$–invariants de l'espace de π est*

$$q^{\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} S_\alpha(t(\pi)),$$

où

$$S_\alpha(t_1,\dots t_n) = \sum_{|I|=\alpha} \prod_{i\in I} t_i\,.$$

Pour $\alpha = 1$, on voit en particulier que, pour la représentation r de la Définition 2.1,

$$\mathrm{trace}\; r(\mathrm{Frob}) = a_1\,.$$

2.2

La notation F, E,... désigne désormais des corps de nombres. Soit n un entier, et considérons l'analogue non abélien des variétés du Chapitre 1. On considère donc le groupe $G = GL(n)/F$.
Pour une place archimédienne v de F, posons

$$\begin{array}{ll} K_v = SO(n, F_v) & v \text{ réelle} \\ K_v = U(n) \subset GL(n, F_v) \cong GL(n, \mathbb{C}) & v \text{ complexe}. \end{array}$$

On définit pour $K \subset G(\mathbb{A}_{F,f})$ décomposé :

$$\begin{array}{rrl} & S(G,K) & = A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K \\ \text{où} & K_\infty & = \prod_{v|\infty} K_v \end{array}$$

et A_G est $\mathbb{R}_+^\times$ plongé diagonalement dans $\prod_{v|\infty} G(F_v)$.
Soit v une place finie de F. On note $\mathcal{O}_v$ l'anneau d'entiers, k_v le corps résiduel, q_v le cardinal de celui-ci. Si v est non ramifiée pour K, et $\mathcal{H}_v = C_c(K_v\backslash G(F_v)/K_v, \mathbb{Z})$ est l'algèbre de Hecke non ramifiée, engendrée par les $T_{v,\alpha}$ et $T_{v,n}^{-1}$, $\mathcal{H}_v$ opère naturellement sur l'espace (de type fini sur R)

$$H^\bullet(S(G,K), R) \tag{2.1}$$

pour tout anneau de coefficients R. Si

$$\mathcal{H}^S = \bigotimes_{v \notin S} \mathcal{H}_v$$

(produit tensoriel restreint, S étant l'ensemble fini des places de ramification), $\mathcal{H}^S$ opère donc sur cet espace. Si $R = \mathbb{C}$, on sait d'après Franke [12] que tout homomorphisme $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ apparaissant dans (2.1) provient d'une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_F)$ (d'ailleurs cohomologique, mais non unitaire en général.)
Supposons que $R = \bar{\mathbb{F}_p}$. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_v \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{q_v}]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\frac{1}{q_v}][X_1^{\pm 1}, \dots X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$.
On en déduit que pour $v \nmid p$

$$\mathcal{H}_v \otimes \bar{\mathbb{F}_p} \cong \bar{\mathbb{F}_p}[X_1^{\pm 1}, \dots X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}. \tag{2.2}$$

Dans cet isomorphisme,

$$T_{v,\alpha} \mapsto q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} S_\alpha \tag{2.3}$$

([8, p. 83]. Si $\eta_v : \mathcal{H}_v \otimes \bar{\mathbb{F}_p} \to \bar{\mathbb{F}_p}$ est donné, on définit une matrice $t_v \in (\bar{\mathbb{F}_p}^\times)^n/\mathfrak{S}_n$ par l'isomorphisme (2.2). D'après le Lemme 3.1.1 de [8], ceci est compatible avec la correspondance $t_v \mapsto r_v$ décrite en caractéristique nulle : les coefficients de t_v sont alors les valeurs propres de r_v (Frob_v).

Définition 2.3.— *Si $\eta_v : \mathcal{H}_v \otimes \bar{\mathbb{F}_p} \to \bar{\mathbb{F}_p}$ est donné, on définit $r(\eta_v)$ comme la représentation semi–simple non ramifiée de W_{F_v} telle que les valeurs propres de* Frob_v *sont les coefficients (t_v^i).*

Rappelons une conjecture d'Avner Ash [2] :

Conjecture 2.4 (Ash).— *Supposons que* $\eta : \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{F}}_p$ *apparaît dans* $H^\bullet(S(G,K),\bar{\mathbb{F}}_p)$. *Il existe une représentation semi–simple* $r : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to GL(n,\bar{\mathbb{F}}_p)$ *telle que, pour tout* v *non ramifié pour* K *et ne divisant pas* p, *la semi–simplifiée de* $r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)}$ *soit isomorphe à* $r(\eta_v)$ *où* $\eta_v = \eta|_{\mathcal{H}_v}$.

On remarquera que, les représentations considérées étant d'image finie, il n'y a pas lieu en fait de distinguer entre représentations du groupe de Galois ou du groupe de Weil.

Dans le cas où F est un corps totalement réel ou de type CM, cette conjecture a été démontrée par Scholze [19], ainsi que par Harris, Lan, Taylor et Thorne quand η se relève en caractéristique nulle [15].

Notre propos dans ce chapitre est de déduire des résultats de Treumann et Venkatesh le théorème suivant. Soit E/F une extension radicielle de degré p premier :

$$E = F(\sqrt[p]{\xi}), \ \xi \in F^\times, \ \xi \notin F^p .$$

Soit $\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / E_\infty^\times$ un caractère d'Artin, à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p^{\,\times}$.

Noter que l'on ne suppose pas l'extension E/F galoisienne.

Théorème 2.5.— *Il existe un sous–groupe compact–ouvert décomposé* $K \subset GL(p,\mathbb{A}_{F,f})$, *et un caractère* $\eta : \mathcal{H}^S \to \bar{\mathbb{F}}_p$ *apparaissant dans* $H^\bullet(S(G,K),\bar{\mathbb{F}}_p)$ *où* S *contient l'ensemble des places de ramification, tel que, pour toute place* $v \notin S$, $r(\eta_v)$ *soit isomorphe à la semi–simplifiée de* $\bigoplus_{w|v} \mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} \chi_w$.

En particulier la semi–simplifiée de $\mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/E)}^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)}\chi$ *est associée à* η, *conformément à la conjecture d'Ash, au moins en presque toute place.*

Remarque : Soit $\tilde{\chi}$ un relèvement de χ en caractéristique nulle. Comme on l'a rappelé dans l'Introduction, la représentation automorphe $\mathrm{Ind}_E^F\tilde{\chi}$ existe d'après [1] si E/F est cyclique. Cependant elle n'est pas cohomologique. Même dans le cas cyclique, les résultats connus en caractéristique nulle n'impliquent pas directement le Théorème 2.5. On reviendra sur ces questions dans le Chapitre 4.

2.3

On considère l'automorphisme intérieur, défini sur F, de G,

$$\sigma : g \mapsto \beta g \beta^{-1} \quad (\beta = \xi^{1/p})$$

où l'on a plongé E, de la façon usuelle, dans $M_p(F)$ et donc $E^\times$ dans $G(F)$. On a $\sigma^p = 1$, et σ descend en un automorphisme de $A_G\backslash G(\mathbb{A}_F)$. Puisque A_G est sans torsion, on vérifie aussitôt que le groupe des points fixes de $\Sigma =< \sigma >$ dans $A_G\backslash G(\mathbb{A}_F)$ est égal à $A_H\backslash H(\mathbb{A}_F)$; ici $H = \mathrm{Res}_{E/F}(GL(1)/E)$, $H(\mathbb{A}_F)$ est essentiellement le groupe des classes d'idèles de E, et ses quotients par un sous–groupe compact (connexe) maximal aux places archimédiennes sont décrits au Chapitre 1.

L'élément $\xi^{1/p} \in E^\times$ étant une unité en presque toute place finie, il appartient alors (après conjugaison) à $GL(p,\mathcal{O}_v)$ pour presque toute place v de F. En particulier σ laisse invariant ce sous–groupe compact maximal K_v, et $U_v = \prod_{w|v} \mathcal{O}_w^\times \subset K_v$ est égal à K_v^σ.

En toute place finie v (ramifiée pour les données) de F, il existe un groupe compact–ouvert de $G(F_v)$, K_v, invariant par σ ; alors $K_v^\sigma = U_v$ est compact–ouvert dans $H(F_v)$. De tels sous–groupes sont cofinaux parmi les sous–groupes compacts ouverts U_v.
Considérons enfin une place archimédienne v de F, de sorte que $E_v^\times = \prod_{w|v} E_w^\times \subset G(F_v)$.

LEMME 2.6.— *Supposons $p \geq 3$ ou, si $p = 2$, ξ négatif en v si v est réelle. Il existe un sous–groupe compact* CONNEXE *maximal K_v de $G(F_v)$, σ–stable, tel que $K_v \cap E_v^\times$ soit égal au sous–groupe compact connexe maximal $U_v = \Pi\, U_w$ de $E_v^\times$.*

Ceci est essentiellement dû à Treumann et Venkatesh [20, § 5.5], mais ceux–ci considèrent les sous–groupes compacts maximaux. Si $\tilde{K}_v \subset G(F_v) \rtimes \Sigma$ est compact maximal et contient le sous–groupe $U'_v \times \Sigma$ (U'_v compact maximal dans $E_v^\times$), alors $\tilde{K}_v \cap G(F_v)$ est compact maximal et $\tilde{K}_v \cap E_v^\times = U'_v$.
Si v est une place complexe de F, la démonstration est complète. Supposons v réelle et $p \geq 3$. Alors $E_v = F_v(\xi^{1/p})$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{\frac{p-1}{2}}$. L'argument précédent donne $U'_v = \{\pm 1\} \times U(1)^{\frac{p-1}{2}} \subset O(n, \mathbb{R})$ (à conjugaison près). Alors $U_v = \{1\} \times U(1)^{\frac{p-1}{2}} \subset SO(n, \mathbb{R}) = K_v$ est égal à $K_v \cap E_v^\times$.
Si $p = 2$ et ξ est > 0 en v, β est à conjugaison près $\begin{pmatrix} \sqrt{\xi} & \\ & -\sqrt{\xi} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$, son centralisateur étant le sous–groupe diagonal $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$. Dans ce cas le Lemme 2.6 reste vrai avec la conclusion plus faible :

$$K_v \cap E_v^\times = \{(1,1), (-1,-1)\}\,. \tag{2.4}$$

Puisque $K_v \cap E_v^\times$ est d'ordre 2, tout caractère d'Artin $\chi : \mathbb{A}_E^\times \to \bar{\mathbb{F}}_2^\times$ est trivial sur ce sous–groupe de $E_v^\times$: il descend donc à $S(H, U')$ où U'_v est le sous–groupe (2.4) en de telles places.
Les hypothèses précédentes étant vérifiées en toutes les places, on obtient une application naturelle

$$j : S(H, U) \longrightarrow S(G, K) \tag{2.5}$$

dont l'image est évidemment contenue dans $H^0(\Sigma, S(G, K))$. Si l'on suppose de plus que $K_f = \prod_{v \nmid \infty} K_v$ (et donc U_f) sont NETS :

$$K_f \text{ ne contient pas d'élément d'ordre fini conjugué à un élément de } G(F), \tag{2.6}$$

on vérifie aisément que j est injective. (cf. [20, 5.7]) En fait j identifie, par un homéomorphisme, $S(K, U)$ à une réunion finie de composants connexes de $H^0(\Sigma, S(G, K))$.
Rappelons que $H(F) = F[\beta]^\times \subset GL(p, F)$. On dit que la place finie v de F est BONNE si $v \nmid p$, si $K_v \subset GL(p, F_v)$ est égal à $GL(p, \mathcal{O}_v)$ et $\beta \in K_v$, si E est non ramifiée en v, si $\prod_{w|v} \mathcal{O}(E_w^\times) \subset GL(p, \mathcal{O}_v)$ et si $\ker[H^1(\Sigma, K_v) \to H^1(\Sigma, G(F_v))]$ est la classe triviale de $H^1(\Sigma, K_v)$ [1]

LEMME 2.7.— *Presque toutes les places finies de F sont bonnes.*

1. Cette définition réunit celles de [20, § 5.2, 5.6] ($v \nmid p, K_v$ hyperspécial et invariant par $Ad(\beta)$) et de [20, § 4.1] (condition cohomologique) ; on a supposé de plus E non ramifié en v.

C'est évident, sauf pour la condition cohomologique. Celle–ci est vérifiée dans [20, Propositions 5.6]. Dans notre cas, on peut donner une démonstration plus explicite.
L'hypothèse relative au H^1 est équivalente à

$$\textbf{L'injection naturelle } G_v^\Sigma / K_v^\Sigma \hookrightarrow H^0(\Sigma, G_v/K_v) \textbf{ est bijective} \tag{2.7}$$

Supposons d'abord v décomposée dans E. On a la décomposition d'Iwasawa $G_v = B_v\, K_v$, B_v étant le sous–groupe de Borel ; elle est unique, à l'ambiguïté près d'un facteur dans $B_v \cap K_v$. Soit $x = b\, K_v$ et supposons que $\sigma x = x$. On peut écrire $b = h\ n$ où $h \in H_v$, $n \in N_v$, le radical unipotent. Alors $h\ n\, K_v = h\beta n \beta^{-1} K_v$ où β est une matrice diagonale dont les coefficients sont des unités. Si $n = 1 + X$ où $X = (x_{i,j})$ est nilpotente, on voit que $1 + X \in (1 + Ad(\beta)X)K_v$, ce qui veut dire que $(\beta_i/\beta_j - 1)x_{ij} \in \mathcal{O}_v$. Mais $\beta_i/\beta_j - 1 (i \neq j)$ est une unité pour presque tout v, donc enfin $b = h\ n$ où n est une matrice entière.
Dans le cas général, soit F'_v une extension non ramifiée de F_v décomposant tous les facteurs de E_v.
Soit $\mathcal{X} = G_v/K_v$ l'ensemble des sommets de l'immeuble de Tits de G_v, et $\mathcal{X}'$ l'ensemble des sommets de l'immeuble relatif à F'_v. Si φ est l'automorphisme de Frobenius, on sait (c'est élémentaire pour $GL(n)$) que $(\mathcal{X}')^\varphi = \mathcal{X}$. L'automorphisme σ commute à φ ; la même remarque s'applique aux immeubles $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}'$ de H sur F_v (E étant non ramifié). Alors, sous les mêmes hypothèses sur β, $\mathcal{X}^\sigma = (\mathcal{X}'^\varphi)^\sigma = (\mathcal{X}'^\sigma)^\varphi = \mathcal{Y}'^\varphi = \mathcal{Y}$, q.e.d.

Soit v une place telle que l'hypothèse (2.7) soit vérifiée, et ne divisant pas p. Notons $\mathcal{H}_v(G)$ l'algèbre de Hecke non ramifiée. On suppose aussi que les hypothèses précédentes sont vérifiées ; en particulier K_v est maximal et $K_v \cap H(F_v)$ est égal aux unités de $\prod_{w|v} E_w^\times$. Il existe alors un homomorphisme naturel [20, 4.2]

$$Br : \mathcal{H}_v(G) \longrightarrow \mathcal{H}_v(H)\,,$$

l'algèbre de Hecke (d'un produit de corps non ramifiés) à droite étant relative aux unités.
Les coefficients sont dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. On reviendra plus tard sur la description de cet homomorphisme. Le résultat fondamental de Treumann et Venkatesh est alors :

Théorème 2.8 [20, Thm. 4.4, Thm 5.8].— *Soit S l'ensemble fini des places finies qui ne sont pas bonnes, ou en lesquelles les données sont ramifiées, et $\mathcal{H}^S(G) = \bigotimes_{v \notin S} \mathcal{H}_v(G)$, $\mathcal{H}^S(H) = \bigotimes_{v \notin S} \mathcal{H}_v(H)$ les produits tensoriels (restreints) d'algèbres de Hecke non ramifiées. Soit $\eta : \mathcal{H}^S(H) \to \bar{\mathbb{F}}_p$ un caractère qui apparaît dans $H^\bullet(S(H,U), \bar{\mathbb{F}}_p)$. Alors $\eta \circ Br$ apparaît dans $H^\bullet(S(G,K); \bar{\mathbb{F}}_p)$.*

D'après le Chapitre 1, les caractères η sont tous les caractères de $\mathcal{H}^S(\mathcal{H})$ déduits des caractères d'Artin de $E^\times$.
Il s'agit évidemment désormais, pour démontrer le Théorème 1.5, de décrire l'homomorphisme de Brauer en fonction des données duales (i.e., dans notre cas, des représentations galoisiennes.) Ceci est fait par Treumann et Venkatesh dans leur article [20, Theorem 9.1] mais sous l'hypothèse que G et H sont semi–simples connexes. Plutôt que de reprendre leurs calculs dans les L–groupes, il est plus naturel dans ce cas très simple de procéder directement. Pour cela, nous aurons besoin de rappels sur la théorie de Kummer.

2.4

Rappelons que $E = F(\sqrt[p]{\xi})$. Si F contient $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, l'extension E/F est cyclique d'ordre p. Le cas le plus intéressant pour nous est donc celui où F ne contient pas les racines p–ième de l'unité. Pour simplifier nous supposons tout d'abord F linéairement disjoint sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Les extensions E et $F(\zeta_p)$ de F sont linéairement disjointes.
Dans cette section seulement, et pour simplifier les notations, on notera G le groupe $\mathrm{Gal}(E(\zeta_p)/F)$.
Le diagramme de corps

$$\begin{tikzcd} & E(\zeta_p) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ E \arrow[dr, dash] & & F(\zeta_p) \arrow[dl, dash] \\ & F & \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

où les extensions de droite sont galoisiennes donne la suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H = 1$$

où $H = \mathrm{Gal}(E(\zeta_p)/F(\zeta_p)) \cong \mathbb{Z}/p$ et $G/H = \mathbb{F}_p^\times$ (identification canonique). Ainsi G devient un produit semi–direct $G = \mathbb{Z}/p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$, avec l'action évidente de $\mathbb{F}_p^\times$.
Nous aurons besoin de comprendre la décomposition dans E des places v de F non ramifiées dans E (et dans $E(\zeta_p)$ car on supposera que $v \nmid p$.) Soit donc $D \subset G$ le sous–groupe (cyclique) de décomposition de v dans $E(\zeta_p)$. Les places de E divisant v sont en bijection avec

$$X = \mathbb{F}_p^\times \setminus G \,/\, D$$

où $\mathbb{F}_p^\times = \mathrm{Gal}(E(\zeta_p)/E)$ (canoniquement.) Il y a trois possibilités :

(2.9a) $D = \{1\}$, v décomposée dans E et $E(\zeta_p)$, $|X| = p$.

(2.9b) $D \cap \mathbb{Z}/p = \mathbb{Z}/p$, donc $D = \mathbb{Z}/p$ (car D est abélien), $|X| = 1$: v est inerte dans E.

(2.9c) $D \cap \mathbb{Z}/p = \{0\}$, donc D est isomorphe à son quotient $D' \subset \mathbb{F}_p^\times$, que l'on suppose $\neq \{1\}$.

On vérifie aisément que D est alors conjugué au groupe formé des éléments $(0, a^m) \in \mathbb{Z}/p \times \mathbb{F}_p^\times$ où $a \neq 1$. Soit n l'ordre de a : donc $n \mid p-1$, $n > 1$.
Il est commode pour le calcul d'identifier G au groupe « $ax + b$ » formé des matrices

$$\begin{pmatrix} x & z \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{F}_p^\times\,,\ z \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p)\,.$$

Alors $\mathbb{F}_p^\times \backslash G$ s'identifie à $\mathbb{F}_p$ par

$$\begin{pmatrix} x & z \\ & 1 \end{pmatrix} \mapsto z/x \in \mathbb{F}_p\,,$$

et l'image de

$$\begin{pmatrix} x & z \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & z \\ & 1 \end{pmatrix}$$

est égale à $a^{-1}(z/x)$.
Donc X s'identifie à $\mathbb{F}_p/ < a >$, a opérant par $z \mapsto a^{-1}z$. Le cardinal de X est $1 + \frac{p-1}{n}$ $(n > 1)$.
Si w est un élément de X représenté par $g \in G$, le degré résiduel correspondant est

$$f_w = |D \cap g^{-1}Hg \backslash D|\,.$$

On a $g = \begin{pmatrix} 1 & z \\ & 1 \end{pmatrix}$, $D = \left\{ \begin{pmatrix} a^m & \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $H = \mathbb{F}_p^\times$ et

$$g^{-1}\,H\,g = \left\{ \begin{pmatrix} x & (x-1) & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (x \in \mathbb{F}_p^\times)\,.$$

Si $z = 0$, $D = D \cap g^{-1}Hg$. Si $z \neq 0$, l'intersection est nulle est $f_w = |D| = n$.
Par ailleurs, la projection naturelle $G \to \mathrm{Gal}(F(\zeta_p)/F)$ (cf. (2.8)) est alors bijective sur D. En particulier le caractère cyclotomique $\omega_p : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathbb{F}_p^\times$ a une image d'ordre n sur $D =< \mathrm{Frob}_v >$. On en déduit que q_v est d'ordre n dans $\mathbb{F}_p^\times$. Pour résumer :

Lemme 2.8.— *Supposons $p > 2$. Soit $v \nmid p$ une place de F, non ramifiée dans E, qui n'est ni inerte ni décomposée. Alors l'ensemble des places w de E divisant v est formé d'une place w_0 telle que $f_{w_0} = 1$ et de $\frac{p-1}{n} = t$ places $w = w_1, \ldots, w_t$ avec $f_w = n$. De plus q_v est d'ordre n dans $\mathbb{F}_p^\times$.*

Le cas où F n'est pas linéairement disjoint de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ se traite de la même manière. On suppose encore que F ne contient pas $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Alors $\mathrm{Gal}(F(\zeta_p)/F)$ est un sous–groupe G_{cycl}, d'ordre $m \mid p-1$ $(m > 1)$, de $\mathbb{F}_p^\times$. On a un produit semi–direct

$$G = (\mathbb{Z}/p) \rtimes G_{cycl}\,;$$

les cas de décomposition sont de nouveau (2.9a) (auquel cas $q_v \equiv 1$), (2.9b) (auquel cas $q_v \equiv 1$ car D est d'image triviale dans $\mathrm{Gal}(F(\zeta_p)/F)$), et (2.9c) où $D' \subset G_{cycl}$ et $n = D' \neq 1$. On a alors par le même calcul :

Lemme 2.9 (F non linéairement disjoint de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$).— *Dans le cas (2.9c), l'ensemble des places $w \mid v$ est décrit par le Lemme 2.8, n étant un diviseur de $m = |\mathrm{Gal}(F(\zeta_p)/F|$.*

Enfin, si F contient une racine primitive d'ordre p, E/F est cyclique, le caractère cyclotomique s'annule sur $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ et l'on a $q_v \equiv 1 \pmod p$ [2] pour tout v non ramifié $(v \nmid p)$.

2.5

Revenons aux notations générales de l'article et au calcul de l'homomorphisme de Brauer. Soit v une place de F où les données sont non ramifiées, et $\mathcal{H}_v$ l'algèbre de Hecke non ramifiée à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. Soit $\mathcal{X} = G_v/K_v$ (§ 2.3). On identifie $\mathcal{H}_v$ à l'espace $\mathcal{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ des fonctions sur $\mathcal{X}$, invariantes par l'action diagonale de $G := G_v$, et à support dans un ensemble fini d'orbites [20, § 2.10]. L'identification est donnée par

$$\Phi \mapsto \varphi\,,\ \ \varphi(K\,g\,K) = \Phi(K, gK)$$

2. On écrira simplement $q_v \equiv 1[p]$

($\Phi \in \mathcal{F}$, $\varphi \in \mathcal{H}$, $K := K_v$)
On a $\mathcal{Y} = H_v/U_v \subset \mathcal{X}$, et l'application $Br : \mathcal{H}_v(G) \to \mathcal{H}_v(H)$ est simplement donnée par la restriction pour les espaces $\mathcal{F}$. La propriété (2.7) implique que Br est un homomorphisme (sur $\bar{\mathbb{F}}_p$!) : cf. [20, § 4.2] On suppose de plus que v est une bonne place au sens du § 2.3, donc que $\beta \in K = K_v$. Alors toute fonction de $\mathcal{H}_v(G)$ est invariante par σ.
Soit $\varphi = ch(K\,s\,K)$ où s appartient au tore diagonal $(F^\times)^p$. Avec ces définitions, $Br(\varphi)$ est simplement la restriction à $H = H_v$ de la fontion φ.
La place v étant fixée, nous écrirons simplement T_α pour $T_{v,\alpha}$. Nous considérons d'abord l'opérateur T_1, donc défini par

$$\varphi = ch\big(K \begin{pmatrix} \varpi & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} K\big)\,.$$

La place v étant supposée non ramifiée dans E, on a $E \otimes F_v = E_1 \times \cdots \times E_r$ où E_i est non ramifiée de degré f_i, $\Sigma f_i = p$. On peut supposer $\Pi E_i^\times$ plongé diagonalement dans $GL(p, F)$, avec $\mathcal{O}_i^\times \subset K$. Il convient donc de calculer la restriction de φ à un élément qui, modulo K, devient $h = \mathrm{diag}(z_1, \dots z_r)$ où $z_i = (\varpi^{n_i}, \dots, \varpi^{n_i})$ (matrice de degré f_i). Il en résulte aussitôt que $n_i = 0$ ou 1, que $n_i = 1$ pour un unique i, et qu'alors $f_i = 1$. On a donc :

Lemme 2.10.—

$$Br(\varphi) = \sum_{i : f_i = 1} \Big(\prod_{j \neq i} ch(\mathcal{O}_{E_j}^\times)\Big) ch(\varpi \mathcal{O}_{E_i}^\times)\,.$$

Il en résulte que, pour $\chi_v = \bigotimes_{w|v} \chi_w$

$$\eta_v(Br(\varphi)) = \sum_{f_w = 1} \chi_w(\varpi_w)\,. \tag{2.10}$$

Nous devons comparer avec (2.3) ; puisque $\alpha = 1$, la puissance de q disparaît. Par construction S_1 est la somme des valeurs propres de $\mathrm{ind}(\chi)$ sur Frob_v, $\mathrm{ind}\chi$ étant localement égale à

$$\bigoplus_{w|v} \mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} \chi_w\,.$$

Si $f_w = [W_{F_v} : W_{E_w}] > 1$ cette représentation est de trace nulle, Frob_v opérant par permutation. Il reste les termes décomposés, de façon compatible à (2.10). Nous avons donc vérifié que la trace de la représentation $\mathrm{ind}\chi$ est compatible, par la correspondance d'Ash, à l'action de T_1. Ceci n'implique pas la Conjecture 2.4 ! Il nous faut obtenir le polynôme caractéristique de Frob_v, et non seulement sa trace.
Supposons maintenant $1 < \alpha \leq p$. On considère donc la fonction caractéris-

tique de

$$C = K \begin{pmatrix} \varpi & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varpi & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} K$$

avec α coefficients égaux à ϖ. De nouveau, on doit imposer que $\mathrm{diag}(z_1, \ldots z_r) \in C$, où

$$z_i = (\varpi^{n_i}, \ldots, \varpi^{n_i}) .$$

On a aussitôt $n_i = 0$ ou 1, et

$$\alpha = \sum_{n_i=1} f_i . \tag{2.11}$$

Disposons d'abord du cas galoisien. Alors $(f_i) = (p)$ ou $(1, \ldots, 1)$ et, on l'a vu, $q_v \equiv 1$ $[p]$ ce qui neutralise les coefficients de (2.3). Si la place v est inerte, (2.11) implique $\alpha = p$, et la valeur de χ sur $Br(T_\alpha)$ est égale à $\chi(\varpi_w) = \chi(\varpi_v)$ où $w \mid v$. Par ailleurs du côté galoisien

$$\det(\mathrm{ind}\chi)(\mathrm{Frob}_v) = (transf(\chi))(\mathrm{Frob}_v) \det(P_{\mathrm{Frob}_v})$$

où $transf$ est le transfert cohomologique, qui se traduit par la restriction des caractères, et P_{Frob_v} est la matrice de permutation circulaire d'ordre p, de déterminant 1. Cf. [11, § 13B]. Donc l'identité cherchée est satisfaite pour $\alpha = p$. Si $\alpha < p$, $Br(\varphi) = 0$ où φ représente T_α. La représentation galoisienne est

$$\mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}}(\chi) ,$$

une induite de degré p, et l'on vérifie aussitôt que tous les coefficients S_α $(\alpha < p)$ s'annulent. D'où le résultat dans le cas inerte.
Supposons v décomposée. La représentation en v est alors (semi simplifiée)

$$\bigoplus_{w|v} \chi_w ; \tag{2.12}$$

en utilisant (2.11) avec $f_i = 1$, on voit aussitôt , les places divisant v étant $w_1, ..., w_p$, que

$$\eta(Br\varphi) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots p\} \\ |I|=\alpha}} \prod_{i \in I} \chi_{w_i}(\varpi)$$

ce qui est bien le terme S_α pour (2.12). Ceci termine, dans le cas galoisien, la démonstration du Théorème 2.5.
Considérons maintenant le cas non galoisien, en utilisant les résultats du § 2.4. Nous considérons les trois cas décrits en (2.9). Si v est décomposée dans $E(\zeta_p)$, $q_v \equiv 1$ $[p]$ et le calcul précédent s'applique. Si v est inerte, on doit toujours avoir $\alpha = p$ (les autres termes étant nuls du côté automorphe et du côté galoisien) et (2.3) donne un coefficient $q_v^{\frac{p(1-p)}{2}}$. Dans ce cas $D = \mathbb{Z}/p$, d'image $\{1\}$ dans $\mathrm{Gal}(F(\zeta_p)/F)$, donc v est décomposée dans $F(\zeta_p)$ et $q_v \equiv 1$ $[p]$. Le cas intéressant

est donc le cas intermédiaire (2.9c). Dans ce cas le Lemme 2.8, joint à (2.11), nous donne l'expression suivante : il y a $t+1$ places $w_0, w_1, ..., w_t$ de E divisant v et

$$\eta(Br(\varphi)) = \chi_0(\varpi) \sum_{I \subset \{1,\dots t\}} \prod_{i \in I} \chi_i(\varpi) + \sum_{J \subset \{1,\dots t\}} \prod_{j \in J} \chi_j(\varpi)\,. \tag{2.13}$$

Dans la première somme, on doit avoir $n|I| = \alpha - 1$; dans la seconde, $n|J| = \alpha$. On a posé $\chi_i = \chi_{w_i}$.
Considérons maintenant la représentation galoisienne. En la place v, on a après semi–simplification

$$\mathrm{ind}\chi = \chi_0 \oplus \sum_i \mathrm{ind}_{W_{F_n}}^{W_F} \chi_i$$

où on a écrit pour simplifier F pour F_v, F_n étant son extension non ramifiée de degré n. Ainsi

$$\Lambda^\alpha(\mathrm{ind}\chi) = \bigoplus_{\alpha_0+\cdots+\alpha_t=\alpha} \bigotimes_i \Lambda^{\alpha_i} V_i\,,$$

V_i parcourant les représentations χ_0, $\mathrm{ind}\chi_i$, soit

$$\Lambda^\alpha(\mathrm{ind}\chi) = \chi_0 \otimes \bigoplus_{\alpha_1+\cdots+\alpha_r=\alpha-1} \bigotimes_i \Lambda^{\alpha_i} V_i \oplus \bigoplus_{\alpha_1+\cdots+\alpha_r=\alpha} \bigotimes_i \Lambda^{\alpha_i} V_i\,.$$

Les représentations V_i étant des induites cycliques, on a trace $(\mathrm{Frob}_v|\Lambda^{\alpha_i}V_i) = 0$ sauf pour $\alpha_i = 0, n$. Pour calculer S_α, il reste donc les termes

$$\chi_0 \otimes \bigoplus_{|I|=\frac{\alpha-1}{n}} \bigotimes_{i\in I} \det V_i \tag{2.14}$$

$$\bigoplus_{|I|=\frac{\alpha}{n}} \bigotimes_{i\in I} \det V_i\,. \tag{2.15}$$

Par conséquent, $\alpha - 1$ ou α doit être divisible par $n > 1$.
Considérons le premier cas, qui correspond à la première somme de (2.13) — les deux termes étant, là aussi, mutuellement exclusifs. On a comme auparavant

$$\det V_i(\mathrm{Frob}_v) = \chi_i(\varpi) \det(P_{\mathrm{Frob}_v}) \tag{2.16}$$

le déterminant étant maintenant égal à $(-1)^{n-1}$. Donc (2.14) est égal à

$$(-1)^{(n-1)\frac{\alpha-1}{n}} \chi_0(\varpi) \sum_{|I|=s} \prod_{i\in I} \chi_i(\varpi)$$

où $s = \frac{\alpha-1}{n}$.
Il nous reste à introduire le terme multiplicateur de (2.3), égal à $q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}}$. Rappelons que d'après le Lemme 2.8 q_v est d'ordre n dans $\mathbb{F}_p^\times$. Le lemme suivant conclut la démonstration pour les valeurs de $\alpha \equiv 1$ $[n]$.

Lemme 2.11.— *$q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} = (-1)^{\frac{(n-1)(\alpha-1)}{n}}$ dans $\mathbb{F}_p$.*

Supposons en effet α pair. Puisque $q_v^n = 1$, $q_v^{\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)} = 1$. Puisque $n \mid \alpha - 1$, n est impair et $(-1)^{(n-1)\frac{\alpha-1}{n}} = 1$.

Supposons α impair. Si n est impair, $\frac{1-\alpha}{2}$ est multiple de n. Puisque $q_v^n = 1$, $q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} = 1$. Or $(-1)^{(n-1)\frac{\alpha-1}{n}} = 1$.
Supposons enfin n pair. Alors $q_v^{\frac{n}{2}} = -1$, donc $q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} = (-1)^{\alpha(\frac{1-\alpha}{n})} = (-1)^{\frac{1-\alpha}{n}}$. Or $(-1)^{(n-1)(\frac{\alpha-1}{n})} = (-1)^{\frac{1-\alpha}{n}}(-1)^{\alpha-1}$, et α est supposé impair.
Considérons enfin le second cas. Alors (2.15) donne la somme des termes

$$(-1)^{(n-1)(\frac{\alpha}{n})}\prod_{i\in I}\chi_i(\varpi)$$

où $|I| = s = \frac{\alpha}{n}$. Il reste à vérifier que

$$q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} = (-1)^{(n-1)(\frac{\alpha}{n})} \quad (\text{dans } \mathbb{F}_p)\,.$$

Mais ceci n'est rien d'autre que le lemme précédent, en échangeant les rôles de α et $1-\alpha$.
Le Théorème 2.8 implique enfin le Théorème 2.5.

3 Induction automorphe d'un caractère cohomologique de $GL(M)$

3.1

Nous considérons toujours l'extension radicielle E/F du chapitre 2, mais nous posons $N = pM$ et nous partons d'un caractère cohomologique

$$\eta_E : \mathcal{H}_H^S \longrightarrow \bar{\mathbb{F}}_p$$

où S est une ensemble fini de places de F et $H = GL(M, \mathbb{A}_E)$.
Notons donc U un sous–groupe ouvert compact de $H = \mathrm{Res}_{E/F}GL(M)$ $(\mathbb{A}_F^\infty) = GL(M, \mathbb{A}_E^\infty)$, que l'on suppose décomposé (par rapport aux places de F). On forme comme dans le § 2.2 le quotient

$$S(H,U) = A_H H(F)\backslash H(\mathbb{A})/U_\infty U\,, \tag{3.1}$$

U_∞ étant, comme dans le §2.2, compact connexe maximal. Si S est un ensemble fini de places disjoint des places de ramification, l'algèbre de Hecke non ramifiée

$$\mathcal{H}(H(\mathbb{A}^{\infty,S}), \bar{\mathbb{F}}_p) = \mathcal{H}_H^S$$

opère sur $H^\bullet(S(H,U), \bar{\mathbb{F}}_p)$.
On remarquera que si $U' \subset U$, l'application $H^i(S(H,U)) \to H^i(S(H,U'))$ n'est pas nécessairement injective ; néanmoins, si U' est invariant dans U, les caractères η_E de $\mathcal{H}_H^S$ apparaissant en niveau U apparaissant en niveau U' [20, Prop. 5.4]. On pourra donc, sans restreindre la généralité, supposer U assez petit.
Si $\beta = \xi^{1/p} \in E$, β définit une matrice diagonale de $M_M(E) \subset M_N(F)$, que l'on notera simplement β, et le centralisateur de β s'identifie à $M_M(E)$. L'automorphisme d'ordre p, $\sigma : X \mapsto \beta X\beta^{-1}$, de $GL(N,F)$ a donc pour points fixes $GL(M,E)$. Soit $G = GL(N)/F$. Pour un sous–groupe ouvert compact $K \subset G(\mathbb{A}_F^\infty)$, on considère de même l'action sur $H^\bullet(S(G,K), \bar{\mathbb{F}}_p)$, où $S(G,K) = A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_G^S$, S étant l'ensemble des places de ramification.

Soit v une place finie de F telle que les données sont non ramifiées pour toute place $w|v$ de E ; soit $r(\eta_w)$ la représentation de W_{E_w} associée à η_w ; nous supposons E/F non ramifié en v, et nous identifions $\bar{E}_w$ à $\bar{F}_v$. Soit $r_v(\eta)$ la représentation de W_{F_v} :

$$r_v(\eta) = \bigoplus_{w|v} \mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} r(\eta_w)\,. \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.— *Supposons que $\eta_E : \mathcal{H}_H^S \to \bar{\mathbb{F}}_p$ apparaît dans $H^\bullet(S(H,U), \bar{\mathbb{F}}_p)$, S étant supposé assez grand. Alors le caractère η_F de $\mathcal{H}_G^S$ défini en toute place $v \notin S$ par $r_v(\eta_F) = r_v(\eta)$ apparaît dans $H^\bullet(S(G,K), \bar{\mathbb{F}}_p)$ pour un niveau K convenable.*

On en déduit alors :

Théorème 3.2.— *Supposons η_E associé à une représentation galoisienne r_E : $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E) \to GL(M, \bar{\mathbb{F}}_p)$. Alors il existe η_F (apparaissant dans la cohomologie de $S(G,K)$ pour K convenable) associé à*

$$r_F = \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)} r_E\,.$$

3.2

La démonstration est évidemment la généralisation directe de celle du chapitre 2, et nous ne détaillerons que les arguments nouveaux. Noter qu'on peut, comme on l'a vu, supposer U assez petit. La démonstration du Lemme 2.6 s'étend de façon directe, au moins en ce qui concerne les places finies. Pour les places archimédiennes, on trouve comme dans la démonstration du Lemme 2.6 que $U_v \subset K_v$ sauf si $p = 2$, si v est réelle, et si les places w divisant v sont réelles. Dans ce cas, avec les notations de cette section, on peut avoir

$$U_v' = O(M,\mathbb{R}) \times O(M,\mathbb{R}) \subset O(2M,\mathbb{R})$$

de sorte que l'intersection de U_v' avec $K_v = SO(2M,\mathbb{R})$ est

$$U_v'' = S(O(M,\mathbb{R}) \times O(M,\mathbb{R})) = \{g_1, g_2 : \det g_1 = \det g_2\}$$

où $g_1, g_2 \in O(M,\mathbb{R})$.
Considérons les deux quotients (3.1) où U_∞ est respectivement le produit des groupes U_v'' (places réelles) et U_v (places complexes), ou des composantes connexes de ces groupes ; on note U_∞^+ ce dernier groupe. Alors :

Lemme 3.3.— *Si U est assez petit, et si S contient les places de ramification, les caractères de $\mathcal{H}_H^S$ apparaissant dans $H^\bullet(S(H,U_\infty U), \bar{\mathbb{F}}_2)$ et dans $H^\bullet(S(H,U_\infty^+ U), \bar{\mathbb{F}}_2)$ sont les mêmes.*

La cohomologie de $S(H,U_\infty U)$ étant la même que celle de $H(F)\backslash H(\mathbb{A})/U_\infty U$, nous pouvons négliger le quotient par A_H. Le groups U étant fixé, écrivons S_H et $\bar{S_H}$ pour les quotients respectifs par U_∞^+ et U_∞. On a donc un revêtement $S_H \to \bar{S_H}$ (de degré 2^{r_1}, où r_1 est le nombre de places réelles.) On peut écrire

$$S_H = \coprod \Gamma_i \backslash GL(M, E_\infty)/U_\infty^+$$

où les Γ_i sont des groupes de congruences. D'après le théorème de Chevalley sur les sous-groupes de congruences du groupe multiplicatif, appliqué à l'image du déterminant, on voit que $\Gamma_i \subset GL(n, E_\infty)^+$ si U est assez petit.
Pour simplifier les notations, supposons par exemple que $F = \mathbb{Q}$ et que E est quadratique réel. Alors chacune des composantes de la décomposition ci-dessus est de la forme

$$\Gamma_i \backslash GL(M, \mathbb{R}) \times GL(M, \mathbb{R}) / SO(M) \times SO(M)$$

$$= \coprod \Gamma_i \backslash (GL(M, \mathbb{R})^+ \varepsilon_1 \times (GL(M, \mathbb{R})^+ \varepsilon_2 / SO(M) \times SO(M)$$

où ϵ_i parcourt $O(M)/SO(M)$. On obtient, pour toute paire $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ modulo les éléments diagonaux, un terme correspondant pour $\bar{S_H}$., le quotient étant pris par $S(O(M) \times O(M))$. On voit donc que $S_H \cong \bar{S_H} \coprod \bar{S_H}$, soit $H^\bullet(S_H, R) = H^\bullet(S_H, R)^2$ pour tout R, compatiblement avec l'action des opérateurs de Hecke. D'où le résultat.

On obtient alors comme précédemment, pour K assez petit et $U = K^\Sigma$, une application injective

$$j : S(H, U) \longrightarrow S(G, K)^\Sigma \,,$$

de sorte que $S(H, U)$ est une réunion finie de composantes connexes de $S(G, K)^\Sigma$. On définit comme avant le Lemme 2.7 les bonnes places de F, en imposant bien sûr que $\prod_{w|v} GL(M, \mathcal{O}(E_w))$ soit contenu dans $GL(N, \mathcal{O}_v)$.
La démonstration du Lemme 2.7 s'étend de façon identique :

Lemme 3.4.— *Pour presque toutes les places, l'injection naturelle de G_v^Σ / K_v^Σ dans $H^0(\Sigma, G_v/K_v)$ est bijective.*

On peut supposer tout d'abord que l'intersection K_v de $H_v = H(F_v)$ avec $GL(N, \mathcal{O}_v)$ est le produit des $GL(M, \mathcal{O}_w)$, et que ces groupes sont les sous–groupes de niveau K_v, U_v.
Supposons d'abord v décomposée dans E, de sorte que $H_v = GL(M, F_v)^p$ est un sous–groupe de Levi. On a la décomposition d'Iwasawa

$$G_v = P_v K_v$$

où $P_v = H_v\, N_v$, N_v étant le radical unipotent ; l'élément β peut être pris diagonal dans H_v et central dans chaque facteur. Si $x = pk_v$ $(p \in P_v)$ et $p = hn$, l'équation $\sigma x = x$ s'écrit alors $\beta n \beta^{-1} K_v = n K_v$. Le même argument (en décomposant les matrices de N_v en blocs $M \times M$) montre que n est une matrice à coefficients entiers si $\beta_i/\beta_j - 1$ est une unité pour $i \neq j$.
Alors $x = h\ K_v \in H_v/K_v^\Sigma = H_v/U_v$. Dans le cas général, le même argument de descente donne le résultat.
On peut donc définir l'homomorphisme de Brauer

$$Br : \mathcal{H}_v(G) \longrightarrow \mathcal{H}_v(H)$$

en une bonne place v. L'analogue du Théorème 2.8, que nous ne réécrivons pas, implique alors que $\eta_E \circ Br$ apparaît dans $H^\bullet(S(G, K), \bar{\mathbb{F}}_p)$ (pour une bonne place où les données sont non ramifiées.)

3.3

La partie intéressante de la démonstration consiste de nouveau à vérifier que l'homomorphisme de Brauer (mod $p\,!$) est compatible à la dualité de Langlands. Pour $0 \leq \alpha \leq N$ et v une place de F où les données sont non ramifiées, notons simplement T_α^N l'opérateur défini en 2.1. Il faut d'abord calculer son image par l'homomorphisme de Brauer. Un calcul exactement analogue à la démonstration de Lemme 2.10 donne l'expression suivante.
Soit v une bonne place, et $X_v = \{w\}$ l'ensemble des places de E divisant v. On ne distinguera pas entre un opérateur de Hecke et la fonction caractéristique associée. Soit donc T_α^N l'opérateur de Hecke (sur $GL(N)$) en v, et $T_{w,\beta}^M$ un opérateur de Hecke sur $GL(M)$ en une place w.

Lemme 3.5.— *Pour $0 \leq \alpha \leq N$,*

$$Br(T_\alpha^N) = \sum_{\alpha = \Sigma f_w \alpha_w} \prod_w T_{w,\alpha_w}^M \tag{3.3}$$

où w parcourt l'ensemble X_v des places divisant v.

Si v est décomposée, de sorte que $H(F_v) \cong (GL(M, F_v))^p$ et $f_w = 1$, on remarquera que ceci n'est autre que l'homomorphisme de Sataké

$$S_G^L : \mathcal{H}_v(G) \longrightarrow \mathcal{H}_v(L)$$

où $L = GL(M)^p$ est le sous–groupe de Levi évident de $GL(N)$, mais où les facteurs de normalisation, puissances de q_v, ont disparu. (Cf. [1, § I.4] pour une description de l'homomorphisme de Sataké relatif dans le cas de $GL(n)$.)
Rappelons que le caractère η_E est défini, en toute place non ramifiée w, par

$$\eta_E(T_{w,\beta}^M) = q_w^{\frac{\beta(1-\beta)}{2}} \mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_w \mid \Lambda^\beta r_w) \tag{3.4}$$

où

$$r_w = \bigoplus_{i=1}^M \chi_{i,w} \tag{3.5}$$

est la représentation de W_{E_w} associée à $\eta_{E,w}$, cf. Définition 2.3.
Considérons la représentation locale (3.2) :

$$r_v = r_v(\eta) = \bigoplus_{w|v} \mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} r_w$$

et l'homomorphisme η_F associé, par la normalisation canonique, à r_v :

$$\eta_F(T_\alpha^N) = q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} \mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_v \mid \Lambda^\alpha r_v)\,. \tag{3.6}$$

On a

$$\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_v \mid \Lambda^\alpha r_v) = \sum_{\substack{(\alpha_{i,w}) \\ \alpha = \Sigma\alpha_{i,w}}} \prod_{i,w} \mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_w \mid \Lambda^{\alpha_{i,w}} \mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} \chi_{i,w})$$

ce qui implique tout d'abord

$$\alpha_{i,w} \leq f_w \tag{3.7}$$

puis — cf. 2.16 —

$$\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_v \mid \Lambda^{\alpha_{i,w}} \mathrm{ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} \chi_{i,w}) = \begin{cases} 1 \ (\alpha_{i,w} = 0) \\ (-1)^{f_w - 1} \chi_{i,w}(\varpi) \ (\alpha_{i,w} = f_w) \end{cases} \tag{3.8}$$

les valeurs de la trace pour $\alpha \neq 0, f_w$ étant nulles. Ainsi :

LEMME 3.6.—

$$\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_v \mid \Lambda^\alpha r_v) = \sum \prod_{\substack{i,w \\ \alpha_{i,w} = f_w}} (-1)^{f_w - 1} \chi_{i,w}(\varpi)$$

où la somme porte sur les données $(\alpha_{i,w})$ *tels que* $\alpha_{i,w} = 0, f_w$*, avec* $\alpha = \sum_{i,w} \alpha_{i,w}$.

$$\begin{array}{lll} \text{Posons} & \alpha_{i,w} & = f_w \ \varepsilon_{i,w} \quad (\varepsilon_{i,w} = 0, 1) \\ \text{On a donc} & \alpha & = \sum \alpha_w f_w \\ & \alpha_w & = \sum_{i \in I_w} 1 = |I_w| \end{array}$$

où $I = \{1, \dots, M\}$ et I_w est défini par $\varepsilon_{i,w} = 1$. L'expression pour la trace devient

$$\sum_{\alpha = \Sigma \alpha_w f_w} \prod_w \sum_{|I_w| = \alpha_w} \prod_{i \in I_w} (-1)^{f_w - 1} \chi_{i,w}(\varpi) \, . \tag{3.9}$$

Nous devons maintenant évaluer η_E sur $Br(T_\alpha^N)$, donné par l'expression (3.3). La représentation de $GL(M, \mathbb{A}_E)$ est simplement donnée, localement, par la somme des χ_i.

On a donc pour $\beta \leq M$

$$\begin{aligned} \eta_E(T_{w,\beta}^M) &= q_w^{\frac{\beta(1-\beta)}{2}} \mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_w \mid \Lambda^\beta (\bigoplus_{i=1}^M \chi_{i,w})) \\ &= q_w^{\frac{\beta(1-\beta)}{2}} \textstyle\sum_{|I| = \beta} \prod_{i \in I} \chi_{i,w}(\varpi) \, . \end{aligned}$$

En fixant la décomposition $\alpha = \Sigma \alpha_w f_w$, on est donc amené à comparer, les caractères apparaissant dans chaque expression étant identiques :

$$q_v^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}} \prod_w (-1)^{(f_w - 1)\alpha_w} \tag{3.10}$$

$$\prod_w q_w^{\frac{\alpha_w(1-\alpha_w)}{2}} \, . \tag{3.11}$$

Notons tout d'abord les cas évidents.

LEMME 3.7.— *Les expressions* (3.10) *et* (3.11) *sont égales dans* $\mathbb{F}_p$ *si* $\alpha = 1$*, si* v *est décomposée, ou si* v *est inerte.*

Si $\alpha = 1$, on doit avoir $\alpha_w f_w = 1$ pour une place f_w exactement, les autres α_w étant nuls. Les deux termes sont donc égaux à 1. Si v est décomposée, $q_v \equiv 1$ $[p]$ et $f_w = 1$. Si v est inerte, $q_v = q_w = 1$ et $f_w = p$.

Considérons maintenant les cas où la décomposition de v donne

$$f_{w_0} = 1\,, \quad f_{w_i} = n \ (i = 1, \dots t = \frac{p-1}{n})$$

avec $n \mid p-1$. D'après le Lemme 2.11 (et son homologue pour $\alpha \equiv 0\ [n]$) on sait que l'égalité est vérifiée si α_w est égal à 0 ou 1 pour tout w.
Fixons une place w et remplaçons α_w par $\alpha_w + 1$, donc α par $\alpha' = \alpha + f_w$. Soit $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}$, $A_w = \frac{\alpha_w(1-\alpha_w)}{2}$. On a, avec la notation correspondante pour α' :

$$\begin{aligned} A'_w &= A_w - \alpha_w, \\ A' &= A - f_w\alpha + \tfrac{1}{2}(f_w - f_w^2)\,. \end{aligned}$$

Puisque $q_w = q_v^{f_w}$, le quotient des puissances de q_v dans (3.10) et (3.11) est donc multiplié par $q^{f_w(\alpha_w-\alpha)+\frac{1}{2}(f_w-f_w^2)}$ où $q = q_v$; en supposant l'égalité vérifiée pour α, il faut d'abord vérifier :

$$q^{\frac{1}{2}(f_w-f_w^2)} = (-1)^{(f_w-1)}\,.$$

C'est évident si $f_w = 1$; supposons donc que $f = f_w = n$, q étant d'ordre exact n. Si n est pair, $q^{\frac{n}{2}(1-n)} = (-1)^{1-n}$ puisque $q^{\frac{n}{2}} = -1$. Si n est impair, $q^{(\frac{1-n}{2})n} = 1$ car $q^n = 1$.
Par ailleurs $\alpha = \sum_u \alpha_u f_u$, donc

$$(\alpha - \alpha_w)f_w = \sum_{u \neq w} \alpha_u f_u f_w + \alpha_w(f_w^2 - f_w).$$

Puisque $f_w = 1$ ou n, la valeur 1 n'étant prise que pour w_0, et $q^n = 1$, on voit que $q^{(\alpha-\alpha_w)f_w} = 1$.
Par récurrence, on voit que les expressions (3.10) et (3.11) coïncident pour tout α. En toute bonne place, $r_v(\eta)$ est donc associée, par l'homomorphisme de Brauer, à la donnée des r_w. Ceci termine la démonstration du Théorème 3.1.

4 Relation avec les résultats connus

4.1

Rappelons tout d'abord les faits suivants :

(4.1) Si l'extension E/F est résoluble, et si π_E est une représentation cuspidale de $GL(M, \mathbb{A}_E)$, l'induite automorphe $\mathrm{Ind}_E^F \pi_E = \pi_F$ existe : c'est une représentation automorphe, unitairement induite de cuspidale, de $GL(dM, \mathbb{A}_F)$ où $d = [E : F]$. Voir [1, Ch. 3].

(4.2) Si F est un corps CM, ce qui inclut ici, sans précision supplémentaire, les corps totalement réels, et si un caractère η_F de l'algèbre de Hecke apparaît dans $H^\bullet(S(G,K), \bar{\mathbb{F}}_p)$ où $G = GL(N)/F$, la représentation (semi–simple) $r(\eta_F)$ de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ existe (Scholze [19]).

4.2

Considérons d'abord le cas où E/F est galoisien, c'est–à–dire cyclique de degré p. Dans ce chapitre, on supposera aussi, sauf indication contraire, $p \neq 2$. Les corps E, F sont arbitraires. Le corps F contient $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Soit η_E un caractère cohomologique de l'algèbre de Hecke (hors ramification, ce qu'on s'abstiendra aussi de préciser dans cette discussion) de $GL(M, \mathbb{A}_E)$, à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. Supposons en fait que η_E provienne d'une classe de cohomologie en caractéristique nulle, de sorte qu'un relèvement $\tilde{\eta}_E$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Z}}_p$, que l'on peut voir comme un caractère complexe d'après des identifications bien connues, provient d'une représentation automorphe π_E de $GL(m, \mathbb{A}_E)$. Noter que dans cet article, comme dans [20], la cohomologie est toujours considérée pour le système local trivial. En particulier π_E est cohomologique pour le système local trivial. Pour une descriptions détaillée, pour $GL(n)$, des représentations cohomologiques associées à des systèmes locaux arbitraires, nous renvoyons à [5, Ch. 3].

Noter que si E est CM, de sorte qu'il existe une représentation modulaire r_E (semi–simple) associée à η_E, on s'attend à ce que l'association $\eta_E \leftrightarrow r_E$ soit compatible, aux places w de E ne divisant pas p, avec la correspondance locale mod p de Vignéras [21] ; ceci est vraisemblablement accessible. Sous des hypothèses convenables sur r_E, π_E est alors cuspidale.

Dans tous les cas, supposons π_E cuspidale, de sorte que $\pi_F = \mathrm{Ind}_E^F \pi_E$ existe d'après [1].

Soit v une place archimédienne de F ; p étant impair, elle se décompose en p places $\{w_1, \dots w_p\}$ de E. Alors la représentation de W_{F_v} associée par Langlands à $\pi_{F,v}$ est

$$\bigoplus_1^p r_{w_i}(\pi_E)\,. \tag{4.3}$$

Considérons la représentation de $\mathbb{C}^\times \subset W_{E_w}$ associée, en une place w, à π_E. Alors celle-ci est égale à

$$\bigoplus_1^M \chi_i \tag{4.4}$$

où les caractères χ_i de $\mathbb{C}^\times$ sont donnés par

$(\chi_1, ..., \chi_M) = ((z/\bar{z})^{(M-1)/2}, (z/\bar{z})^{(M-3)/2}, ..., (z/\bar{z})^{(1-M)/2}\ ).$

Cf. [5, § 3.5]. D'après (4.3), la représentation de W_{F_v} est alors somme de p facteurs du même type, et n'est donc pas régulière au sens de [5] et donc pas cohomologique. Ceci s'applique évidemment aussi dans le cas où $M = 1$, comme on l'a remarqué à la fin du § 2.2.

On remarquera que des résultats de changement de poids pour les représentations cohomologiques, préservant les représentations *modulo p* associées, existent. Voir par exemple [3, § 4.4]. On peut vraisemblablement changer le poids (i.e., le système de coefficients) associé à π_E, en préservant la représentation modulaire, de sorte que l'induite soit régulière. Nous ne poursuivrons pas cette question.

Si E et F sont CM, de sorte que π_E est associée, d'après Scholze ou Harris, Lan, Taylor et Thorne, à une représentation semi–simple

$$\tilde{r}_E : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E) \longrightarrow GL(M, \bar{\mathbb{Z}}_p)\,,$$

on voit qu'on a construit une représentation modulaire r_F qui est la réduction mod p de la représentation galoisienne $\tilde{r}_F$ qui DEVRAIT être associée à π_F.

Noter à ce propos que si F est totalement réel, une extension radicielle (nécessairement non galoisienne) $E = F(\sqrt[p]{\xi})$ n'est jamais CM, comme il résulte de la décomposition de E en une place réelle. En revanche, il existe des extensions radicielles non cycliques avec $E, F\ CM$. Supposons par exemple F quadratique imaginaire : on note simplement $x \mapsto \bar{x}$ la conjugaison complexe. Soit $\xi \in F^\times$ un élément de norme 1 ($\xi\bar{\xi} = 1$) tel que $\xi \notin F^p$. (De tels éléments existent.) Si $E = F(\beta), \beta = \xi^{1/p}$, $(\beta\bar{\beta})^p = 1$ où $\bar{\beta}$ désigne le conjugué complexe de β pour un plongement complexe arbitraire de E. Puisque $\beta\bar{\beta}$ est positif, $\beta\bar{\beta} = 1$; la conjugaison complexe sur E est donc donnée, pour tout plongement, par l'automorphisme, antilinéaire pour la conjugaison complexe sur F, tel que $\beta \mapsto \beta^{-1}$.

4.3

Considérons maintenant le cas non galoisien. Supposons $F\ CM$ (au sens large). Alors la représentation modulaire r_F associée à la semi–simplifiée de $\mathrm{ind}_E^F r_F$ existe, r_E étant pour l'instant une famille $(r_{E,w})$ de représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{E}_w/E_w)$ aux places non ramifiées, $r_{E,w}$ étant associée à $\eta_{E,w}$.
Supposons pour simplifier l'argument que la représentation galoisienne r_E de $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ existe. On suppose aussi F linéairement disjoint de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.
D'après le théorème de Mackey, on a, en écrivant $\mathfrak{g}_E = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$, $\mathfrak{g}_F = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$:

$$(\mathrm{ind}_E^F r_E)|_{\mathfrak{g}_E} = \bigoplus_\delta \mathrm{ind}_{\mathfrak{g}_E \cap {}^\delta \mathfrak{g}_E}^{\mathfrak{g}_E} r_E^\delta$$

où $r_E^\delta(\delta\,\sigma\,\delta^{-1}) = r_E(\sigma)$ si $\sigma \in \mathfrak{g}_E$.
On a $\mathrm{Gal}(E^{gal}/F) = \mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$ où on a choisi une identification de $\mathrm{Gal}(E^{gal}/F(\zeta_p))$ à $\mathbb{F}_p$; si $K = \mathrm{Gal}(E^{gal}/E) = \mathbb{F}_p^\times$, δ parcourt l'ensemble des doubles classes $K\backslash G/K$ (notations du § 2.4). Identifiant comme là G au groupe $\begin{pmatrix} x & z \\ & 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{F}_p^\times$, $z \in \mathbb{F}_p$, on a $K\backslash G \equiv \mathbb{F}_p$ (via $X = \frac{z}{x}$) et l'action de K devient $X \mapsto Xy^{-1}$. L'espace des doubles classes a donc deux éléments ; pour la double classe non triviale, $K \cap {}^\delta K = \{1\}$. Ainsi

$$(\mathrm{ind}_E^F r_E)|_{\mathfrak{g}_E} = r_E \oplus \mathrm{ind}_{E^{gal}}^E\ r_E|_{\mathfrak{g}_{E^{gal}}}\ .$$

Mais $E^{gal} = E(\zeta_p)$, et il en résulte par réciprocité de Frobenius que

$$(\mathrm{ind}_E^F r_E)|_{\mathfrak{g}_E} = r_E \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-2} r_E \otimes \omega^i$$

où $\omega : \mathfrak{g}_E \to \mathbb{F}_p^\times$ est le caractère cyclotomique.
Cette relation reste vraie, sans supposer a priori l'existence de r_E, pour les représentations locales aux places non ramifiées. On a donc le résultat non trivial suivant :

THÉORÈME 4.1.— *Supposons $E = F(\xi^{1/p})$ extension radicielle d'un corps CM F, linéairement disjoint de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$; soit η_E un caractère cohomologique de l'algèbre de Hecke de $GL(M, \mathbb{A}_E)$ (en–dehors des places de ramification) et soit (r_w) la famille de représentations locales, à valeurs dans $GL(M; \bar{\mathbb{F}}_p)$, associée à η_E. Il existe alors une représentation galoisienne modulaire de degré pM de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$, R, telle qu'en presque toute place w de E, la semi–simplifiée de R_w soit égale à*

$$r_w \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-2} r_w \otimes \omega^i$$

où r_w est associée à $\eta_{E,w}$.

4.4

Considérons enfin le cas suivant, qui nous a été expliqué par Richard Taylor. Supposons E, F CM et supposons que η_E se relève en caractéristique nulle et provient d'une représentation cuspidale π_E qui est cohomologique (pour le système trivial de coefficients.) Il existe une représentation galoisienne p-adique de degré M, r_E, de $\mathfrak{g}_E$ associée à π_E [15], [19]. L'extension E^{gal}/F est résoluble, et E^{gal}/E abélienne. On suppose toujours pour simplifier F linéairement disjoint de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$; $E^{gal} = E(\zeta_p)$. La représentation $\pi_{E^{gal}}$ obtenue par RESTRICTION automorphe à $GL(M, \mathbb{A}_{E^{gal}})$ existe d'après [1] ; elle est cohomologique ; la représentation galoisienne associée $r_{E^{gal}}$ existe aussi et c'est la restriction à $\mathfrak{g}_{E^{gal}}$ de r_E . Par changement de base cyclique, la représentation automorphe

$$\pi_{F(\zeta_p)} = \mathrm{Ind}_{E^{gal}}^{F(\zeta_p)}\ (\pi_{E^{gal}}) \tag{4.5}$$

existe. Elle est invariante par $\mathrm{Gal}(F(\zeta_p)/F)$ d'après [1, Proposition 4.4]. D'après les arguments précédents, elle n'est plus cohomologique (si π_E est cohomologique pour le système de coefficients triviaux) mais évidemment associée à une représentation galoisienne, égale à

$$r_{F(\zeta_p)} = \mathrm{ind}_{E^{gal}}^{F(\zeta_p)}\ (r_{E^{gal}}). \tag{4.6}$$

Oublions pour un instant les notations précédentes. Soit G un groupe fini, H et K deux sous-goupes avec $G = HK$. Soit r une représentation de H. Alors

$$(\mathrm{ind}_H^G r)\mid_K \cong \mathrm{ind}_{H\cap K}^K (r\mid_{H\cap K}) \tag{4.7}$$

La même identité reste vraie pour des représentations de groupes profinis, si les sous-groupes de G sont d'indices finis. Nous appliquons ceci aux groupes $G = \mathfrak{g}_F$, $K = \mathfrak{g}_{F(\zeta_p)}$, $H = \mathfrak{g}_E$. Alors

$$r_{F(\zeta_p)} = (\mathrm{ind}_E^F\ (r_E))\mid_{\mathfrak{g}_{F(\zeta_p)}}. \tag{4.8}$$

Autrement dit, la représentation $\pi_{F(\zeta_p)}$ dont on a montré l'existence est celle associée par restriction automorphe à la représentation cherchée $\mathrm{Ind}_E^F(\pi_E)$ de $GL(pM, \mathbb{A}_F)$ qui correspondrait, en caractéristique nulle, au caractère de l'algèbre de Hecke obtenu en caractéristique p à l'aide du Théorème 3.1.
Par descente cyclique [1] on obtient une représentation π_F, ou plutôt une famille de représentations $\{\pi_F\,\omega^i\}$ où ω est le caractère cyclotomique, maintenant en caractéristique nulle. Si la représentation galoisienne associée à π_F est irréductible, on peut alors utiliser l'argument d'Harris [14], [16] pour montrer que l'une de ces représentations est en effet associée à $\mathrm{ind}_E^F \pi_E$. (Voir en particulier [16, p.242-243].)
Noter cependant que cette représentation n'est plus régulière, et n'apparaît donc pas dans la cohomologie des variétés associées à $GL(N, F)$. (L'argument est exactement similaire à celui du §4.2.) Il est possible cependant que l'on puisse (en conservant les représentations mod p) changer le poids de la représentation π_E, de telle façon que π_F apparaisse dans la cohomologie des variétés associées à $GL(N, F)$, avec système de coefficients triviaux. Pour de tels résultats

de changement de poids voir [3, § 4.4]. On voit cependant que cet argument ne s'applique qu'aux classes de cohomologie se relevant en caractéristique nulle, provenant de représentations cuspidales, et nécessite des conditions (irréductibilité des représentations galoisiennes) inconnues en général.

4.5

Pour être complet, nous considérons maintenant la restriction automorphe, ainsi que la fonctorialité donnée (dans le cas classique) par les séries d'Eisenstein. Les résultats sont ici en grande partie dus à Treumann–Venkatesh qui ne traitent cependant, le cas « d'Eisenstein » que si $p = 2$: voir une discussion plus détaillée à la fin de ce paragraphe.
La restriction automorphe, dans le cas de caractéristique nulle, est démontrée dans [1]. Soit E/F une extension cyclique. On se donne une représentation cuspidale π_F de $GL(n, \mathbb{A}_F)$. Il existe alors une (unique) représentation π_E de $GL(n, \mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale, telle que les matrices de Hecke aux places non ramifiées (pour la normalisation de Langlands, cf. [1]) vérifient pour $w|v$:

$$t_w(\pi_E) = \quad t_v(\pi_F)^p \qquad (v \text{ inerte}) \tag{4.9}$$

$$t_w(\pi_E) = \quad t_v(\pi_F) \qquad (v \text{ décomposée}). \tag{4.10}$$

Si π_F est cohomologique, π_E l'est aussi.
Considérons maintenant des classes de cohomologie mod p, pour les quotients de $GL(n, \mathbb{A}_F)$ et $GL(n, \mathbb{A}_E)$. Nous utilisons la normalisation arithmétique du § 2.1. Notons T^E_α, T^F_α les opérateurs de Hecke, et aussi les fonctions caractéristiques associées, en des places non ramifiées pour les données. Si v est inerte, T^E_α est invariant par $\Sigma = \mathrm{Gal}(E/F)$ et

$$Br(T^E_\alpha) = T^F_\alpha \,.$$

La valeur propre de T^E_α, déduite de celle de T^F_α, est donc

$$q_v^{\alpha(1-\alpha)} S_\alpha(t_v)\,. \tag{4.11}$$

Le changement de base de Langlands (4.5) nous conduit à attendre la valeur propre

$$q_v^{p\alpha(1-\alpha)} S_\alpha(t_v^p)\,. \tag{4.12}$$

Si v est décomposée, et $w|v$, $T^E_{w,\alpha}$ n'est pas invariant. Le produit $\prod\limits_{w|v} T^E_{w,\alpha}$ est invariant et d'image $T^F_{v,\alpha}$. Par conséquent $a_\alpha = q_v^{\alpha(1-\alpha)} S_\alpha(t_v)$ est valeur propre pour le produit. Avec une formulation et des notations différentes, ceci est essentiellement (pour une forme de $GL(2)$ compacte à l'infini) démontré dans [6] pour une place inerte (voir la formule (3.6) de cet article), dans [7] pour une place décomposée (formule (3.8).)
Dans ce cas, l'argument de [7, p. 12] montre alors que la racine p–ième de a_α est valeur propre de chacun des $T^E_{w,\alpha}$. Je ne sais pas si cet argument s'applique aux classes de cohomologie [3].
Mais considérons l'homomorphisme *br* de [20, § 4.3]. On a $br(T^E_\alpha) = T^F_\alpha$ dans le cas inerte, et $br(T^E_{w,\alpha}) = (T^F_{v,\alpha})^{1/p}$ — l'inverse de l'endomorphisme de Frobenius

3. Il faudrait vérifier qu'il est compatible avec la démonstration du Théorème 4.4 de [20], i.e., avec la suite spectrale issue de la théorie de Smith.

Frob_p est bien défini sur $\mathcal{H}_v(G)$, cf. [20, 3.4]. (Pour cette dernière expression voir [20, 3.4, 4.3], et particulièment la formule (4.3.1) loc.cit.) On voit alors que la composition avec br donne pour valeurs propres en une place $w|v$

$$q_v^{\alpha(1-\alpha)} S_\alpha(t_v) \qquad v \text{ inerte} \tag{4.13}$$

$$(q_v^{\alpha(1-\alpha)} S_\alpha(t_v))^{1/p} \qquad v \text{ décomposée}. \tag{4.14}$$

On voit que ce sont bien les valeurs propres données par la correspondance de Langlands (4.5), (4.6) mais transformées par l'inverse de Frob_p. Puisque Frob_p agit sur les coefficients, on a donc :

THÉORÈME 4.2 (Treumann, Venkatesh).— *Pour tout caractère η_F : $\mathcal{H}^S(G(\mathbb{A}_F)) \to \bar{\mathbb{F}}_p$, associé à des matrices $t_v^F \in (\bar{\mathbb{F}_p}^\times)^n$ $(v \nmid S)$ et cohomologique, il existe un caractère cohomologique η_E associé à*

$$t_w^E = \begin{cases} (t_v^F)^p & (v \text{ inerte}) \\ t_v^F & (v \text{ décomposée}) \end{cases}$$

Evidemment, ce résultat s'applique de nouveau à des classes de torsion qui ne se relèvent pas en caractéristique zéro.

Le cas suivant n'a pas été remarqué explicitement par Treumann et Venkatesh, bien qu'il résulte directement de leurs méthodes. On considère $GL(n, F)$, et on SUPPOSE :

$$F \text{ CONTIENT UNE RACINE PRIMITIVE } p\text{–IÈME DE L'UNITÉ, } p \geq n. \tag{4.15}$$

Soit $\lambda = (n_1, \ldots, n_t)$ une partition de n. Il existe alors un élément diagonal d'ordre p, m de $GL(n, F)$ dont le centralisateur est le sous–groupe de Levi $GL(n_1) \times \cdots \times GL(n_t)$. Si η_i est un caractère de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^S(GL(n_i))$, l'induction définit un caractère η de $\mathcal{H}^S(GL(n, F))$. Noter que $q_v \equiv 1$ $[p]$ pour toute place $v \nmid p$, de sorte que les différentes normalisations arithmétiques de l'induction coïncident. On a alors, d'après le Théorème 4.4 de [20] et les arguments des chapitres 2–3 :

THÉORÈME 4.3.— *Si les caractères η_i (à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$) sont cohomologiques, pour des quotients de $GL(n_i, \mathbb{A}_F)$, le caractère η est cohomologique.*

Il est clair que la condition $p \geq n$ est nécessaire pour trouver un élément diagonal d'ordre p dont le centralisateur est le produit des sous-groupes de Levi. Si n est supérieur à p, le résultat reste vrai si $t \leq p$. Noter que dans ce cas, la somme automorphe (au sens usuel) de représentations cohomologiques (pour le système de coefficients trivial) n'est plus cohomologique, toujours à cause des arguments archimédiens du § 4.2.

Le lecteur comparera ce résultat avec la discussion du § 1.2.3 de [20] donnant cette construction pour les classes de cohomologie mod 2. Ici l'existence d'une racine de l'unité d'ordre p permet cette construction directe des 'classes d'Eisenstein' dont Treumann et Venkatesh affirment qu'elle n'existe pas en général. Noter que, notre corps étant totalement complexe, la condition de parité mentionnée par eux [20, 1.2.3] ne s'applique pas ici. Il serait intéressant de comprendre ce phénomène plus généralement.

5 Le cas unitaire

5.1

Dans ce chapitre, indépendant du reste de l'article, nous appliquons la méthode de [20] aux groupes unitaires compacts à l'infini qui sont utilisés dans les extensions à $GL(n)$ de la méthode de Taylor–Wiles [8]. Ces groupes étant compacts aux places archimédiennes, il s'agit essentiellement de l'argument original de l'auteur [5, 6].
Soit E une extension quadratique CM, complexe, d'un corps totalement réel F. On suppose que E contient une racine primitive p–ième ζ de l'unité.
Soit G un groupe unitaire de rang n sur F, associé à une forme hermitienne (relative à E/F) sur E^n. Explicitement, G est défini par la forme hermitienne diagonale de matrice

$$D = \mathrm{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_n)\,, \qquad \nu_i \in F^\times\,.$$

On suppose que $G(F_v)$ est compact pour toute place archimédienne de F. On note $\mathbb{A}$ les adèles de F.
Pour toute partition ordonnée $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$ de n, la décomposition correspondante de E^n définit un sous–groupe de G, noté G^λ, produit de groupes unitaires $U(n_i)$.
Supposons $p \geq n$. Soit $M = \mu_p(E)^n$ le sous–groupe diagonal de $G(F)$ dont tous les coefficients sont des puissances de ζ. Pour tout λ, il existe $\beta \in M$ tel que G_λ est le F–groupe centralisant β. (Noter que l'hypothèse $p \geq n$ est ici essentielle.)
Soit $K = \prod_v K_v$ un sous–groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que K_v soit, pour tout v, invariant par l'action adjointe de M. On notera que cette condition est peu restrictive. Pour toute place finie v, $G(F_v) \cap GL(n, \mathcal{O}(F_v \otimes E))$ est un sous–groupe compact ouvert de $G(F_v)$, maximal et hyperspécial en presque toute place. Le groupe M est contenu dans $GL(n, \mathcal{O}(F_v \otimes E))$ donc laisse invariant ce sous–groupe compact.
On peut être plus précis en une place décomposée.
Soit w, w' les deux places de E divisant alors la place v. On a canoniquement

$$\mathrm{Res}_{E/F} G(F_v) = GL(n, E_w) \times GL(n, E_{w'})$$

et le sous–groupe $G(F_v)$ s'identifie alors a

$$\{g_1, g_2 : g_2 = D\ {}^t g_1^{-1} D^{-1}\}\,,$$

que l'on identifie à $GL(n, E_w) = GL(n, F_v)$ par la première composante. Alors M opère simplement sur g_1 par conjugaison. Le choix usuel du sous–groupe de Borel (triangulaire supérieur) de $GL(n, F_v)$, et la structure entière naturelle, définissent un sous–groupe compact maximal K_v et un sous–groupe d'Iwahori B_v. Alors K_v et B_v sont tous deux invariants par M. (Il en serait de même en presque toute place inerte.)
Fixons un tel sous–groupe K, et soit $S(G, K)$ le quotient fini

$$S(G, K) = G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K\,.$$

Pour un anneau commutatif R, soit $\mathcal{S}_K(R)$ l'espace des fonctions sur $S(G, K)$ à valeurs dans R. Soit V l'ensemble fini de places finies où G est ramifié, ou divisant p, ou bien où K_v n'est pas hyperspécial. Alors $\mathcal{S}_K(R)$ reçoit une action de l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}^V(G) = \bigotimes_{v \notin V} \mathcal{H}(G_v, K_v)\,. \tag{5.1}$$

Les mêmes constructions s'appliquent aux groupes G^λ ; on suppose que V convient à tous ces groupes (munis des sous–groupes $K^\lambda = K^m$ où G^λ est le centralisateur de $m \in M$). On obtient des quotients $S_\lambda = S(G^\lambda, K^\lambda)$. Si K est net, on a des plongements naturels

$$j_\lambda : S_\lambda \longrightarrow S$$

(cf. §2 ; [20, 5.7]).

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et k son corps résiduel. On obtient des espaces de formes automorphes $\mathcal{S}_K(R)$ pour $R = L$, $\mathcal{O}$ ou k, avec les relations usuelles (cf. [8, 3.3] pour un cadre beaucoup plus général.) Nous passerons à la limite et considérerons des formes sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\bar{\mathbb{Z}}_p$ et $\bar{\mathbb{F}}_p$.

5.2

Notre premier résultat montre que la fonctorialité « endoscopique » est réalisée simplement, mod p, par les méthodes de [20] et de cet article. Nous nous limiterons aux places décomposées, ce qui suffit en général pour les arguments galoisiens, cf. [8]. Mais il est évident que l'on pourrait étendre l'argument aux places inertes (où les données sont non ramifiées).

Notons donc $\mathcal{H}_+^V(G)$ le produit tensoriel (5.1) restreint aux places décomposées, et de même $\mathcal{H}_+^V(G^\lambda)$.

Fixons λ ; soit $m \in M$ un élément associé à cette partition et $\Sigma \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le sous–groupe de M engendré par m. (On suppose la partition non triviale). Comme on l'a vu, M est contenu dans le compact maximal K_v en toute place décomposée (hors de V), donc Σ opère trivialement sur $\mathcal{H}(G_v, K_v)$. L'homomorphisme de Brauer

$$Br : \mathcal{H}(G_v, K_v) \longrightarrow \mathcal{H}(G_v^\lambda, K_v^\lambda)$$

est défini naturellement, exactement comme dans le § 3.3 : G^λ peut être vu comme un sous–groupe de Levi de G, et Br est simplement l'homomorphisme de Sataké, cf. Lemme 3.5. Comme dans cet énoncé, les puissances de q_v ont disparu. Mais on a évidemment, puisque $E \supset \mathbb{Q}(\zeta_p)$:

$$\textbf{Pour tout } v \nmid p\,,\ q_v \equiv 1\ [p]\,. \tag{5.2}$$

Dans notre situation, toutes les places décomposées $v \notin V$ sont bonnes, i.e., vérifient les conditions analogues à celles qui sont énoncées avant le Lemme 2.7. Il suffit de vérifier :

Lemme 5.1.— *L'injection naturelle $G_v^\lambda/K_v^\lambda \hookrightarrow (G_v/K_v)^\Sigma$ est bijective si $v \nmid p$.*

Mais ceci, v étant décomposée, est un calcul dans $GL(n, F_v)$ qui se réduit (cf. Lemme 3.4) au fait que, pour toute racine primitive ζ d'ordre p, $\zeta - 1$ est une unité dans $\mathcal{O}_v$. En particulier Br est bien un homomorphisme.

Soit Res : $\mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p) \to \mathcal{S}_{K^\lambda}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ la restriction. On note φ une fonction de l'algèbre de Hecke à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. Soit $R(\varphi)$ l'action à droite de φ sur $\mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p)$; même notation pour G^λ, $\mathcal{S}_{K^\lambda}$. On a alors

Lemme 5.2.— *Si $v \notin V$ est décomposée et $f \in \mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est invariante par Σ,*

$$\mathrm{Res}(R(\varphi)f) = (Br\varphi)\mathrm{Res}f\,.$$

C'est le lemme fondamental de [6], [7] et de [20]. Donnons, une fois de plus, l'argument. Soit $K = K_v$ et $\varphi = ch(K\ gK)$ la fonction caractéristique d'une double classe. La fonction Φ associée (§ 2.5) est $\Phi(K, gK) = \varphi(KgK)$. Ecrivons $KgK = \amalg g_i K$. Soit $y \in G(F)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K^v$, où $K^v = \prod_{w \neq v} K_w$, relevant $x \in S_K$. Alors

$$\begin{aligned} R(\varphi)f(x) &= \sum_{g_i} f(yg_i)\,, \text{ soit} \\ R(\varphi)f(x) &= \sum_{g' \in G/K} f(yg')\Phi(K, g'K)\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

L'image $Br(\varphi)$ est donnée par la restriction de Φ à $G^\lambda/K^\lambda \times G^\lambda/K^\lambda$.
Soit $x \in S_{K^\lambda}$. Alors x a un relèvement $y \in G^\lambda(F)\backslash G^\lambda(\mathbb{A}_f)/(K^\lambda)^v$, donc invariant par Σ. Alors

$$Br(\varphi)f(x) = \sum_{h' \in G^\lambda/K^\lambda} f(yh')\Phi(K^\lambda, h'K^\lambda)\,. \tag{5.4}$$

Puisque y et f sont invariants par Σ, la somme (5.3) se restreint aux g' invariants, la somme sur une orbite non triviale étant nulle. D'après le Lemme 5.1, elle coïncide avec (5.4). Ceci démontre le Lemme 5.2.

La restriction $\mathcal{S}_K^\Sigma \to \mathcal{S}_{K^\lambda}$ est évidemment surjective, puisqu'on peut étendre par 0 une fonction sur $\mathcal{S}_{K^\lambda}$ (donc invariante). Rappelons [13] que toute famille de valeurs propres $\eta : \mathcal{H}^V(G^\lambda) \to \bar{\mathbb{Z}}_p$ apparaissant dans $\mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ est associée (par la correspondance arithmétique du § 2) à une représentation semi–simple

$$r = \bigoplus_{i=1}^{t} r_i$$

où $r_i : \mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \to GL(n_i, \bar{\mathbb{Z}}_p)$ provient du groupe unitaire $U(n_i)$. En particulier il existe une représentation modulaire $\bar{r} = \oplus \bar{r}_i$ associée. On déduit alors immédiatement du Lemme 5.2 :

Théorème 5.3.— *Pour tout famille $\bar{r}_i$ de représentations* $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \to GL(n_i, \bar{\mathbb{F}}_p)$*, provenant de formes sur les groupes facteurs de $G^\lambda(\mathbb{A})$ (de composante triviale à l'infini), il existe une forme automorphe $f \in \mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p)$, pour K convenable, et un ensemble fini de places V, tels que f soit forme propre de $\mathcal{H}^V(G)$, associée à un caractère η, et que η soit associé à $\bigoplus \bar{r}_i$.*

(On utilise le fait que les éléments de Frobenius, dans $Gal(\bar{E}/E)$, associés aux places divisant des places décomposées de F, sont denses dans ce groupe.) Noter que l'on sait aussi construire f par endoscopie, cf. [9, 10]. Mais la construction est difficile, et introduit des conditions de ramification délicates ([10, Thm. 2]). Comme dans le chapitre 4, elle impose aussi de changer d'abord le poids des formes modulaires f_i associées aux $\bar{r}_i$ (cf. e.g. [10, § 3,§ 5]).

5.3

On remarquera que la démonstration du théorème précédent ne requiert que l'usage de formes (pour G) invariantes par Σ. Revenons à la situation du § 2.1, de sorte que K est invariant par M ; M opère alors sur $\mathcal{S}_K$.

Si f est une fonction lisse sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_f)$, on a, pour $\mu \in M$, $\mu f(g) = f(\mu g \mu^{-1}) = f(g\mu^{-1})$. En particulier, $H^0(M, \mathcal{S}_K)$ est simplement l'espace des fonctions invariantes par K et M — plongé diagonalement dans $G(\mathbb{A}_f)$ — pour l'action à droite. Par approximation forte, cet espace est réduit à des caractères abéliens si K et M ne sont pas contenus dans un sous–groupe compact K' de $G(\mathbb{A}_f)$.

Remplaçant K et M par le sous–groupe qu'ils engendrent, on peut donc supposer que $K \supset M$, ce qui est vrai si $K_v \supset M$ pour tout v. Rappelons que c'est le cas, aux places décomposées ne divisant pas p, si K_v est un sous–groupe maximal ou même un sous–groupe d'Iwahori. (Rappelons que les valeurs propres de $m \in M$ sont des racines de l'unité.)

Le sous–groupe $M \subset G(F)$ n'est évidemment pas NET. Pour tout λ, on a néanmoins des applications naturelles

$$j_\lambda : S(G^\lambda, K^\lambda) \longrightarrow S(G,K) = S(G,K)^\Sigma$$

où Σ est défini par un élément $m \in M$ de centralisateur G^λ. Elles ne sont pas injectives !

Reprenons cependant les démonstrations du paragraphe précédent. Le lemme 5.1, étant local, reste vérifié. On vérifie que la démonstration du Lemme 5.2 reste correcte : le point–clé est que dans l'expression (5.3) les termes correspondant aux $g'K$ pour $g'K \notin G^\lambda/K^\lambda$ donnent une contribution nulle - propriété, là encore, locale : si $g'K \notin G^\lambda/K^\lambda$, l'orbite de g' sous Σ donne une contribution nulle.

Comme dans [8, Introduction], disons qu'une forme propre $f \in \mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p)$, pour l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_+^V(G)$, est d'Eisenstein si la représentation modulaire semi–simple associée, de degré n, de $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ est réductible. Soit Res_λ la restriction $\mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p) \to \mathcal{S}_{K_\lambda}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. On a alors la propriété suivante :

Théorème 5.4.— *Soit $f \in \mathcal{S}_K(\bar{\mathbb{F}}_p)$ une forme propre de $\mathcal{H}_+^V(G)$, et supposons que f n'est pas d'Eisenstein. Alors $\mathrm{Res}_\lambda(f) = 0$ pour tout $\lambda \neq (n)$.*

En effet, dans le cas contraire, le Lemme 5.2 impliquerait qu'un caractère associé à un espace propre généralisé de $\mathcal{H}_+^V(G^\lambda)$ donnerait, par composition, le caractère généralisé de $\mathcal{H}_+^V(G)$ associé à f. Les éléments de Frobenius dans $Gal(\bar{E}/E)$ correspondant aux places décomposées étant denses, le théorème de Cebotarev impliquerait alors que la représentation modulaire associée à f est réductible.

Noter qu'on peut reformuler ce résultat en termes de représentations des groupes locaux. Soit v une place finie de F et remplaçons V par $V - \{v\}$ s'il y a lieu. Soit $K = \prod_w K_w$ contenant M ; en particulier $K_v \supset M$ (vu comme sous–groupe de G_v). On peut considérer l'espace $\mathcal{S}_{K^v}(\bar{\mathbb{F}}_p) = \varinjlim_{K_v} \mathcal{S}_{K_v K^v}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ où K_v décrit une bases de voisinage de 1 dans $G_v = G(F_v)$. Il est union finie d'espaces

$$C^\infty(\Gamma_i \backslash G_v, \bar{\mathbb{F}}_p) \tag{5.5}$$

où Γ est un sous–groupe de congruences de G_v (Dans ces arguments, on pourrait d'ailleurs remplacer G par le groupe spécial unitaire, de sorte qu'on obtiendrait un unique espace (5.5) par approximation forte.)
Soit λ une partition, $H = G^\lambda$ le groupe associé ; de même $\mathcal{S}_{K_H^v}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est défini et union finie d'espaces (5.5). Le groupe G_v opère sur $\mathcal{S}_{K^v}$, et H_v opère sur $\mathcal{S}_{K_H^v}$. L'algèbre $\mathcal{H}_+^V$ opère sur $\mathcal{S}_{K^v}$. L'application Res_λ est toujours définie. On a alors :

Corollaire 5.5.— *Soit $f \in H^0(M_v, \mathcal{S}_{K^v}(\bar{\mathbb{F}}_p))$ et supposons f forme propre de $\mathcal{H}_+^V(G)$ et non d'Eisenstein. Alors*

$$\mathrm{Res}_\lambda(f) = 0 \qquad \textit{pour tout } \lambda \neq (n)\,.$$

Rappelons l'énoncé (conjectural) du Lemme d'Ihara dans [8]. On suppose que $p \nmid v$.

Conjecture 5.6.— *Soit $f \in \mathcal{S}_{K^v}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, forme propre et non d'Eisenstein, et supposons que f engendre un sous–module irréductible $\mathcal{V}$ sous G_v Alors $\mathcal{V}$ est générique.*

Nous n'avons pas su trouver une relation entre l'énoncé (effectif) du Corollaire et la Conjecture.

Références

[1] Arthur, James ; Clozel, Laurent, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula. Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989

[2] Ash, Avner Galois representations attached to mod p cohomology of GL(n,Z). Duke Math. J. 65 (1992), no. 2, 235-255.

[3] Barnet-Lamb, Thomas ; Gee, Toby ; Geraghty, David ; Taylor, Richard Potential automorphy and change of weight. Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 2, 501-609.

[4] Bergeron, Nicolas ; Venkatesh, Akshay The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups. J. Inst. Math. Jussieu 12 (2013), no. 2, 391-447.

[5] Clozel, Laurent Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité. Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 77-159, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[6] Clozel, Laurent Formes modulaires sur la Z_p-extension cyclotomique de Q. Pacific J. Math. 268 (2014), no. 2, 259-274

[7] Clozel, Laurent Formes modulaires modulo p, changement de base et théorie d'Iwasawa, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni 35 (2014), 35-46.

[8] Clozel, Laurent ; Harris, Michael ; Taylor, Richard Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l Galois representations. With Appendix A, summarizing unpublished work of Russ Mann, and Appendix B by Marie-France Vignéras. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 108 (2008), 1-181.

[9] Clozel, Laurent ; Thorne, Jack A. Level-raising and symmetric power functoriality, I. Compos. Math. 150 (2014), no. 5, 729-748.

[10] Clozel, Laurent ; Thorne, Jack A. Level raising and symmetric power functoriality, II. Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 1, 303-359.

[11] Curtis, Charles W. ; Reiner, Irving Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.

[12] Franke, Jens Harmonic analysis in weighted L2-spaces. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 31 (1998), no. 2, 181-279.

[13] Guerberoff, Lucio Modularity lifting theorems for Galois representations of unitary type. Compos. Math. 147 (2011), no. 4, 1022-1058.

[14] Harris, Michael The local Langlands conjecture for GL(n) over a p-adic field, n<p. Invent. Math. 134 (1998), no. 1, 177-210.

[15] Harris, Michael ; Lan, Kai-Wen ; Taylor, Richard ; Thorne, Jack A. On the Rigid Cohomology of Certain Shimura Varieties, preprint.

[16] Harris, Michael ; Taylor, Richard The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties. With an appendix by Vladimir G. Berkovich. Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[17] Henniart, Guy Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL(n) sur un corps p-adique. Invent. Math. 139 (2000), no. 2, 439-455.

[18] Jacquet, Hervé ; Piatetski-Shapiro, Ilja I. ; Shalika, Joseph Relèvement cubique non normal. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 292 (1981), no. 12, 567-571

[19] Scholze, Peter On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. Ann. of Math. (2) 182 (2015), no. 3, 945-1066.

[20] Treumann, David ; Venkatesh, Akshay Functoriality, Smith theory, and the Brauer homomorphism. Ann. of Math. (2) 183 (2016), no. 1, 177-228.

[21] Vignéras, Marie-France La conjecture de Langlands locale pour GL(n,F) modulo l quand l$\neq$ p, l>n. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 34 (2001), no. 6, 789-816.

Laurent Clozel
Arithmétique et Géométrie Algébrique
Université Paris-Sud
91405 Orsay
France
laurent.clozel@math.u-psud.fr