Variétés Abéliennes sur les Corps de Fonctions de Courbes sur des Corps Locaux

Diego Izquierdo

Received: January 13, 2016
Revised: January 27. 2017

Communicated by Thomas Geisser

Abstract. Soit K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse X sur un corps p-adique ou sur $\mathbb{C}((t))$. On définit les groupes de Tate-Shafarevich d'un schéma en groupes commutatif en considérant les classes de cohomologie qui deviennent triviales sur chaque complété de K provenant d'un point fermé de X. On établit des théorèmes de dualité arithmétique pour les groupes de Tate-Shafarevich des variétés abéliennes sur K.

Let K be the function field of a smooth projective curve X over a p-adic field or over $\mathbb{C}((t))$. We define Tate-Shafarevich groups of a commutative group scheme via cohomology classes locally trivial at each completion of K coming from a closed point of X. We prove arithmetic duality theorems for Tate-Shafarevich groups of abelian varieties over K.

2010 Mathematics Subject Classification: 14K15, 14G05, 14H05, 12G05
Keywords and Phrases: Abelian varieties, function fields, arithmetic duality, Galois cohomology

0. Introduction

0.1 Contexte et motivations

Depuis les travaux de John Tate dans les années 1960, les théorèmes de dualité arithmétique pour la cohomologie galoisienne des groupes algébriques commutatifs sur des corps locaux ou globaux ont joué un rôle central en arithmétique. Les groupes algébriques concernés sont divers : les groupes finis, les tores, les variétés abéliennes. Rappelons brièvement les résultats portant sur ces dernières.

Dans le cadre local, Tate montre en 1958, dans l'exposé [Tat58], qu'étant donnée une variété abélienne A sur un corps p-adique k de variété abélienne duale A^t, il existe un accouplement canonique $H^0(k,A) \times H^1(k,A^t) \to \mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui met en dualité parfaite le groupe profini $H^0(k,A)$ et le groupe de torsion $H^1(k,A^t)$. Dans le cadre global, en généralisant des travaux de Cassels pour les courbes elliptiques, il construit pour chaque variété abélienne A sur un corps de nombres K de variété duale A^t un accouplement $Ш^1(K,A) \times Ш^1(K,A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ puis annonce au Congrès International des Mathématiciens de 1962 ([Tat63]) la non-dégénérescence de ce dernier modulo divisibles. Ici, $Ш^1(K,A)$ désigne le groupe de Tate-Shafarevich constitué des classes d'isomorphismes de torseurs sous A triviales dans tous les complétés de K. Des résultats analogues ont aussi été établis pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{F}_p((u))$ et sur $\mathbb{F}_p(u)$ (Remarque I.3.6 et Théorème I.6.13 de [Mil06]).

Par ailleurs, ces dernières années, nous avons été témoins d'un regain d'intérêt pour les théorèmes de dualité sur d'autres corps de caractéristique 0 que les corps p-adiques et les corps de nombres. Citons par exemple les travaux de Scheiderer et van Hamel ([SvH03]) et Harari et Szamuely ([HSz16]) pour $\mathbb{Q}_p((u))$ et $\mathbb{Q}_p(u)$, ceux de Colliot-Thélène et Harari ([CTH15]) pour $\mathbb{C}((t))((u))$ et $\mathbb{C}((t))(u)$, et ceux de l'auteur ([Izq16a]) pour les corps de la forme $k((u))$ et $k(u)$ avec $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ ou $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_d))$. Cependant, aucun de ces travaux ne porte sur les variétés abéliennes. En fait, à la connaissance de l'auteur, on ne dispose jusqu'à présent que de résultats pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((u))$ et $\mathbb{C}(u)$: cela remonte à des travaux de Ogg dans les années 1960 ([Ogg62]). Le but du présent article est donc d'établir des théorèmes de dualité, analogues à ceux de Tate rappelés ci-dessus, pour les variétés abéliennes sur les corps de la forme $k((u))$ et $k(u)$ avec $k = \mathbb{Q}_p$ ou $k = \mathbb{C}((t))$.

Remarque 0.1. • Il est vrai qu'on peut déjà trouver des résultats similaires pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ dans [Koy00], mais l'article en question contient un grand nombre d'erreurs et soit le théorème principal soit la principale proposition permettant de le prouver semble erroné (voir la remarque 3.18).

• La plupart des résultats du présent article peuvent être généralisés aux corps de la forme $k((u))$ et $k(u)$ avec $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ ou $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_d))$: en effet, les idées sont les mêmes, mais les preuves sont beaucoup plus techniques. On renvoie le lecteur au chapitre 3 de [Izq16b] pour retrouver lesdites généralisations.

0.2 Organisation de l'article

Cet article est constitué de 5 sections.

La première partie permet de faire quelques rappels et d'établir quelques résultats préliminaires. On y étudie notamment la cohomologie des tores sur des corps (dits d-locaux) de la forme $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ ou $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))$.

La deuxième partie porte sur les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et sur $\mathbb{C}((t_0))(t)$. Voici les principaux résultats obtenus dans cette section, où, pour B groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète) et ℓ un nombre premier, on a noté $B\{\ell\}$ la partie de torsion ℓ-primaire de B, $B^{\wedge}$ la limite projective des B/n, B^D l'ensemble des morphismes continus de B dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et $\overline{B}$ le quotient de B par son sous-groupe divisible maximal :

Théorème 0.2. *(théorèmes 2.3, 2.14 et 2.26 et corollaire 2.28)*

(i) Soient $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et A une variété abélienne sur k. Soit A^t sa variété abélienne duale. Les groupes $H^1(k, A)$ et $(H^0(k, A^t)^{\wedge})^D$ sont isomorphes modulo divisibles. Plus précisément, on a une suite exacte :

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^{\wedge})^D \to 0,$$

où $m(A)$ est un entier naturel compris entre 0 et $4 \dim A$ dépendant de la géométrie de A. L'entier $m(A)$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne sur $\mathbb{C}((t_0))$ apparaissant dans la réduction du modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A modulo t_1 a très mauvaise réduction. Lorsque la fibre spéciale de $\mathcal{A}$ est connexe, le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^{\wedge})^D$ est un groupe contenant $H^1_{nr}(k, A) := H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ qui peut être décrit explicitement : on le note $H^1_{nrs}(k, A)$.

(ii) Soient $k = \mathbb{C}((t_0))$ et K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse géométriquement intègre X sur k. On note $X^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de X. Soit A une variété abélienne sur K, de variété abélienne duale A^t. Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que $m(A \times_K K_v) = 0$. On suppose que, pour toute place $v \in X^{(1)} \setminus Z$, la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$ est connexe, et on pose :

$$Ш^1(K, A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K, A) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, A)\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A) :=$$

$$= \mathrm{Ker}\left(H^1(K, A) \to \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v, A)/H^1_{nrs}(K_v, A) \times \prod_{v \in Z} H^1(K_v, A)\right).$$

On remarquera que $Ш^1(K, A) \subseteq Ш^1_{nrs}(A)$. Alors pour chaque nombre premier ℓ, il existe une dualité parfaite $\overline{Ш^1(K, A)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ainsi qu'un accouplement $Ш^1(K, A)\{\ell\} \times Ш^1(K, A^t)\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont le noyau à gauche (resp. à droite) est constitué des éléments de $Ш^1(K, A)\{\ell\}$ (resp. $Ш^1(K, A^t)\{\ell\}$) qui sont divisibles dans $Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $Ш^1_{nrs}(A^t)$).

Remarque 0.3. L'énoncé précédent est moins général que les énoncés qui seront démontrés dans l'article : il est en fait possible d'affaiblir l'hypothèse de connexité des fibres spéciales des modèles de Néron. On remarquera aussi que l'hypothèse de (ii) ne concerne que les places de mauvaise réduction.

La troisième partie est consacrée à une dualité analogue à celle de (i) du théorème 0.2 pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_2))$. Plus précisément, elle permet de construire un accouplement entre la cohomologie d'une variété abélienne et la cohomologie d'un certain faisceau qui lui est associé puis :

- de démontrer que ledit accouplement induit toujours une dualité parfaite modulo divisibles (corollaire 3.3 et théorème 3.5),
- de déterminer quand c'est un accouplement parfait (sans quotienter par les sous-groupes divisibles) (théorèmes 3.17 et 3.19),
- de calculer dans certains cas les noyaux à gauche et à droite de l'accouplement (théorème 3.29).

La quatrième partie est dédiée au deuxième théorème principal de cet article : il s'agit d'un théorème de dualité globale pour les variétés abéliennes sur $k(X)$ où k désigne un corps p-adique et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On l'établit sous deux formes différentes :

- dans le théorème 4.10, on montre une dualité entre les groupes de Tate-Shafarevich d'une variété abélienne A et les groupes de Tate-Shafaravich d'un certain faisceau $\tilde{A}$ sous des hypothèses assez contraignantes ;
- dans le théorème 4.16 et le corollaire 4.17, on affaiblit substantiellement les hypothèses du théorème 4.10 en modifiant (comme dans le (ii) du théorème 0.2) le groupe de Tate-Shafarevich de $\tilde{A}$. On remarquera que ces deux résultats tiennent compte des parties p-primaires des groupes de Tate-Shafarevich pour p la caractéristique résiduelle de k, et que lorsque l'on se restreint aux parties ℓ-primaires pour $\ell \neq p$, on a une très bonne compréhension de ce qu'est le groupe de Tate-Shafarevich modifié de $\tilde{A}$.

Finalement, dans la cinquième et dernière partie, on s'intéresse à la finitude du premier groupe de Tate-Shafarevich d'une variété abélienne sur $k(X)$ où $k = \mathbb{C}((t_0))$ ou $k = \mathbb{Q}_p$ et X est une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k.

0.3 STRATÉGIE DE PREUVE

Expliquons brièvement la stratégie de la preuve du théorème 0.2.

Stratégie de preuve de (i). On adopte les notations du théorème 0.2(i) et on procède en plusieurs étapes :

A. On construit d'abord un accouplement naturel $H^1(k, A) \times H^0(k, A^t)^\wedge \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En exploitant ensuite la suite exacte de Kummer $0 \to {}_nA \to A \xrightarrow{\cdot n} A \to 0$ pour se ramener à des énoncés de dualité connus pour la cohomologie des modules galoisiens finis sur k, on montre que le morphisme induit $\phi : H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est surjectif.

B. On s'intéresse au noyau du morphisme surjectif $\phi : H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$. En faisant intervenir le modèle de Néron de A (ou plus précisément la structure de sa fibre spéciale en tant que groupe algébrique) et en exploitant des calculs de caractéristique d'Euler-Poincaré, on estime la quantité $\frac{|{}_n\mathrm{Ker}(\phi)|}{|\mathrm{Ker}(\phi)/n|}$ pour chaque $n \geq 1$, où ${}_n\mathrm{Ker}(\phi)$ désigne la n-torsion de $\mathrm{Ker}(\phi)$. Des théorèmes de structure pour les groupes abéliens de torsion dont la n-torsion est finie pour tout n nous permettent ensuite d'établir que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un groupe divisible, isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)}$ où $m(A)$ est un entier naturel explicite compris entre 0 et $4 \dim A$ et dépendant de la géométrie de A.

C. Lorsque la fibre spéciale du modèle de Néron de A est connexe, on démontre que $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont divisibles. Cela nous permet de définir un sous-groupe explicite $H^1_{nrs}(k,A)$ de $H^1(k,A)$ qui s'insère naturellement dans une suite exacte :

$$0 \to H^1_{nr}(k,A) \to H^1_{nrs}(k,A) \to (H^1_{nr}(k,A^t)^\wedge)^D \to 0.$$

En étudiant les compatibilités entre les morphismes de la suite exacte précédente avec le morphisme ϕ, on montre que $H^1_{nrs}(k,A)$ coïncide avec le noyau de ϕ.

Stratégie de preuve de (ii). On adopte les notations du théorème 0.2(ii) et on fixe un nombre premier ℓ. Pour montrer qu'il y a une dualité parfaite

$$\overline{Ш^1(K,A)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

on procède en plusieurs grandes étapes :

A. On commence par considérer un schéma abélien $\mathcal{A}$ sur un ouvert V de X étendant A et on note $\mathcal{A}^t$ le schéma abélien dual. On introduit alors les groupes :

$$D^1(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(H^1(V,\mathcal{A}) \to \bigoplus_{v \in X\setminus V} H^1(K_v,A)),$$
$$D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}\left(H^1(V,\mathcal{A}^t) \to W\right),$$

où

$$W = \bigoplus_{v\in Z\setminus V} H^1(K_v,A^t) \oplus \bigoplus_{v\in X\setminus(V\cup Z)} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t)).$$

On remarquera que la notation $H^1_{nrs}(K_v,A^t)$ fait sens puisque le complété K_v est isomorphe à $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$. Les groupes $D^1(V,\mathcal{A})$ et $D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)$ sont des sous-groupes des groupes de cohomologie étale $H^1(V,\mathcal{A})$ et $H^1(V,\mathcal{A}^t)$ respectivement.

B. En utilisant des théorèmes (déjà connus) de dualité pour la cohomologie des schémas en groupes finis étales sur V, on étudie la dualité pour la cohomologie étale du schéma abélien $\mathcal{A}$.

C. Comme cela a déjà été précisé dans l'étape A, les complétés K_v de K (pour v point fermé de X) sont isomorphes à $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$, et sont donc redevables du théorème de dualité 0.2(i). En combinant ces résultats de dualité sur les complétés de K et l'étude de l'étape B (dualité sur V), on montre que $\overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\}$ et $\overline{D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\}$ sont duaux l'un de l'autre.

D. On montre que $\text{Ш}^1_{nrs}(A^t) = \bigcup_{V' \subseteq V} D^1_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)$ et que, quitte à rétrécir V, on a $\text{Ш}^1(K,A) = D^1(V,\mathcal{A})$. Un passage à la limite (en rétrécissant V) dans la dualité de l'étape C permet alors d'obtenir une dualité parfaite :

$$\overline{\text{Ш}^1(K,A)}\{\ell\} \times \overline{\text{Ш}^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

E. Pour établir qu'on a un accouplement $\text{Ш}^1(K,A)\{\ell\} \times \text{Ш}^1(K,A^t)\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont le noyau à gauche (resp. à droite) est constitué des éléments de $\text{Ш}^1(K,A)\{\ell\}$ (resp. $\text{Ш}^1(K,A^t)\{\ell\}$) qui sont divisibles dans $\text{Ш}^1_{nrs}(A)$ (resp. $\text{Ш}^1_{nrs}(A^t)$), il suffit d'écrire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\text{Ш}^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{\text{Ш}^1(K,A)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\overline{\text{Ш}^1(K,A^t)}\{\ell\} \arrow[u] & \times & \overline{\text{Ш}^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des accouplements parfaits de groupes finis d'après l'étape D et les deux flèches verticales sont induites par les inclusions $\text{Ш}^1(K,A) \subseteq \text{Ш}^1_{nrs}(A)$ et $\text{Ш}^1(K,A^t) \subseteq \text{Ш}^1_{nrs}(A^t)$, puis de montrer qu'il commute.

Les stratégies générales de preuve sont similaires dans les troisième et quatrième sections, où l'on s'intéresse aux variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t))$ et $\mathbb{Q}_p(t)$. Mais les démonstrations sont techniquement nettement plus délicates.

0.4 Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour son soutien et ses conseils, ainsi que sa lecture soigneuse de ce texte : sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je suis aussi très reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène et à Tamás Szamuely pour leurs commentaires et leurs remarques. Je voudrais finalement remercier l'École Normale Supérieure pour ses excellentes conditions de travail.

0.5 Notations

Corps. Si l est un corps, on notera l^s sa clôture séparable. Si de plus l est un corps de valuation discrète complet, on notera l^{nr} son extension non ramifiée maximale.

Groupes abéliens. Pour M un groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), $n > 0$ un entier et ℓ un nombre premier, on notera :

- M_{tors} la partie de torsion de M.
- ${}_nM$ la partie de n-torsion de M.
- $M\{\ell\}$ la partie de torsion ℓ-primaire de M.
- $M_{\text{non}-\ell} = \bigoplus_{p\neq\ell} M\{p\}$ où p décrit les nombres premiers différents de ℓ.
- M/n le quotient de M par nM.
- $M^{(\ell)} := \varprojlim_r M/\ell^r$ le complété pour la topologie ℓ-adique de M.
- $M^\wedge$ la limite projective des M/nM.
- $T_\ell M$ la limite projective des ${}_{\ell^r}M$.
- M_{div} le sous-groupe divisible maximal de M.
- $\overline{M} = M/M_{div}$ le quotient de M par son sous-groupe divisible maximal.
- M^D le groupe des morphismes continus $M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Un groupe abélien de torsion sera dit de type cofini si, pour tout entier naturel $n > 0$, sa n-torsion est finie. La partie ℓ-primaire d'un tel groupe est la somme directe d'un ℓ-groupe abélien fini et d'une puissance finie de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Faisceaux et cohomologie. Sauf indication du contraire, tous les faisceaux sont considérés pour le petit site étale. Soit $r \geq 0$. Pour F et G deux faisceaux fppf sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(F,G)$ (ou $\underline{\mathrm{Ext}}^r(F,G)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) le faisceau associé pour la topologie étale au préfaisceau $T \mapsto \mathrm{Ext}^r_{T_{fppf}}(F,G)$. On rappelle qu'avec cette définition, la formule de Barsotti-Weil garantit que, si A est une variété abélienne sur un corps k, alors la variété abélienne duale A^t représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A,\mathbb{G}_m)$ (voir par exemple le théorème III.18.1 de [Oor66]). Par ailleurs, en mimant les notations pour les groupes abéliens, on pose, pour F un faisceau sur un schéma X et l un nombre premier, $H^r(X,T_lF) = \varprojlim_n H^r(X,{}_{l^n}F)$ et $H^r(X,F\{l\}) = \varinjlim_n H^r(X,{}_{l^n}F)$.

Catégories dérivées. Nous serons amenés quelques fois à considérer des catégories dérivées bornées. On notera alors $-\otimes^{\mathbf{L}}-$ le produit tensoriel dérivé.

Corps locaux supérieurs. Les corps 0-locaux sont par définition les corps finis et le corps $\mathbb{C}((t))$. Pour $d \geq 1$, un corps d-local est un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local. *On remarquera que cette définition est plus générale que la définition standard.* Lorsque k est un corps d-local, on notera k_0, k_1, ..., k_d les corps tels que k_0 est fini ou $\mathbb{C}((t))$, $k_d = k$, et pour chaque i le corps k_i est le corps résiduel de k_{i+1}. On rappelle le théorème de dualité sur un corps d-local k :

Théorème 0.4. *Pour tout* $\mathrm{Gal}(k^s/k)$*-module fini M d'ordre n non divisible par $Car(k_1)$, le groupe abélien fini* $\mathrm{Hom}(M,\mu_n^{\otimes d})$ *est naturellement muni d'une structure de module galoisien sur k et on a un accouplement parfait de groupes finis* $H^r(k,M) \times H^{d+1-r}(k,\mathrm{Hom}(M,\mu_n^{\otimes d})) \to H^{d+1}(k,\mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ce théorème est énoncé et démontré dans [Mil06] (théorème I.2.17) lorsque $k_0 \neq \mathbb{C}((t))$. Il se prouve exactement de la même manière dans ce dernier cas : en effet, il suffit de procéder par récurrence à l'aide du lemme I.2.18 de [Mil06], l'initialisation étant réduite à la dualité évidente $H^r(k_{-1}, M) \times H^{-r}(k_{-1}, \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to H^0(k_{-1}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour le corps "-1-local" $k_{-1} = \mathbb{C}$.

GROUPES DE TATE-SHAFAREVICH. Lorsque L est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre Y sur un corps l et M est un $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module discret, le r-ième groupe de Tate-Shafarevich de M est, par définition, le groupe $Ш^r(L, M) = \mathrm{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} H^r(L_v, M))$, où $Y^{(1)}$ désigne l'ensemble des points de codimension 1 de Y et L_v le complété de L par rapport à v pour chaque $v \in Y^{(1)}$.

GROUPE DE BRAUER. Lorsque Z est un schéma, on note $\mathrm{Br}(Z)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2(Z, \mathbb{G}_m)$. Si Z est une l-variété géométriquement intègre pour un certain corps l, on note $\mathrm{Br}_1(Z)$ le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(Z) \to \mathrm{Br}(Z \times_l l^s))$.

CADRE. Dans toute la suite, d désignera un entier naturel fixé (éventuellement nul), k un corps d-local et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On notera K son corps des fonctions. *Lorsque k_0 est fini, on supposera que le corps k_1 est de caractéristique 0* : autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et k_1 est un corps p-adique. Lorsque M est un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret, on notera parfois $Ш^r(M)$ au lieu de $Ш^r(K, M)$.

COHOMOLOGIE À SUPPORT COMPACT. Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, le r-ième groupe de cohomologie à support compact est, par définition, le groupe $H^r_c(U, \mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$. On remarquera que, contrairement à la définition classique de la cohomologie à support compact, cette définition ne dépend pas du choix d'une compactification lisse de U (plus précisément, nous avons choisi X comme compactification lisse de U).

TORES ALGÉBRIQUES. On dit qu'un groupe algébrique T sur un corps l est un tore si $T \times_l l^s$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m^r$ pour un certain $r \geq 0$. Lorsque T est un tore, on note $\hat{T}$ son module des caractères, c'est-à-dire le $\mathbb{Z}$-module des morphismes de groupes algébriques de $T \times l^s$ vers $\mathbb{G}_{m,l^s}$. On rappelle que le foncteur $T \mapsto \hat{T}$ établit une équivalence de catégories entre les tores algébriques sur l et les $\mathrm{Gal}(l^s/l)$-modules qui, en tant que groupes abéliens, sont libres de type fini. Si T est un tore sur l, on appelle rang de T la dimension d'un sous-tore déployé maximal : c'est aussi le rang de $H^0(l, \hat{T})$. Par ailleurs, on dit qu'un tore T sur l est quasi-trivial s'il est isomorphe à $R_{L/l}\mathbb{G}_m$ pour une certaine l-algèbre finie séparable L.

1. Préliminaires

1.1 Groupes de torsion de type cofini

Dans cet article, nous étudierons souvent la structure des groupes de cohomologie par des arguments de comptage. Ainsi, les lemmes qui suivent, qui ne sont que des exercices d'algèbre élémentaire, seront utilisés très souvent sans référence explicite :

Lemme 1.1. *(Théorème 25.1 de [Fuc70])*
Soit A un groupe de torsion de type cofini. Pour chaque nombre premier ℓ, il existe un groupe fini F_ℓ et un entier naturel r_ℓ tels que $A\{\ell\} \cong F_\ell \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{r_\ell}$.

Esquisse. On peut supposer que A est de torsion ℓ-primaire. On remarque alors que $A = A_{div} \oplus \overline{A}$. Le groupe A_{div} est divisible et le groupe $\overline{A}$ ne possède pas de sous-groupe divisible non trivial.
Montrons d'abord qu'il existe r_ℓ tel que $A_{div} \cong (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{r_\ell}$. Pour ce faire, posons $B_0 = A_{div}$ et supposons que B_0 n'est pas nul. Soit $x \in {}_\ell B_0 \setminus \{0\}$. Choisissons une suite (x_i) à valeurs dans B_0 telle que $x_1 = x$ et $\ell x_{i+1} = x_i$. On définit alors un morphisme $f : \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to B_0$ en envoyant la classe de $1/\ell^i$ sur x_i. On vérifie aisément que f est injectif, et donc il existe un groupe de torsion de type cofini divisible de torsion ℓ-primaire B_1 tel que $B_0 \cong \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \oplus B_1$. Si B_1 est non nul, en répétant l'argument précédent appliqué à B_1 (au lieu de B_0), on obtient une décomposition $B_1 \cong \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \oplus B_2$. Si B_2 est non nul, on peut continuer en écrivant $B_2 \cong \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \oplus B_3$. Et ainsi de suite. Le processus doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes : en effet, sinon, A_{div} contiendrait un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^n$ pour chaque n, ce qui contredirait la finitude de ${}_\ell A_{div}$. Cela prouve bien qu'il existe r_ℓ tel que $A_{div} \cong (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{r_\ell}$.
Montrons maintenant que $\overline{A}$ est fini. Par l'absurde, supposons $\overline{A}$ infini. Comme ${}_{\ell^r}\overline{A}$ est fini pour tout r, le groupe $\varprojlim_r {}_{\ell^r}\overline{A}$, muni de la topologie limite projective, est compact. De plus, $\overline{A}$ étant infini, pour chaque s, le groupe ${}_{\ell^s}\overline{A}$ contient un élément d'ordre ℓ^s. Pour chaque s, notons E_s le sous-ensemble de $\varprojlim_r {}_{\ell^r}\overline{A}$ constitué des éléments dont la projection dans ${}_{\ell^s}\overline{A}$ est d'ordre ℓ^s. Les E_s forment une suite de fermés emboîtés dans l'espace compact $\varprojlim_r {}_{\ell^r}\overline{A}$. Donc $\bigcap_s E_s$ n'est pas vide. Cela implique que $\overline{A}$ contient un sous-groupe divisible non trivial : absurde ! On en déduit que $\overline{A}$ est fini.

□

On en déduit immédiatement que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{|{}_nA|}{|A/n|} = \prod_\ell \ell^{r_\ell v_\ell(n)}.$$

Ici, $v_\ell(n)$ désigne la valuation ℓ-adique de n.

LEMME 1.2. *Soient A et A' deux groupes de torsion de type cofini. Si $|_nA| = |_nA'|$ pour tout entier naturel n, alors A et A' sont (non canoniquement) isomorphes.*

Esquisse. Pour chaque groupe abélien de torsion de type cofini Z, on note $f_Z : n \mapsto |_nZ|$. On peut supposer que A et A' sont de torsion p-primaire pour un certain nombre premier p. On écrit alors $A = F \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^s$ et $A' = F' \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{s'}$, avec F et F' finis et $s, s' \in \mathbb{N}$. On remarque que $f_A(n) = p^{sv_p(n)}g(n)$ et $f_{A'}(n) = p^{s'v_p(n)}g'(n)$ où g et g' sont des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par conséquent, on a $s = s'$. En remarquant que $f_F = f_{F'}$, on voit alors que l'on peut supposer $s = s' = 0$, c'est-à-dire que A et A' sont finis.
Procédons par récurrence forte sur l'ordre de A. Si $|A| = 1$, le résultat est évident. Supposons maintenant que le lemme soit démontré lorsque l'ordre de A est au plus a pour un certain entier a. Soit A un groupe abélien fini d'ordre $a + 1$. On écrit alors $A = \bigoplus_{i=1}^r (\mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z})^{m_i}$ et $A' = \bigoplus_{i=1}^{r'} (\mathbb{Z}/p^{\alpha'_i}\mathbb{Z})^{m'_i}$, avec :
- $r, r', \in \mathbb{N}$,
- $m_1, ..., m_r, m'_1, ..., m'_{r'} \in \mathbb{N}^*$,
- $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha'_1, ..., \alpha'_{r'} \in \mathbb{N}^*$,
- $\alpha_1 < ... < \alpha_r$ et $\alpha'_1 < ... < \alpha'_{r'}$.

On remarque que $f_A(n) = p^{\sum_{i=1}^r m_i \min\{v_p(n), \alpha_i\}}$ et $f_{A'}(n) = p^{\sum_{i=1}^{r'} m'_i \min\{v_p(n), \alpha'_i\}}$. Si $\alpha_1 < \alpha'_1$, alors :

$$\log_p f_A(p^{\alpha_1}) = (\sum_{i=1}^r m_i)\alpha_1 = (\sum_{i=1}^{r'} m'_i)\alpha_1 = \log_p f_{A'}(p^{\alpha_1}),$$

$$\log_p f_A(p^{\alpha_1+1}) = m_1\alpha_1 + (\sum_{i=2}^r m_i)(\alpha_1 + 1) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{r'} m'_i)(\alpha_1 + 1) = \log_p f_{A'}(p^{\alpha_1+1}),$$

et donc $m_1 = 0$, ce qui est absurde. Par symétrie, on en déduit que $\alpha_1 = \alpha'_1$. Or, par hypothèse de récurrence, $(\mathbb{Z}/p^{\alpha_1}\mathbb{Z})^{m_1-1} \oplus \bigoplus_{i=2}^r (\mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z})^{m_i} \cong (\mathbb{Z}/p^{\alpha'_1}\mathbb{Z})^{m'_1-1} \oplus \bigoplus_{i=2}^{r'} (\mathbb{Z}/p^{\alpha'_i}\mathbb{Z})^{m'_i}$, donc $A \cong A'$, ce qui achève la récurrence.

$\square$

Rappelons que k est un corps d-local. On a vu dans le théorème 0.4 que les groupes de cohomologie galoisienne sur k d'un module galoisien fini sont toujours finis. Cela implique le lemme suivant, que nous utiliserons à de nombreuses reprises :

LEMME 1.3. *Soit M un* $\mathrm{Gal}(k^s/k)$*-module discret.*
(i) Si M est divisible et M_{tors} est de torsion de type cofini, alors $H^r(k, M)$ est de torsion de type cofini pour $r > 0$.

(ii) Si M est de torsion de type cofini, alors $H^r(k, M)$ est de torsion de type cofini pour $r \geq 0$.

Démonstration. (i) Soit $r > 0$. La suite exacte de Kummer :

$$0 \to {}_nM \to M \to M \to 0$$

induit une suite exacte de cohomolgoie :

$$0 \to H^{r-1}(k, M)/n \to H^r(k, {}_nM) \to {}_nH^r(k, M) \to 0.$$

Comme $H^r(k, {}_nM)$ est fini, ${}_nH^r(k, M)$ l'est aussi et $H^r(k, M)$ est bien de torsion de type cofini.

(ii) On écrit la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to M_{div} \to M \to M/M_{div} \to 0.$$

On obtient donc une suite exacte :

$$H^r(k, M_{div}) \to H^r(k, M) \to H^r(k, M/M_{div}).$$

Or $H^r(k, M/M_{div})$ est fini car M/M_{div} est fini et $H^r(k, M_{div})$ est de torsion de type cofini par (i). On en déduit que $H^r(k, M)$ est de torsion de type cofini.

□

1.2 CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

On rappelle que k est un corps d-local. Il est en particulier de dimension cohomologique $d + 1$.

DÉFINITION 1.4. *Soit F un* $\mathrm{Gal}(k^s/k)$*-module fini. La caractéristique d'Euler-Poincaré de F est définie par :*

$$\chi(k, F) := \prod_{r=0}^{\infty} |H^r(k, F)|^{(-1)^r}.$$

Le produit est fini car le corps k est dimension cohomologique finie.

PROPOSITION 1.5. *Soit F un* $\mathrm{Gal}(k^s/k)$*-module fini.*
(i) Si k_0 est fini et $d \geq 2$, alors $\chi(k, F) = 1$.
(ii) Si $k_0 = \mathbb{C}((t))$, alors $\chi(k, F) = 1$.

Démonstration. (i) Notons κ le corps résiduel de k et procédons par récurrence sur d.

- Supposons que $d = 2$. Comme k^{nr} est un corps de dimension cohomologique au plus 1 (exemple c de II.3.3 de [Ser94]), la suite spectrale de

Hochschild-Serre $H^r(\kappa, H^s(k^{nr}, F)) \Rightarrow H^{r+s}(k, F)$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(\kappa, H^0(k^{nr}, F)) \to H^r(k, F) \to H^{r-1}(\kappa, H^1(k^{nr}, F)) \to ...$$

(voir exercice 5.2.2 de [Wei94]). On a donc :

$$\chi(k, F) = \frac{\chi(\kappa, H^0(k^{nr}, F))}{\chi(\kappa, H^1(k^{nr}, F))}.$$

Or, comme $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (paragraphe IV.2 de [Ser68]), la proposition 1.7.7(i) de [NSW08] implique que les groupes $H^0(k^{nr}, F)$ et $H^1(k^{nr}, F)$ ont même ordre. Par conséquent, d'après le théorème I.2.8 de [Mil06], on a :

$$\chi(\kappa, H^0(k^{nr}, F)) = \chi(\kappa, H^1(k^{nr}, F)),$$

et donc $\chi(k, F) = 1$.

- Soit $d > 2$ et supposons que la proposition soit vraie pour tout corps $(d-1)$-local. Comme avant, la suite spectrale $H^r(\kappa, H^s(k^{nr}, F)) \Rightarrow H^{r+s}(k, F)$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(\kappa, H^0(k^{nr}, F)) \to H^r(k, F) \to H^{r-1}(\kappa, H^1(k^{nr}, F)) \to ...$$

On a donc $\chi(k, F) = \frac{\chi(\kappa, H^0(k^{nr}, F))}{\chi(\kappa, H^1(k^{nr}, F))}$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\chi(\kappa, H^0(k^{nr}, F)) = \chi(\kappa, H^1(k^{nr}, F)) = 1,$$

et donc $\chi(k, F) = 1$.

(ii) L'énoncé est vrai pour $d = 0$ puisque $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}((t))^s/\mathbb{C}((t))) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (exemple b de XIII.2 de [Ser68]). On procède ensuite par récurrence comme dans (i).

□

1.3 Tores algébriques

Dans ce paragraphe, nous allons calculer le sous-groupe divisible maximal de $H^r(k, T)$ pour T un k-tore et r un entier naturel. Pour ce faire, on commence par rappeller le lemme d'Ono, qui sera utilisé à de nombreuses reprises :

Lemme 1.6. (Lemme d'Ono – théorème 1.5.1 de [Ono61])
Soient l un corps et T un tore sur l. Il existe un entier naturel non nul m, des l-tores quasi-triviaux T_0 et R et un l-schéma en groupes fini commutatif F tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_l T_0 \to 0.$$

Remarque 1.7. Les deux remarques qui suivent seront utilisées à de nombreuses reprises dans la suite :

(i) Si M est un groupe abélien fini, la suite exacte :

$$0 \to {}_nM \to M \xrightarrow{\cdot n} M \to M/n \to 0$$

montre que :

$$\frac{|{}_nM|}{|M/n|} = 1.$$

(ii) Le lemme du serpent montre que si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte de groupe abéliens, alors on a une suite exacte :

$$0 \to {}_nM_1 \to {}_nM_2 \to {}_nM_3 \to M_1/n \to M_2/n \to M_3/n \to 0.$$

Si de plus ${}_nM_1$, ${}_nM_2$, ${}_nM_3$, M_1/n, M_2/n et M_3/n sont finis, alors :

$$\frac{|{}_nM_2|}{|M_2/n|} = \frac{|{}_nM_1|}{|M_1/n|} \cdot \frac{|{}_nM_3|}{|M_3/n|}.$$

1.3.1 Cas où $k_0 = \mathbb{C}((t))$

Nous nous plaçons d'abord dans le cas, plus simple, où $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Le corps k étant d-local, cela signifie que k est isomorphe à $k_0((t_1))...((t_d))$.

Lemme 1.8. *Pour chaque entier naturel non nul n, l'ordre de $H^1(k, \mu_n)$ est n^{d+1}.*

Démonstration. On procède par récurrence sur d. Pour $d = 0$, comme $\mathbb{C}((t))^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{C}[[t]]^\times$ et $\mathbb{C}[[t]]^\times$ est divisible, on a $\mathbb{C}((t))^\times/\mathbb{C}((t))^{\times^n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et donc le groupe $H^1(\mathbb{C}((t)), \mu_n)$ est bien d'ordre n.
Supposons maintenant le lemme prouvé pour un certain d, et considérons un corps $(d+1)$-local k avec $k_0 = \mathbb{C}((t))$. En notant κ le corps résiduel de k, on a une suite exacte (paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser94]) :

$$0 \to H^1(\kappa, \mu_n) \to H^1(k, \mu_n) \to H^0(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

Comme κ est d-local, l'hypothèse de récurrence impose que $|H^1(\kappa, \mu_n)| = n^{d+1}$, et donc $|H^1(k, \mu_n)| = n|H^1(\kappa, \mu_n)| = n^{d+2}$. □

Proposition 1.9. *Soient T un tore sur k et ρ son rang. On a alors pour chaque entier naturel non nul n :*

$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}.$$

Démonstration. • Le lemme 1.8 implique que :

$$\frac{|{}_n\mathbb{G}_m(k)|}{|\mathbb{G}_m(k)/n|} = \frac{|H^0(k, \mu_n)|}{|H^1(k, \mu_n)|} = \frac{n}{|H^1(k, \mu_n)|} = n^{-d}.$$

Cela montre que la proposition est vraie pour $T = \mathbb{G}_m$, et donc aussi pour tout tore quasi-trivial d'après le lemme de Shapiro.

- On se place maintenant dans le cas général, où T est un tore quelconque. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Notons ρ_R le rang de R. En passant à la cohomologie et en appliquant le lemme de Shapiro et le théorème de Hilbert 90, on obtient une suite exacte :

$$0 \to F(k) \to R(k) \to T(k)^m \times T_0(k) \to H^1(k,F) \to 0.$$

Comme F est fini, les groupes $F(k)$ et $H^1(k,F)$ sont finis (théorème 0.4). En utilisant les deux parties de la remarque 1.7, on déduit alors du lemme du serpent et de la finitude de $F(k)$ et $H^1(k,F)$ que :

$$\left(\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)/n|} = \frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)/n|}.$$

Or nous avons montré que $\frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)/n|} = n^{-d(\rho_R-\rho m)}$ et $\frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)/n|} = n^{-d\rho_R}$, puisque T_0 et R sont des tores quasi-triviaux de rangs respectifs $\rho_R - \rho m$ et ρ_R. On en déduit que $\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}$.

□

Proposition 1.10. *Soit T un tore de rang ρ sur k. On a alors pour chaque entier naturel non nul n :*

$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|} = n^{\rho}.$$

Démonstration. • La propriété est évidente pour $T = \mathbb{G}_m$. Elle est donc aussi vraie pour tout tore quasi-trivial.

- On se place maintenant dans le cas général. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Comme $F(k^s)$ est fini, on déduit une suite exacte :

$$0 \to F(k^s)_{tors} \to R(k^s)_{tors} \to T^m(k^s)_{tors} \times T_0(k^s)_{tors} \to 0.$$

En passant à la cohomologie, on obtient l'exactitude de :

$$0 \to F(k)_{tors} \to R(k)_{tors} \to T(k)^m_{tors} \times T_0(k)_{tors} \to H^1(k, F(k^s)_{tors}).$$

Or $F(k^s)_{tors}$ est fini. Donc il en est de même du groupe $H^1(k, F(k^s)_{tors})$, et il existe une suite exacte :

$$0 \to F(k)_{tors} \to R(k)_{tors} \to T(k)^m_{tors} \times T_0(k)_{tors} \to Q \to 0,$$

où Q est fini. On déduit du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|}\right)^m \times \frac{|_nT_0(k)|}{|T_0(k)_{tors}/n|} = \frac{|_nR(k)|}{|R(k)_{tors}/n|}.$$

Or, en notant ρ_R le rang de R, nous avons montré que $\frac{|_nT_0(k)|}{|T_0(k)_{tors}/n|} = n^{\rho_R-\rho m}$ et $\frac{|_nR(k)|}{|R(k)_{tors}/n|} = n^{\rho_R}$. On en déduit que $\frac{|_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{\rho}$. □

Proposition 1.11. *Soit T un tore de rang ρ sur k. Soit $r \geq 1$. On note $c_{r,d} = 0$ si $r = 1$ et $c_{r,d} = \binom{d+1}{r}$ si $r > 1$. Il existe un groupe abélien fini F (qui dépend de r et de T) tel que :*

$$H^r(k,T) \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_{r,d}\cdot\rho}.$$

De plus, si $T = \mathbb{G}_m$ (ou si T est quasi-trivial), alors $F = 0$.

Démonstration. On procède en deux étapes :

(A) Montrons d'abord la proposition pour $T = \mathbb{G}_m$ en procédant par double récurrence sur d et r. Pour $d = 0$, la proposition est vraie par le théorème de Hilbert 90 et par dimension cohomologique. Supposons-la donc vraie pour un certain $d \geq 0$, et considérons k un corps $(d+1)$-local.

- Pour $r = 1$, on a bien $H^1(k,\mathbb{G}_m) = 0$ par le théorème de Hilbert 90.
- Pour $r = 2$, si l'on note κ le corps résiduel de k, on a pour chaque $n \geq 1$ la suite exacte (voir le paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser94]) :

$$0 \to H^2(\kappa,\mu_n) \to H^2(k,\mu_n) \to H^1(\kappa,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

  Comme $H^2(\kappa,\mu_n) = {_nH^2}(\kappa,\mathbb{G}_m)$, $H^2(k,\mu_n) = {_nH^2}(k,\mathbb{G}_m)$ et $|H^1(\kappa,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = n^{d+1}$ d'après le lemme 1.8, on obtient que $|_nH^2(k,\mathbb{G}_m)| = n^{d+1}|_nH^2(\kappa,\mathbb{G}_m)| = n^{d+1+\binom{d+1}{2}} = n^{\binom{d+2}{2}}$. On en déduit que $H^2(k,\mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{2}}$ d'après le lemme 1.2.
- Supposons que l'on ait montré que $H^r(k,\mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{r}}$ pour un certain $r \geq 2$. On a alors la suite exacte :

$$0 \to H^{r+1}(\kappa,\mu_n) \to H^{r+1}(k,\mu_n) \to H^r(\kappa,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

  Par hypothèse de récurrence, les groupes $H^r(\kappa,\mathbb{G}_m)$, $H^r(k,\mathbb{G}_m)$ et $H^{r-1}(\kappa,\mathbb{G}_m)$ sont divisibles, et donc on a $H^{r+1}(\kappa,\mu_n) = {_nH^{r+1}}(\kappa,\mathbb{G}_m)$, $H^{r+1}(k,\mu_n) = {_nH^{r+1}}(k,\mathbb{G}_m)$ et $H^r(\kappa,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^r(\kappa,\mu_n) = {_nH^r}(\kappa,\mathbb{G}_m)$. On en déduit, toujours à l'aide de l'hypothèse de récurrence, que $|_nH^{r+1}(k,\mathbb{G}_m)| = n^{\binom{d+1}{r+1}+\binom{d+1}{r}} = n^{\binom{d+2}{r+1}}$, et donc que $H^{r+1}(k,\mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{r+1}}$.

Cela achève la démonstration de la proposition pour $T = \mathbb{G}_m$. Le lemme de Shapiro montre alors que la proposition est vraie pour tout tore quasi-trivial.

(B) On se place maintenant dans le cas général. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F_0 \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F_0 un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Notons ρ_R le rang de R. En passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte :

$$H^r(k, F_0) \to H^r(k, R) \to H^r(k, T)^m \times H^r(k, T_0) \to H^{r+1}(k, F_0).$$

Comme F_0 est fini, on déduit du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nH^r(k,T_0)|}{|H^r(k,T_0)/n|} = \frac{|{}_nH^r(k,R)|}{|H^r(k,R)/n|}.$$

Par conséquent, comme le rang de T_0 est $\rho_R - m\rho$:

$$\left(\frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|}\right)^m = n^{c_{r,d}(-\rho_R+m\rho)} n^{c_{r,d}\cdot\rho_R} = n^{mc_{r,d}\cdot\rho},$$

et on a $\frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|} = n^{c_{r,d}\cdot\rho}$. On en déduit que $H^r(k,T) \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_{r,d}\cdot\rho}$ pour un certain groupe abélien F tel que, pour chaque premier ℓ, la partie ℓ-primaire de F est finie. Soit L une extension finie galoisienne de k déployant T. Alors, comme $H^r(L, \mathbb{G}_m)$ est divisible, un argument de restriction-corestriction montre que tout élément de $[L:k]F$ est divisible. Par conséquent, $[L:k]F = 0$, et F est fini.

□

PROPOSITION 1.12. *Soit T un tore de rang ρ sur k. On a alors pour chaque entier naturel naturel non nul n :*

$$\frac{|{}_nH^1(k, T(k^s)_{tors})|}{|H^1(k, T(k^s)_{tors})/n|} = n^{(d+1)\rho}.$$

Démonstration. Pour $T = \mathbb{G}_m$, on a $H^1(k, \mu_n) = {}_nH^1(k, \mathbb{G}_m(k^s)_{tors})$, et donc $H^1(k, \mathbb{G}_m(k^s)_{tors}) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{d+1}$ d'après le lemme 1.8. La formule est donc vraie pour les tores quasi-triviaux. En procédant comme dans les propositions précédentes, on obtient le résultat désiré. □

1.3.2 CAS OÙ k_1 EST UN CORPS p-ADIQUE

On suppose maintenant que k_0 est un corps fini de caractéristique p (et donc que k_1 est un corps p-adique).

PROPOSITION 1.13. *Soit T un k-tore de rang ρ.*
(i) Pour chaque entier naturel non nul n non multiple de p :

$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}.$$

(ii) Pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, ℓ un nombre premier différent de p et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^t}H^r(k, \varinjlim_s {}_{\ell^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i))|}{|H^r(k, \varinjlim_s {}_{\ell^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i))/\ell^t|} = \begin{cases} \ell^{t\binom{d}{i+1}\rho} & \text{si } r \in \{i+1, i+2\} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Pour $n \geq 1$ non multiple de p et $r \geq 3$, on a :

$$\frac{|{}_nH^2(k,T)|}{|H^2(k,T)/n|} = n^{d\rho}, \qquad \frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|} = 1.$$

La preuve de la proposition précédente est similaire aux preuves du paragraphe 1.3.1, mais elle est plus technique. C'est pourquoi on ne l'inclut pas ici. Le lecteur pourra aller voir la fin de la section 1.3 du chapitre 3 de [Izq16b] pour trouver ladite preuve ainsi que d'autres résultats plus fins.

1.4 Variétés abéliennes

1.4.1 Réduction des variétés abéliennes

Soient l un corps complet de valuation discrète et A une variété abélienne sur l. Notons $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A sur l'anneau de valuation de l et A_0 sa fibre spéciale. Soit A_0^0 la composante connexe du neutre dans A_0. On rappelle que A_0/A_0^0 est un groupe algébrique fini et qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to U \times_l T \to A_0^0 \to B \to 0,$$

où U est un groupe abélien unipotent, T un tore et B une variété abélienne. Dans le cas où l est de caractéristique résiduelle nulle, U est une puissance de $\mathbb{G}_a$.

Définition 1.14. *On dit que A a* très mauvaise réduction *si $T = 0$ et $B = 0$.*

Théorème 1.15. (Théorème de Ogg – Théorème 1 de [Ogg62])
Soient l un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et A une variété abélienne sur $l((t))$. Soient $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 la fibre spéciale de $\mathcal{A}$. Soit A_0^0 la composante connexe du neutre dans A_0. On considère la suite exacte $0 \to U \times_l T \to A_0^0 \to B \to 0$ où U est une puissance de $\mathbb{G}_a$, T est un tore et B une variété abélienne. Soient r la dimension de T, s la dimension de U et $\epsilon = r + 2s$. Alors $H^1(l((t)), A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\dim A - \epsilon}$. En particulier, le groupe $H^1(l((t)), A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\dim A-\epsilon}$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne A a très mauvaise réduction.

Définition 1.16. *On appellera ϵ l'*entier de Ogg *de A.*

1.4.2 Variétés abéliennes sur un corps fini

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p et de cardinal q. Soient ℓ un nombre premier différent de p et i un entier relatif. Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante :

Proposition 1.17. *Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{F}$. On note $A\{\ell\}(i)$ le module galoisien $\varinjlim_r {}_{\ell^r}A(\mathbb{F}^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(i)$. Alors le groupe $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ est fini et $H^1(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i)) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ soit infini. Comme $A(\mathbb{F}^s)_{tors}$ est un groupe de torsion de type cofini, il en est de même de $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$. Cela implique que $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$, et donc que $A(\mathbb{F}^s)$ possède un sous-module galoisien isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-i)$. Par conséquent, le module de Tate $T_\ell A(\mathbb{F}^s)$ contient $\mathbb{Z}_\ell(-i)$ comme module galoisien. Comme le Frobenius géométrique agit sur $\mathbb{Z}_\ell(1)$ par multiplication par q^{-1}, on déduit que le Frobenius géométrique sur $T_\ell A(\mathbb{F}^s) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ possède une valeur propre de module complexe q^i. Mais l'accouplement de Weil fournit un isomorphisme entre les modules galoisiens $T_\ell A(\mathbb{F}^s)$ et $H^1(A^t \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^s, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$, et d'après les conjectures de Weil (théorème IV.1.2 de [FK88]), les valeurs propres du Frobenius géométrique sur $H^1(A^t \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^s, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ sont de module complexe $q^{-1/2}$: absurde ! Donc $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ est fini.
Pour établir la nullité de $H^1(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$, il suffit d'utiliser le théorème de dualité sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s/\mathbb{F}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (exemple I.1.10 de [Mil06]) :

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i)) &\cong \varinjlim_s H^1(\mathbb{F}, {}_{\ell^s}A \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i)) \\ &\cong \varinjlim_s H^0(\mathbb{F}, {}_{\ell^s}A^t \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(-i-1))^D \\ &\cong (\varprojlim_s {}_{\ell^s}H^0(\mathbb{F}, A^t\{\ell\}(-i-1)))^D \end{aligned}$$

et la finitude de $H^0(\mathbb{F}, A^t\{\ell\}(-i-1))$. □

Remarque 1.18. Ce résultat sera notamment utile dans la section 3 afin de déterminer quand il y a un bon théorème de dualité pour les groupes de cohomologie d'une variété abélienne sur un corps de la forme $\mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$.

2. Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t))(u)$

2.1 Étude locale

Le but de cette partie est d'établir un théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$ (théorème 2.3). Il s'agit d'un résultat analogue aux théorèmes de dualité pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p$ et sur $\mathbb{F}_p((t))$. En fait, c'est essentiellement le "dernier" cas de corps local de dimension cohomologique 2 non compris, et il se trouve qu'il pose certaines difficultés supplémentaires

par rapport aux cas déjà connus.
On se place donc dans le cas où $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ (et alors $d = 1$). Soient $\kappa = \mathbb{C}((t_0))$ et A une variété abélienne sur k. Soit A^t sa variété abélienne duale, qui, d'après le théorème de Barsotti-Weil, représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}_k^1(A, \mathbb{G}_m)$ (on rappelle que $\underline{\mathrm{Ext}}_k^r(A, \mathbb{G}_m)$ est le faisceau sur le petit site étale associé à $T \mapsto \mathrm{Ext}^r_{T_{fppf}}(F, G)$). Comme de plus $\underline{\mathrm{Ext}}_k^r(A, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \neq 1$, le faisceau A^t est quasi-isomorphe à $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{G}_m)[1]$. On dispose donc d'un accouplement $A \otimes^{\mathbf{L}} A^t \to \mathbb{G}_m[1]$ dans la catégorie dérivée, d'où un accouplement (voir le paragraphe sur les accouplements dans la catégorie dérivée de la section III.0 de [Mil06]) :

$$H^r(k, A) \times H^{1-r}(k, A^t) \to \mathrm{Br}\, k \cong H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Cet accouplement induit, pour chaque entier naturel n, des morphismes

$$H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D \quad \text{et} \quad {}_nH^r(k, A) \to (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D.$$

Lemme 2.1. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D$ est injectif et ${}_nH^r(k, A) \to (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif.*

Démonstration. L'accouplement de Weil montre que $\underline{\mathrm{Hom}}({}_nA, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = {}_nA^t$. On en déduit que, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r-1}(k, A)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^r(k, {}_nA) \arrow[r] \arrow[d] & {}_nH^r(k, A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D \arrow[r] & H^{2-r}(k, {}_nA^t)^D \arrow[r] & (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale centrale est un isomorphisme. Par conséquent, $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D$ est injectif et ${}_nH^r(k, A) \to (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif. □

Notons $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 sa fibre spéciale. On dispose alors d'une filtration $A_0 \supseteq A_0^0 \supseteq A_0^1$ de A_0, où :
- A_0^0 est la composante connexe de l'élément neutre de A_0,
- $F = A_0/A_0^0$ est un groupe fini,
- A_0^1 est de la forme $U \times T$ où U est un groupe additif (c'est-à-dire une puissance de $\mathbb{G}_a$) et T un tore,
- $B = A_0^0/A_0^1$ est une variété abélienne.

On note ϵ l'entier de Ogg de B.
De même, on note $\mathcal{A}^*$ le modèle de Néron de A^t et A_0^* sa fibre spéciale. On dispose alors d'une filtration $A_0^* \supseteq A_0^{0*} \supseteq A_0^{1*}$ de A_0^*, où :
- A_0^{0*} est la composante connexe de l'élément neutre de A_0^*,
- $F^* = A_0^*/A_0^{0*}$ est un groupe fini,
- A_0^{1*} est de la forme $U^* \times T^*$ où U^* est un groupe additif et T^* un tore,
- $B^* = A_0^{0*}/A_0^{1*}$ est une variété abélienne.

On note ϵ^* l'entier de Ogg de B^*.

REMARQUE 2.2. Ainsi, B, B^* et toutes les variétés indexées par 0 sont définies sur κ.

THÉORÈME 2.3. *On a une suite exacte :*

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D \to 0$$

avec $m(A) = 2 \cdot (\dim B + \dim B^*) - \epsilon - \epsilon^*$.

REMARQUE 2.4. La multiplication par n sur A^t est étale puisque k est de caractéristique 0. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites (au sens du théorème III.9.2 de [Ser92]), le groupe $nA^t(k)$ est ouvert dans $A^t(k)$. De plus, il est d'indice fini puisque la suite de Kummer $0 \to {}_nA^t \to A^t \to A^t \to 0$ montre que c'est un sous-groupe du groupe fini $H^1(k, {}_nA^t)$. On en déduit que $H^0(k,A^t)^\wedge$ coïncide avec le complété profini de $H^0(k,A^t)$.

Démonstration. La surjectivité du morphisme $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ découle immédiatement du lemme précédent par passage à la limite inductive. Nous voulons maintenant calculer son noyau N.
D'après la propriété universelle du modèle de Néron, on a l'égalité $A(k) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_k)$, ainsi qu'une suite exacte :

$$0 \to D \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_k) \to A_0(\kappa) \to 0.$$

La surjectivité du morphisme de réduction $\mathcal{A}(\mathcal{O}_k) \to A_0(\kappa)$ découle du lemme de Hensel puisque $\mathcal{A}$ est lisse. De plus, D est un groupe abélien uniquement divisible (paragraphe 3 de [Lan58]). Le lemme du serpent impose donc que :

$$\frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|} = \frac{|A_0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0(\kappa)|}. \tag{1}$$

Nous allons maintenant dévisser A_0.

- En exploitant la suite exacte $0 \to A_0^0(\kappa) \to A_0(\kappa) \to F(\kappa)$, la finitude de $F(\kappa)$ et le lemme du serpent grâce aux deux parties de la remarque 1.7, on obtient que :
$$\frac{|A_0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0(\kappa)|} = \frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|}. \tag{2}$$
- Comme $H^1(\kappa,U) = 0$ (proposition 1 du paragraphe II.1.1 de [Ser94]) et $H^1(\kappa,T) = 0$ (puisque d'une part $H^1(\kappa,T)$ est d'exposant fini d'après le théorème de Hilbert 90 et d'autre part c'est un groupe divisible car κ est de dimension cohomologique 1), on a une suite exacte :
$$0 \to U(\kappa) \times T(\kappa) \to A_0^0(\kappa) \to B(\kappa) \to 0.$$
Par conséquent :
$$\frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|} = \frac{|B(\kappa)/n|}{|{}_nB(\kappa)|} \cdot \frac{|U(\kappa)/n|}{|{}_nU(\kappa)|} \cdot \frac{|T(\kappa)/n|}{|{}_nT(\kappa)|}. \tag{3}$$
Or :

- si m est la dimension de U, on a :

$$\frac{|U(\kappa)/n|}{|{}_nU(\kappa)|} = \frac{|\kappa^m/n|}{|{}_n\kappa^m|} = 1; \tag{4}$$

- la suite exacte de Kummer $0 \to {}_nT \to T \to T \to 0$ induit une suite exacte :

$$0 \to T(\kappa)/n \to H^1(\kappa, {}_nT) \to {}_nH^1(\kappa, T) \to 0;$$

comme $\chi(\kappa, {}_nT) = 1$ et $H^1(\kappa, T) = 0$, on a donc :

$$1 = \chi(\kappa, {}_nT)^{-1} = \frac{|H^1(\kappa, {}_nT)|}{|{}_nT(\kappa)|} = \frac{|T(\kappa)/n||{}_nH^1(\kappa, T)|}{|{}_nT(\kappa)|} = \frac{|T(\kappa)/n|}{|{}_nT(\kappa)|}; \tag{5}$$

- d'après le théorème de Ogg, on a $H^1(\kappa, B) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\cdot\dim B-\epsilon}$; de plus, la suite exacte de Kummer $0 \to {}_nB \to B \to B \to 0$ induit une suite exacte :

$$0 \to B(\kappa)/n \to H^1(\kappa, {}_nB) \to {}_nH^1(\kappa, B) \to 0;$$

étant donné que $\chi(\kappa, {}_nB) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 = \chi(\kappa, {}_nB)^{-1} = \frac{|H^1(\kappa, {}_nB)|}{|{}_nB(\kappa)|} &= \\ &= \frac{|B(\kappa)/n||{}_nH^1(\kappa, B)|}{|{}_nB(\kappa)|} = \frac{|B(\kappa)/n|}{|{}_nB(\kappa)|} \cdot n^{2\cdot\dim B-\epsilon}. \end{aligned} \tag{6}$$

On déduit alors de (1), (2), (3), (4), (5) et (6) que :

$$\frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|} = \frac{1}{n^{2\cdot\dim B-\epsilon}}. \tag{7}$$

On montre de même que :

$$\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nA^t(k)|} = \frac{1}{n^{2\cdot\dim B^*-\epsilon^*}} \tag{8}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \chi(k, {}_nA) &= \frac{|{}_nA(k)||H^2(k, {}_nA)|}{|H^1(k, {}_nA)|} \\ &= \frac{|{}_nA(k)||H^2(k, {}_nA)|}{|A(k)/n||{}_nH^1(k, A)|} && \text{(d'après la théorie de Kummer)} \\ &\overset{(7)}{=} n^{2\cdot\dim B-\epsilon} \frac{|H^2(k, {}_nA)|}{|{}_nH^1(k, A)|} \\ &= n^{2\cdot\dim B-\epsilon} \frac{|{}_nA^t(k))|}{|{}_nH^1(k, A)|} && \text{(par dualité sur } k\text{)} \\ &\overset{(8)}{=} n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*} \frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nH^1(k, A)|}. \end{aligned}$$

Comme $\chi(k, {}_nA) = 1$ (d'après la proposition 1.5), on en déduit l'égalité :

$$|{}_nH^1(k,A)| = n^{2\cdot(\dim B + \dim B^*) - \epsilon - \epsilon^*}|A^t(k)/n|.$$

Par conséquent, $|{}_nN| = n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}$. Cela étant vrai pour tout n, comme N est de torsion de type cofini, on a $N \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}$, ce qui achève la preuve avec $m(A) = 2\cdot(\dim B + \dim B^*) - \epsilon - \epsilon^*$. $\square$

REMARQUE 2.5. Comme A et A^t sont isogènes (paragraphe 10 de [Mil86]), on a :

$$\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nA^t(k)|} = \frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|}$$

pour tout n. Cela montre que $2\cdot\dim B^* - \epsilon^* = 2\cdot\dim B - \epsilon$, et donc $m(A) = 2(2\cdot\dim B - \epsilon)$

COROLLAIRE 2.6. *(i) Si A a bonne réduction, alors $m(A) = 4\cdot dim\ A - 2\epsilon$. Si de plus B a bonne réduction, alors $m(A) = 4\cdot dim\ A$, et il y a donc une suite exacte de groupes de torsion de type cofini :*

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{4\cdot dim\ A} \to H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D \to 0.$$

(ii) En général, on a un isomorphisme $\overline{H^1(k,A)} \cong \overline{(H^0(k,A^t)^\wedge)^D}$.
(iii) Le morphisme $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ est un isomorphisme si, et seulement si, B a très mauvaise réduction.

Démonstration. (i) Si A a bonne réduction, alors $\dim B = \dim A$. Si de plus B a bonne réduction, alors $\epsilon = 0$. Il suffit donc d'appliquer le théorème et la remarque précédents.
(ii) Notons f le morphisme $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ qui apparaît dans la suite exacte du théorème 2.3. Le morphisme induit $g : \overline{H^1(k,A)} \to \overline{(H^0(k,A^t)^\wedge)^D}$ est surjectif. Montrons qu'il est injectif. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Soit $y \in H^1(k,A)$ un rélèvement de x. Alors $f(y)$ est divisible : pour chaque $n > 0$, il existe $z_n \in (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ tel que $y = nz_n$. Soit $y_n \in H^1(k,A)$ tel que $f(y_n) = z_n$. Alors $y - ny_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Or d'après le théorème 2.3, le groupe $\mathrm{Ker}(f)$ est divisible. Il existe donc $v_n \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $y - ny_n = nv_n$. Cela étant vrai pour tout n, l'élément y de $H^1(k,A)$ est infiniment divisible, et donc $x = 0$. Cela prouve que g est un isomorphisme.
(iii) C'est une conséquence immédiate du théorème 2.3.

$\square$

Dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient d'établir quelques résultats préliminaires :

LEMME 2.7. *Le morphisme naturel $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}) \to H^1(k,A)$ est injectif d'image le sous-groupe $H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ de $H^1(k,A)$.*

Démonstration. Notons g : Spec $k \to$ Spec $\mathcal{O}_k$ et i : Spec $\kappa \to$ Spec $\mathcal{O}_k$. Comme $\mathcal{A} \cong g_* A$ (d'après la propriété universelle du modèle de Néron), il suffit de remarquer que :

$$H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}) \cong H^1(\mathcal{O}_k, g_* A) \cong H^1(\kappa, i^* g_* A) \cong H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$$

où le deuxième isomorphisme découle de la proposition II.1.1 de [Mil06] et le troisième de l'exemple II.8.1.9 de [Tam94]. □

Proposition 2.8. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F|$.*
(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles.
(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D.$$

Démonstration.

(i) Montrons d'abord que $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible. Dans la suite exacte :

$$0 \to U(\kappa^s) \times T(\kappa^s) \to A_0^0(\kappa^s) \to B(\kappa^s) \to 0,$$

le groupes $U(\kappa^s)$, $T(\kappa^s)$ et $B(\kappa^s)$ sont divisibles. On en déduit que $A_0^0(\kappa^s)$ l'est aussi. Ainsi, dans la suite exacte :

$$0 \to A_0^0(\kappa^s) \to A_0(\kappa^s) \to F(\kappa^s) \to 0,$$

le groupe $A_0^0(\kappa^s)$ est divisible et le groupe $F(\kappa^s)$ est ℓ-divisible (puisque ℓ ne divise pas $|F|$). On en déduit que $A_0(\kappa^s)$ est ℓ-divisible. Finalement, on sait que $A(k^{nr}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et qu'il existe un morphisme surjectif $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_0(\kappa^s)$ à noyau divisible. Comme $A_0(\kappa^s)$ est ℓ-divisible, cela prouve que $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible.
D'après le paragraphe IX.11.3 de [SGA7], on a $|F^*| = |F|$. On en déduit que ℓ ne divise pas $|F^*|$ et donc que le groupe $A^t(k^{nr})$ est ℓ-divisible.

(ii) D'après (i), on a une suite exacte :

$$0 \to {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr}) \to 0.$$

Elle induit une suite exacte en cohomologie :

$$0 \to A^t(k)/\ell^r \to H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr})) \to 0.$$

Comme ${}_{\ell^r}H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))$ et $H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))$ sont finis (puisque ce sont des sous-quotients de $H^1(k, {}_{\ell^r}A)$), en passant à la limite projective, on obtient une surjection $\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})) \to T_\ell H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))$. En dualisant et en utilisant le lemme 2.7, cela permet de réaliser $(T_\ell H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr})))^D = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D$ comme un sous-groupe de $(\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$. □

LEMME 2.9. *On obtient un isomorphisme :*

$$\iota_\ell : H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

par composition des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)) && (9)\\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) && (10)\\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) && (11)\\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D. && (12) \end{aligned}$$

Démonstration. Décrivons les quatre isomorphismes précédents.

- L'isomorphisme (9) est évident.
- La suite exacte $0 \to {}_{\ell^r}A \to A \to A \to 0$ induit une suite exacte en cohomologie :
$$0 \to A(k^{nr})/\ell^r \to H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A) \to {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A) \to 0.$$
Le lemme 2.8(i) montre alors que le morphisme $H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A) \to {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)$ est un isomorphisme. Cela fournit l'isomorphisme (10).
- Le groupe $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr})$ est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$. Comme ${}_{\ell^r}A^t \cong \underline{\mathrm{Hom}}({}_{\ell^r}A, \mathbb{G}_m)$, l'exemple I.1.10 de [Mil06] montre alors que l'on a un accouplement parfait de groupes finis :
$${}_{\ell^r}A^t(k^{nr}) \times H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Cet accouplement induit un isomorphisme :
$$H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A) \xrightarrow{\sim} A^t(k^{nr})^D.$$
Cela fournit l'isomorphisme (11).
- Le groupe $\mathrm{Gal}(k^{nr}/k)$ est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$. L'exemple I.1.10 de [Mil06] montre alors que l'on a un accouplement parfait de groupes finis :
$$H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) \times H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Cet accouplement induit un isomorphisme :
$$H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) \xrightarrow{\sim} H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D.$$
En passant à la limite inductive sur r, on obtient l'isomorphisme (12).

□

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 2.10. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F|$. On appelle* ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de A *le groupe :*

$$H^1_{nrs}(k, A, \ell) := (\iota_\ell \circ \mathrm{Res})^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D) \subseteq H^1(k, A)\{\ell\}$$

où $\mathrm{Res} : H^1(k, A) \to H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))$ *désigne la restriction et* ι_ℓ *l'isomorphisme du lemme 2.9.*

Remarque 2.11. Le ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de A est bien défini quel que soit ℓ lorsque F est trivial, c'est-à-dire lorsque A_0 est connexe.

Proposition 2.12. *On a une suite exacte naturelle :*

$$0 \to H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\} \to H^1_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to 0.$$

Démonstration. La suite exacte : $0 \to {}_{\ell^r}A(k^{nr}) \to A(k^{nr}) \to A(k^{nr}) \to 0$ induit une suite exacte en cohomologie :

$$0 \to H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))/\ell^r \to H^2(k^{nr}, {}_{\ell^r}A(k^{nr})) \to {}_{\ell^r}H^2(k^{nr}, A(k^{nr})) \to 0.$$

Comme le groupe $\mathrm{Gal}(k^{nr}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ est de dimension cohomologique 1, le groupe $H^2(k^{nr}, {}_{\ell^r}A(k^{nr}))$. Il en est donc de même de $H^2(k^{nr}/k, A(k^{nr}))\{\ell\} = 0$.
Par ailleurs, comme la dimension cohomologique de k^{nr} est au plus 1, la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^r(k^{nr}/k, H^s(k^{nr}, A)) \Rightarrow H^{r+s}(k, A)$ dégénère en une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr})) \to H^1(k, A) \to& \\ \to H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A)) &\to H^2(k^{nr}/k, A(k^{nr})) \to \dots \end{aligned}$$

On en déduit que la restriction :

$$\mathrm{Res} : H^1(k, A)\{\ell\} \to H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\}$$

est surjective et que son noyau est $H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))\{\ell\} = H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$. Cela prouve que :

$$\mathrm{Ker}(\iota_\ell \circ \mathrm{Res}) = H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$$
$$\mathrm{Im}(\iota_\ell \circ \mathrm{Res}) = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D.$$

□

Remarque 2.13. La suite exacte :

$$0 \to H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\} \to H^1_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to 0$$

s'identifie à la suite exacte de groupes abstraits :

$$0 \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2} \to 0.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$ et $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*)\{\ell\}$ sont isomorphes à $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A^t)/2}$.
On remarque que $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$ est isomorphe à $H^1(\kappa, A_0)\{\ell\}$. Or :
- la suite exacte $0 \to A_0^0 \to A_0 \to F \to 0$ induit un isomorphisme $H^1(\kappa, A_0)\{\ell\} \cong H^1(\kappa, A_0^0)\{\ell\}$ puisque ℓ ne divise pas $|F|$,
- la suite exacte $0 \to U \times T \to A_0^0 \to B \to 0$ induit un isomorphisme $H^1(\kappa, A_0^0)\{\ell\} \cong H^1(\kappa, B)\{\ell\}$ puisque $H^1(\kappa, U \times T) = H^2(\kappa, U \times T) = 0$.

Ainsi $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$ est isomorphe à $H^1(\kappa, B)\{\ell\}$, qui est isomorphe à $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2}$ d'après le théorème de Ogg.
De même, $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*)\{\ell\}$ s'identifie à $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A^t)/2}$. Mais $m(A) = m(A^t)$ d'après la remarque 2.5, et donc $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*)\{\ell\} \cong (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2}$. □

THÉORÈME 2.14. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F|$, la partie ℓ-primaire du noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est $H^1_{nrs}(k, A, \ell)$.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)) & & \\
H^1(k, A)\{\ell\} \arrow[urr, "\mathrm{Res}"] \arrow[ddd, "f_4"'] & & & & \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \arrow[ull, "f_1"', "\cong"] \arrow[ddd, "f_6"', "\cong"] \\
 & & \varinjlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A) \arrow[ull, "f_2"] \arrow[urr, "f_3"] \arrow[d, "f_5"] & & \\
 & & (\varprojlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A^t))^D \arrow[dll, "f_7"] \arrow[drr, "f_8"] & & \\
(H^0(k, A^t)^{(\ell)})^D \arrow[drr, equal] & & & & (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D \arrow[dll, "f_9"] \\
 & & (H^0(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))^{(\ell)})^D & &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme f_6 est obtenu par composition des isomorphismes

$$\varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r (H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

provenant de la dualité pour la cohomologie du groupe profini $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \mathrm{Gal}(k^{nr}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (voir l'exemple I.1.10 de [Mil06]). On vérifie aisément que ce diagramme est commutatif.
Soit maintenant $x \in {}_{\ell^r}H^1(k, A)$. Comme f_2 est surjectif, on peut relever x

en $z \in H^1(k, {}_{\ell^r}A)$. On remarque alors que $f_3(z) = f_1^{-1}(\mathrm{Res}(x))$. Donc, par définition de ι_ℓ :

$$\begin{aligned} f_9(\iota_\ell(\mathrm{Res}(x))) &= f_9(f_6(f_1^{-1}(\mathrm{Res}(x))) = f_9(f_6(f_3(z))) \\ &= f_9(f_8(f_5(z))) = f_7(f_5(z)) = f_4(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $x \in \mathrm{Ker}(f_4)$ si, et seulement si,

$$\iota_\ell(\mathrm{Res}(x)) \in \mathrm{Ker}(f_9) = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D.$$

□

Remarque 2.15. Pour ℓ divisant $|F|$, le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ ne contient pas forcément $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$.
Par exemple, supposons que ℓ divise $|F(\kappa)|$ et que A a très mauvaise réduction. Dans ce cas, d'après le théorème 2.3, le morphisme $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est injectif. Montrons par contre que $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$ est non trivial. On sait que le groupe $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$ est isomorphe à $H^1(\kappa, A_0)\{\ell\}$. De plus, la suite exacte $0 \to A_0^0 \to A_0 \to F \to 0$ induit une suite exacte de cohomologie :

$$H^1(\kappa, A_0) \to H^1(\kappa, F) \to H^2(\kappa, A_0^0).$$

Comme κ est de dimension cohomologique 1, le groupe $H^2(\kappa, A_0^0)$ est trivial et $H^1(\kappa, A_0)$ se surjecte sur $H^1(\kappa, F)$. De plus, d'après la proposition 1.7.7(i) de [NSW08], on a $|H^1(\kappa, F)| = |F(\kappa)|$ et donc ℓ divise $|H^1(\kappa, F)|$. Cela prouve que $H^1(\kappa, A_0)\{\ell\}$ est non trivial. Il en est donc de même de $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$. On en déduit dans ce cas que le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ ne contient pas $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$.
En fait, pour ℓ divisant $|F|$, il semble difficile de caractériser la partie ℓ-primaire du noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$: en particulier, il serait intéressant de déterminer si elle contient forcément $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}_{div}$.

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^1_{nrs}(k, A) := \bigoplus_{\ell \wedge |F| = 1} H^1_{nrs}(k, A, \ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^1_{nrs}(k, A, \ell)$ si ℓ ne divise pas $|F|$, triviale sinon.

2.2 Étude globale

Supposons maintenant que $k = \mathbb{C}((t))$ (et donc que $d = 0$). Soient A une variété abélienne sur $K = k(X)$ et A^t sa variété abélienne duale. Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de dualité à la Cassels-Tate pour A : plus précisément, nous voulons déterminer, sous certaines hypothèses géométriques et modulo divisibles, le dual du groupe de Tate-Shafarevich $Ш^1(A)$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, notons :

- $\mathcal{A}_v$ le modèle de Néron de A sur $\mathcal{O}_v$,
- F_v le groupe algébrique fini des composantes connexes de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$,
- B_v la variété abélienne qui apparaît dans la filtration de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$.

Notons aussi U l'ouvert de bonne réduction de A, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\mathcal{A}^t$ le schéma abélien dual. Fixons maintenant un nombre premier ℓ et faisons l'hypothèse suivante :

(H 2.16)$_\ell$ *pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
- *ℓ ne divise pas $|F_v|$,*
- *B_v a très mauvaise réduction.*

Remarque 2.17. Étant donnée une variété abélienne A, l'hypothèse précédente est vérifiée pour presque tout ℓ. Par conséquent, les résultats que nous allons montrer sont vrais pour presque tout ℓ.

Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que B_v a très mauvaise réduction. Pour chaque ouvert V de U, on introduit les groupes suivants :

$$Ш^1_{nr}(V,A) := \operatorname{Ker}\left(H^1(K,A) \to \prod_{v \in X\setminus V} H^1(K_v,A) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v,A)/H^1_{nr}(K_v,A))\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(V,A^t) := \operatorname{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v \in Z\setminus V} H^1(K_v,A^t) \times \prod_{v \in X\setminus(V\cup Z)} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nr}(K_v,A^t))\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A^t) := \operatorname{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v \in Z} H^1(K_v,A^t) \times \prod_{v \in X^{(1)}\setminus Z} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t)\right).$$

Ici, $H^1_{nr}(K_v,A)$ désigne $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{A}_v) = H^1(K_v^{nr}/K_v, A(K_v^{nr}))$.

Remarque 2.18. • L'intersection $Z \cap U$ n'est pas forcément vide.
- Bien sûr, le groupe $Ш^1_{nrs}(A^t)$ contient :

$$Ш^1(A^t) := \operatorname{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v,A^t)\right).$$

- Pour $v \in Z \cap V$, on a $H^1_{nr}(K_v, A^t) = 0$ et pour $v \in V^{(1)} \setminus Z$, le groupe $H^1_{nr}(K_v, A^t)\{\ell\}$ est contenu dans $H^1_{nrs}(K_v, A^t)\{\ell\}$. On en déduit que :

$$\text{Ш}^1_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \bigcup_{V \subseteq U} \text{Ш}^1_{nrs}(V, A^t)\{\ell\}.$$

Fixons V un ouvert non vide de U. On rappelle que l'on a une suite exacte longue :

$$... \to H^r_c(V, \mathcal{A}) \to H^r(V, \mathcal{A})) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^r(K_v, A) \to ..., \tag{13}$$

appelée suite exacte de localisation. Elle découle de la suite exacte (4.1) de [CTH15] et du lemme 2.7 de [HSz05]. Certains des lemmes qui suivent sont similaires à certains lemmes de la section II.5 de [Mil06].

Lemme 2.19. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini. (ii) Le groupe $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*

Démonstration. (i) On note g le morphisme Spec $K \to V$. Par propriété universelle du modèle de Néron, $\mathcal{A}$ représente le faisceau g_*A sur V. On peut alors écrire la suite spectrale de Leray :

$$H^r(V, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A). \tag{14}$$

En calculant les tiges de $R^s g_* A$ grâce au théorème II.6.4.1 de [Tam94], on prouve aisément que, pour $s > 0$, le faisceau $R^s g_* A$ est de torsion. En particulier, le groupe $H^r(V, R^s g_* A)$ est de torsion pour $r \geq 0$ et $s > 0$. Il en est bien sûr de même de $H^r(K, A)$ pour $r > 0$. On déduit alors de la suite spectrale (14) que le groupe $H^r(V, \mathcal{A}) = H^r(V, R^0 g_* A)$ est bien de torsion. Reste à prouver que ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est fini pour chaque $n \geq 1$. La suite exacte :

$$0 \to {}_n\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \to 0.$$

montre que ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est un quotient de $H^r(V, {}_n\mathcal{A})$. Or ce dernier est fini (proposition 2.1 de [Izq16a]). Donc ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est fini, et $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

(ii) La suite exacte de localisation (13) s'écrit :

$$... \to \bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^1(K_v, A) \to H^2_c(V, \mathcal{A}) \to H^2(V, \mathcal{A}) \to ...$$

Comme le groupe $H^2(V, \mathcal{A})$ et les $H^1(K_v, A)$ sont de torsion de type cofini, on conclut que $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

□

Lemme 2.20. *Il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}) \to 0.$$

Ici, $H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\})$ *et* $H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A})$ *désignent* $\varinjlim_n H^1(V,{}_{\ell^n}\mathcal{A}^t)$ *et* $\varprojlim_n H^2_c(V,{}_{\ell^n}\mathcal{A})$ *respectivement.*

Démonstration. • Pour chaque entier naturel r, en utilisant la suite de Kummer

$$0 \to {}_{\ell^r}\mathcal{A}^t \to \mathcal{A}^t \to \mathcal{A}^t \to 0,$$

on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^0(V,\mathcal{A}^t)/\ell^r \to H^1(V,{}_{\ell^r}\mathcal{A}^t) \to {}_{\ell^r}H^1(V,\mathcal{A}^t) \to 0.$$

En prenant la limite inductive, on obtient la suite exacte :

$$0 \to H^0(V,\mathcal{A}^t)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0.$$

• Toujours grâce à la suite exacte de Kummer, cette fois-ci appliquée à $\mathcal{A}$, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(V,\mathcal{A})/\ell^r \to H^2_c(V,{}_{\ell^r}\mathcal{A}) \to {}_{\ell^r}H^2_c(V,\mathcal{A}) \to 0$$

pour chaque entier naturel r. Le groupe $H^2_c(V,{}_{\ell^r}\mathcal{A})$ étant fini (proposition 2.1 de [Izq16a]), en passant à la limite projective, on obtient une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}) \to 0.$$

□

LEMME 2.21. *Il existe un accouplement canonique :*

$$H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La proposition 2.1 de [Izq16a] fournit pour chaque $r \geq 0$ un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(V,{}_{\ell^r}\mathcal{A}^t) \times H^2_c(V,{}_{\ell^r}\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de passer à la limite pour obtenir un accouplement non dégénéré :

$$H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

REMARQUE 2.22. D'après la proposition 2.1 de [CTH15], le groupe $H^3_c(V,\mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En utilisant la formule de Barsotti-Weil qui identifie $\mathcal{A}^t$ à $\underline{\mathrm{Ext}}^1_V(\mathcal{A},\mathbb{G}_m)$ et en se rappelant que le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{A},\mathbb{G}_m)$ est nul, on obtient un accouplement canonique $\mathcal{A}^t\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A} \to \mathbb{G}_m[1]$, qui induit donc un accouplement :

$$H^1(V,\mathcal{A}^t) \times H^1_c(V,\mathcal{A}) \to H^3_c(V,\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{15}$$

Posons maintenant :

$$D^1(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(H^1_c(V,\mathcal{A}) \to H^1(V,\mathcal{A})),$$

$$D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}\left(H^1(V,\mathcal{A}^t) \to \bigoplus_{v\in Z\setminus V} H^1(K_v,A^t) \oplus \right.$$
$$\left. \oplus \bigoplus_{v \in X\setminus (V\cup Z)} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t))\right).$$

Ce sont bien sûr des groupes de torsion de type cofini (cf lemme 2.19). On remarquera que la suite exacte de localisation (13) montre que l'on a aussi :

$$D^1(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(H^1(V,\mathcal{A}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A)).$$

Lemme 2.23. *(i) La suite suivante est exacte :*

$$0 \to H^1(V,\mathcal{A}) \to H^1(K,A) \to \prod_{v\in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr},A).$$

(ii) L'application naturelle $H^1(V,\mathcal{A}) \to H^1(K,A)$ induit un isomorphisme $D^1(V,\mathcal{A}) \cong Ш^1_{nr}(V,A)$.
(iii) L'application naturelle $H^1(V,\mathcal{A}^t) \to H^1(K,A^t)$ induit un isomorphisme

$$D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t) \cong Ш^1_{nrs}(V,A^t).$$

Démonstration. (i) Soit $g : \mathrm{Spec}\, K \to V$. La suite spectrale de Leray s'écrit :

$$H^r(V,R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K,A).$$

Cela fournit alors une suite exacte courte :

$$0 \to H^1(V,\mathcal{A}) \to H^1(K,A) \to H^0(V,R^1 g_* A).$$

Soit P un ensemble de points géométriques tels que, pour tout $v \in V$, il existe un unique élément de P d'image v. Le faisceau $R^1 g_* A$ s'injecte dans $\prod_{u\in P} u_* u^* R^1 g_* A$, et donc le groupe $H^0(V,R^1 g_* A)$ s'injecte dans $\prod_{u\in P} u_* u^* R^1 g_* A(V) = \prod_{v\in V}(R^1 g_* A)_{\overline{v}} = \prod_{v\in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr},A)$. On obtient par conséquent une suite exacte :

$$0 \to H^1(V,\mathcal{A}) \to H^1(K,A) \to \prod_{v\in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr},A).$$

(ii) Cela découle aisément de (i) et de la suite d'inflation-restriction :

$$0 \to H^1_{nr}(K_v,A) \to H^1(K_v,A) \to H^1(K_v^{nr},A),$$

pour $v \in V^{(1)}$.

(iii) Cela découle aisément des suites exactes :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}^t) \to H^1(K, A^t) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A^t),$$
$$0 \to H^1_{nr}(K_v, A^t) \to H^1(K_v, A^t) \to H^1(K_v^{nr}, A^t).$$

□

Afin d'établir un théorème de dualité pour les groupes de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour les groupes $D^1(U, \mathcal{A})$ et $D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)$:

PROPOSITION 2.24. *Il existe un accouplement canonique :*

$$\overline{D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

LEMME 2.25. *La suite :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A)^{(\ell)} \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to D^1(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. D'après la suite exacte de localisation (suite (13)), nous disposons d'une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A) \to H^1_c(U, \mathcal{A}) \to D^1(U, \mathcal{A}) \to 0,$$

d'où des suites exactes pour tout r :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A)/\ell^r \to H^1_c(U, \mathcal{A})/\ell^r \to D^1(U, \mathcal{A})/\ell^r \to 0.$$

En passant à la limite projective on obtient l'exactitude de :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A)^{(\ell)} \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to D^1(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to 0.$$

□

Démonstration. (De la proposition 2.24)

- D'après le lemme 2.21, nous disposons d'un isomorphisme :
$$f : H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \xrightarrow{\sim} H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A})^D.$$
De plus, l'accouplement (15) de la remarque 2.22 induit pour chaque entier naturel n un accouplement :
$$_{\ell^n}H^1(V, \mathcal{A}^t) \times H^1_c(V, \mathcal{A})/\ell^n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
Par passage à la limite, on obtient donc un accouplement :
$$H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \times H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$
qui induit un morphisme $g : H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to (H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)})^D$. Les morphismes f et g s'insèrent dans un diagramme commutatif à lignes exactes :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[r] \arrow[d, "j"] & H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \arrow[r] \arrow[d, "f", "\cong"'] & H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}))^D \arrow[r] & (H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}))^D \arrow[r] & (H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{16}$$
où j est l'unique morphisme qui fait commuter le diagramme. Cela montre que g est surjectif.

De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme commutatif à lignes exactes :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & W \arrow[d, "h"] \\ 0 \arrow[r] & (D^1(V, \mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v \in X \setminus V} (H^0(K_v, A)^{(\ell)})^D, \end{tikzcd} \tag{17}$$
où :

◦
$$W = \bigoplus_{v \in Z \setminus V} H^1(K_v, A^t)\{\ell\} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{v \in X \setminus (V \cup Z)} H^1(K_v, A^t)\{\ell\} / H^1_{nrs}(K_v, A^t)\{\ell\},$$

◦ h est induit par le morphisme $H^1(K_v, A^t) \to (H^0(K_v, A)^\wedge)^D$ qui a été étudié dans la section 2.1. On sait que c'est un isomorphisme d'après le corollaire 2.6(iii), le théorème 2.14 et l'hypothèse (H 2.16)$_\ell$,

◦ i est l'unique morphisme qui fait commuter le diagramme.

Comme g est surjectif et h est un isomorphisme, i est surjectif. Nous allons à présent calculer Ker(i).

- Pour ce faire, remarquons que le groupe $(T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D$ est divisible (puisque $T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A})$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini sans torsion). Il en est donc de même de $\mathrm{Coker}(j)$. Or en utilisant les diagrammes (16) et (17) et le lemme du serpent, on obtient des isomorphismes :

$$\mathrm{Ker}(i) \cong \mathrm{Ker}(g) \cong \mathrm{Coker}(j).$$

  On en déduit que $\mathrm{Ker}(i)$ est divisible.
  Mais comme $D^1(V,\mathcal{A})$ est de torsion de type cofini, le groupe $D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)}$ est fini. Cela implique que $\mathrm{Ker}(i)$ est forcément le sous-groupe divisible maximal de $D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}$, et on a bien un accouplement non dégénéré :

$$\overline{D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Théorème 2.26. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On rappelle aussi que A est une variété abélienne sur K et que V est un ouvert non vide de X contenu dans l'ouvert de bonne réduction de A. On suppose (H 2.16)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nr}(V,A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, $Ш^1_{nrs}(V,A^t)$ et $Ш^1_{nr}(V,A)$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. La dualité découle immédiatement de la proposition 2.24 et du lemme 2.23. La nature des groupes $Ш^1_{nrs}(V,A^t)$ et $Ш^1_{nr}(V,A)$ vient du lemme 2.23 et du fait que $D^1(V,\mathcal{A})$ et $D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)$ sont de torsion de type cofini. □

Corollaire 2.27. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 2.16)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour $V \subseteq V'$ deux ouverts de U, on remarque que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\}$ et $Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$ sont des sous-groupes du groupe de torsion de type cofini $Ш^1_{nr}(U,A)\{\ell\}$ tels que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} \subseteq Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$. Comme toute suite décroissante de sous-groupes d'un groupe de torsion de type cofini ℓ-primaire est stationnaire (Lemme 3.7 de [HSz16]), on en déduit qu'il existe un ouvert non vide V_0 de U tel que, pour tout ouvert non vide V de V_0, on a $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} = Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\}$. Cela implique que $Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$.
Par ailleurs, on remarque que, pour $V \subseteq V'$ deux ouverts non vides de V_0, on a $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} = Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$, et donc d'après le théorème 2.26, le

morphisme naturel $\overline{Ш^1_{nrs}(V',A^t)}\{\ell\} \to \overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\}$ est un isomorphisme. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V',A^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Ш^1_{nrs}(V',A^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{Ш^1_{nrs}(V',A^t)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\} \arrow[r] & \overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme $Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \bigcup_{V\subseteq V_0} Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}$, en passant à la limite inductive, on obtient que l'injection naturelle $Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)\{\ell\} \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}$ induit un isomorphisme $\overline{Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)}\{\ell\} \xrightarrow{\sim} Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}/D_0$ où $D_0 = \varinjlim_V Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}_{div}$. Une limite inductive de groupes divisibles étant divisible, D_0 est un sous-groupe divisible de $Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}$. De plus, comme le groupe $Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)\{\ell\}$ est de torsion de type cofini, le groupe $\overline{Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)}\{\ell\}$ est fini et donc D_0 est forcément le sous-groupe divisible maximal de $Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}$. Par conséquent, $\overline{Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)}\{\ell\} \xrightarrow{\sim} \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\}$ et, le théorème 2.26 permet de conclure qu'il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :

$$\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

On peut aussi obtenir un énoncé symétrique en A et A^t :

Corollaire 2.28. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 2.16)$_\ell$ et on note $i : Ш^1(A) \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $i^t : Ш^1(A^t) \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A^t)$) l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$Ш^1(A^t)\{\ell\}/(i^t)^{-1}(Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}_{div}) \times Ш^1(A)\{\ell\}/i^{-1}(Ш^1_{nrs}(A)\{\ell\}_{div}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Grâce au corollaire 2.27, il suffit de montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[u, "i^t"] & \times & \overline{Ш^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd} \tag{18}$$

commute. On définit des accouplements CT et CT^t par les diagrammes suivants :

$$\text{CT :}\quad \begin{tikzcd} \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[d, equal] & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{lccccc} & \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & \uparrow{\scriptstyle i^t} & & \| & & \| \\ \mathrm{CT}^t : & \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

Pour établir la commutativité de (18), il suffit de montrer que CT et CT^t coïncident. En procédant comme dans le corollaire 2.27, on choisit un ouvert V de U tel que $D^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$ et $D^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} = Ш^1(A^t)\{\ell\}$. Puis en procédant comme pour la proposition 2.24, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & H^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A)\{\ell\} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & (D^1(V,\mathcal{A}^t)^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A}^t)^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} (H^0(K_v,A^t)^{(\ell)})^D, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "j^t"] & H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A^t)\{\ell\} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} (H^0(K_v,A)^{(\ell)})^D. \end{tikzcd}$$

On vérifie alors aisément que CT est induit par j et que CT^t est induit par j^t. Il suffit donc d'établir le lemme qui suit. □

LEMME 2.29. *Soient $r,s \geq 0$. On a un diagramme commutatif au signe près :*

$$\begin{tikzcd} H^r_c(V,\mathcal{A}) \arrow[d] & \times & H^s(V,\mathcal{A}^t) \arrow[r] & H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t) \arrow[d, equal] \\ H^r(V,\mathcal{A}) & \times & H^s_c(V,\mathcal{A}^t) \arrow[r] \arrow[u] & H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t). \end{tikzcd} \tag{19}$$

Démonstration. On note $j : V \to X$ l'immersion ouverte et on fait les identifications suivantes :

$$H^r_c(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}[r]), \qquad H^s_c(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}^t[s]),$$
$$H^r(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{D(V)}(\mathbb{Z}, \mathcal{A}[r]), \qquad H^s(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(V)}(\mathbb{Z}, \mathcal{A}^t[s]),$$
$$H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!(\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t)[r+s]),$$

où $D(U)$ et $D(X)$ désignent les catégories dérivées de faisceaux étales sur U et sur X respectivement. La commutativité de (19) revient alors à montrer que, si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}[r])$ et $\beta \in \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}^t[s])$, alors le diagramme suivant commute dans $D(X)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & j_!\mathcal{A}[r] \arrow[r, "\cong"] & (j_!\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathbb{Z})[r] \arrow[d, "j_!j^*\beta"] \\ j_!\mathcal{A}^t[s] \arrow[r, "\cong"] & (j_!\mathcal{A}^t\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathbb{Z})[s] \arrow[r, "j_!j^*\alpha"] & (j_!\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathcal{A}^t)[r+s]. \end{tikzcd}$$

Mais cette commutativité est évidente, ce qui achève la preuve. □

Exemple 2.30. • Les variétés abéliennes ayant bonne réduction partout vérifient les hypothèses des corollaires précédents. C'est par exemple le cas des variétés abéliennes définies sur k.

• Supposons que $X = \mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire que $K = \mathbb{C}((t))(u)$. La courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + u$ vérifie les hypothèses des corollaires.

3. Dualité locale sur $\mathbb{Q}_p((t))$

Le but de cette partie est d'établir un théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur un corps 2-local à corps résiduel p-adique. On fixe donc un nombre premier p ainsi qu'un corps p-adique k_1 de corps résiduel k_0 et on pose $k = k_1((t))$.
Soit A une variété abélienne sur k. Posons ${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ pour chaque entier naturel n non nul et notons $\tilde{A} = \varinjlim_n {}_{(n)}\tilde{A}$.

Remarque 3.1. En tenant compte de la formule de Barsotti-Weil, il serait plus naturel de considérer $\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ au lieu de $\tilde{A}$. Il se trouve en fait que ces deux faisceaux coïncident (voir l'annexe du chapitre 3 de [Izq16b]).

Comme la multiplication par n sur A est surjective, la multiplication par n sur le faisceau de n-torsion $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ est injective, et donc $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ est nul. Cela fournit un morphisme naturel dans la catégorie dérivée ${}_{(n)}\tilde{A} \to \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))[1]$, d'où un morphisme :

$$A \otimes^{\mathbf{L}} {}_{(n)}\tilde{A} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)[1].$$

Ce morphisme induit alors un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{2-r}(k, {}_{(n)}\tilde{A}) \to H^3(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

où l'isomorphisme $H^3(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vient du théorème I.2.17 de [Mil06].
En passant à la limite inductive sur n, on obtient un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{2-r}(k, \tilde{A}) \to H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{20}$$

Nous voulons déterminer sous quelles conditions cet accouplement induit un isomorphisme $H^r(k, A) \cong H^{2-r}(k, \tilde{A})^D$.

3.1 Dualité modulo divisibles

Lemme 3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. On a l'égalité :*

$${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = {}_nA^t \otimes \mu_n$$

et la multiplication par n sur $\tilde{A}$ induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to {}_{(n)}\tilde{A} \to \tilde{A} \xrightarrow{\cdot n} \tilde{A} \to 0.$$

Démonstration. La suite exacte courte $0 \to {}_nA \to A \xrightarrow{\cdot n} A \to 0$ induit une suite exacte :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) \to {}_{(n)}\tilde{A} \xrightarrow{\cdot n} {}_{(n)}\tilde{A}.$$

Comme $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = 0$ et ${}_nA^t = \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mu_n)$, on en déduit que :

$${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = {}_nA^t \otimes \mu_n.$$

Cela impose aussi que $\tilde{A} = \varinjlim_n {}_nA^t \otimes \mu_n$. Comme $A^t(k^s)_{tors}$ est divisible, cela montre immédiatement que la multiplication par n sur $\tilde{A}$ induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to {}_{(n)}\tilde{A} \to \tilde{A} \xrightarrow{\cdot n} \tilde{A} \to 0.$$

□

Cela montre que ${}_{(n)}\tilde{A}$ est la n-torsion de $\tilde{A}$. On notera donc par la suite ${}_n\tilde{A}$ au lieu de ${}_{(n)}\tilde{A}$.

Remarquons maintenant que l'accouplement (20) induit pour chaque n des morphismes :

$$H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{3-r}(k, \tilde{A}))^D \quad \text{et} \quad {}_nH^r(k, A) \to (H^{2-r}(k, \tilde{A})/n)^D.$$

Corollaire 3.3. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{3-r}(k, \tilde{A}))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k, A) \to (H^{2-r}(k, \tilde{A})/n)^D$ est surjectif.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r-1}(k, A)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^r(k, {}_nA) \arrow[r] \arrow[d] & {}_nH^r(k, A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{3-r}(k, \tilde{A}))^D \arrow[r] & H^{3-r}(k, {}_n\tilde{A})^D \arrow[r] & (H^{2-r}(k, \tilde{A})/n)^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le lemme précédent et le théorème I.2.17 de [Mil06]. On en déduit que le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{3-r}(k, \tilde{A}))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k, A) \to (H^{2-r}(k, \tilde{A})/n)^D$ est surjectif. □

En passant à la limite inductive, on obtient un morphisme surjectif :

$$H^r(k, A) \to (H^{2-r}(k, \tilde{A})^\wedge)^D.$$

Proposition 3.4. *Pour $r \geq 0$, il existe des familles d'entiers $(\beta_{r,\ell})_\ell$ et $(\beta^*_{r,\ell})_\ell$ indexées par les nombres premiers telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\frac{|{}_nH^r(k, A)|}{|H^r(k, A)/n|} = \prod_\ell \ell^{\beta_{r,\ell} v_\ell(n)}, \tag{21}$$

$$\frac{|{}_nH^r(k, \tilde{A})|}{|H^r(k, \tilde{A})/n|} = \prod_\ell \ell^{\beta^*_{r,\ell} v_\ell(n)}. \tag{22}$$

Démonstration. Pour $r \geq 1$, la proposition est évidente, puisque les groupes $H^r(k,A)$ et $H^r(k,\tilde{A})$ sont de torsion de type cofini. Le cas $r=0$ découle alors des formules suivantes (proposition 1.5) :

$$1 = \chi(k, {}_nA) \overset{(\star)}{=} \prod_{r=0}^{3} \left(\frac{|{}_nH^r(k,A)|}{|H^r(k,A)/n|} \right)^{(-1)^r},$$

$$1 = \chi(k, {}_n\tilde{A}) \overset{(\star)}{=} \prod_{r=0}^{3} \left(\frac{|{}_nH^r(k,\tilde{A})|}{|H^r(k,\tilde{A})/n|} \right)^{(-1)^r}.$$

Les égalités marquées avec une étoile découlent des suites exactes de Kummer :

$$0 \to H^{r-1}(k,A)/n \to H^r(k, {}_nA) \to {}_nH^r(k,A) \to 0; \tag{23}$$

$$0 \to H^{r-1}(k,\tilde{A})/n \to H^r(k, {}_n\tilde{A}) \to {}_nH^r(k,\tilde{A}) \to 0. \tag{24}$$

□

THÉORÈME 3.5. *Pour $r \geq 1$, le noyau du morphisme $H^r(k,A) \to (H^{2-r}(k,\tilde{A})^\wedge)^D$ est un groupe de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. Soit $s \in \{-1,0,1,2,3\}$. On calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de ${}_nA$ pour chaque n :

$$1 = \chi(k, {}_nA) \tag{25}$$

$$= \prod_{r=0}^{s-1} \left(\frac{|{}_nH^r(k,A)|}{|H^r(k,A)/n|} \right)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=s+1}^{3} |H^r(k, {}_nA)|^{(-1)^r} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \tag{26}$$

$$= \prod_{r=0}^{s-1} \left(\frac{|{}_nH^r(k,A)|}{|H^r(k,A)/n|} \right)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{2-s} |H^r(k, {}_n\tilde{A})|^{(-1)^{1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \tag{27}$$

$$= \prod_{r=0}^{s-1} \left(\frac{|{}_nH^r(k,A)|}{|H^r(k,A)/n|} \right)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{2-s} \left(\frac{|{}_nH^r(k,\tilde{A})|}{|H^r(k,\tilde{A})/n|} \right)^{(-1)^{1-r}} \cdot \left(\frac{|{}_nH^s(k,A)|}{|H^{2-s}(k,\tilde{A})/n|} \right)^{(-1)^s} \tag{28}$$

$$= |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{2-s}(k,\tilde{A})/n|^{(-1)^{s+1}} \cdot \prod_{\ell} \ell^{(-1)^{s+1}\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)}, \tag{29}$$

où $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^{r+s+1} \beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{2-s} (-1)^{s-r} \beta^*_{r,\ell}$. En effet :

- la ligne (25) vient de la proposition 1.5 ;
- la ligne (26) et (28) viennent des suites exactes de Kummer (23) et (24) ;
- la ligne (27) vient de la dualité sur k, qui donne un isomorphisme $H^r(k, {}_nA) \cong H^{3-r}(k_n, \tilde{A})^D$ d'après le théorème I.2.17 de [Mil06] ;
- la ligne (29) vient des équations (21) et (22).

Par conséquent, si $s \geq 1$ et si N_s désigne le noyau de $H^s(k,A) \to (H^{2-s}(k,\tilde{A})^\wedge)^D$, on obtient :

$$|{}_nN_s| = \frac{|{}_nH^s(k,A)|}{|H^{2-s}(k,\tilde{A})/n|} = \prod_{\ell} \ell^{\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)}.$$

D'après le lemme 1.2, cela prouve que N_s est divisible. □

En reprenant les notations de la preuve précédente, on a alors :

$$N_s \cong \bigoplus_{\ell} (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\gamma_{s,\ell}},$$

et nous voulons calculer les $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^*_{r,\ell}$. Avant de passer à la suite, il est utile d'établir des équations reliant les différentes variables que nous avons introduites $(\beta_{r,\ell}, \beta^*_{r,\ell}, \gamma_{r,\ell})$.

PROPOSITION 3.6. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\gamma_{r,\ell})_r$, $(\beta_{r,\ell})_r$ et $(\beta^*_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\begin{cases} \gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell} \quad \forall r \in \{-1, 1, 2, 3\} \\ \sum_{r=0}^{3}(-1)^r \beta_{r,\ell} = 0 \\ \beta_{r,\ell} = \beta^*_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq 4 \end{cases}$$

Démonstration. On a vu dans la démonstration du théorème 3.5 que pour chaque $r \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$:

$$1 = |{}_n H^r(k, A)|^{(-1)^r} |H^{2-r}(k, \tilde{A})/n|^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_{\ell} \ell^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell} v_\ell(n)} \tag{30}$$

$$\overset{(21)}{=} |H^r(k, A)/n|^{(-1)^r} |H^{2-r}(k, \tilde{A})/n|^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_{\ell} \ell^{(-1)^{r+1}(\gamma_{r,\ell} - \beta_{r,\ell}) v_q(n)} \tag{31}$$

avec $\gamma_{r,\ell} = \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{s,\ell} + \sum_{s=0}^{2-r}(-1)^{d+r-s}\beta^*_{s,\ell}$. Or, pour $r \in \{-1, 1, 2, 3\}$ (resp. $t \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$), le groupe $H^r(k, A)$ (resp. $H^{2-t}(k, \tilde{A})$) est de torsion de type cofini et la fonction :

$$n \mapsto |H^r(k, A)/n| \qquad (\text{resp.} \quad n \mapsto |H^{2-t}(k, \tilde{A})/n|)$$

est bornée. L'équation (31) montre alors que $\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}$ pour $r \in \{-1, 1, 2, 3\}$. De plus, la relation $\gamma_{3,\ell} = \beta_{3,\ell}$ implique l'égalité $\sum_{r=0}^{3}(-1)^r \beta_{r,p} = 0$ puisque $\gamma_{3,\ell} = \sum_{r=0}^{2}(-1)^r \beta_{r,\ell}$. □

Nous voulons donc maintenant calculer les $\beta_{r,\ell}$ pour $r \neq 0$, et en particulier, déterminer quand ils sont nuls.

3.2 ÉTUDE HORS DE p

On fixe à présent un nombre premier ℓ différent de p. On introduit les notations suivantes :
- $\mathcal{A}_2$ désigne le modèle de Néron de A ;
- A_1 désigne la fibre spéciale de $\mathcal{A}_2$ sur k_1 ;
- A_1^0 désigne la composante connexe du neutre dans A_1 ;
- F_1 (resp. U_1, T_1, B_1) est le groupe fini (resp. le groupe additif, le tore, la variété abélienne) apparaissant dans la filtration de A_1 ;
- $\mathcal{A}_1$ le modèle de Néron de B_1 ;

- A_0 la fibre spéciale de $\mathcal{A}_1$ sur k_0 ;
- F_0 (resp. U_0, T_0, B_0) est le groupe fini (resp. le groupe unipotent abélien, le tore, la variété abélienne) apparaissant dans la filtration de A_0 ;
- ρ_1 (resp. ρ_0) désigne le rang du tore T_1 (resp. T_0).

Par ailleurs, si M est un module galoisien sur un corps l, q un nombre premier différent de la caractéristique de l et i un entier, on notera $M\{q\}(i) = \varinjlim_r {}_{q^r}M \otimes \mathbb{Z}/q^r\mathbb{Z}(i)$. En tant que groupe abélien, il est isomorphe à $M\{q\}$. Par abus de notation, quand G est un groupe algébrique abélien sur l, on écrira $G\{q\}(i)$ au lieu de $G(l^s)\{q\}(i)$.

3.2.1 Étude de $\beta_{0,\ell}$

Proposition 3.7. *On a l'égalité $\beta_{0,\ell} = -\rho_1$.*

Démonstration. Étant donné que $A(k) = \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_k)$ et que le noyau du morphisme surjectif $\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_k) \to A_1(k_1)$ est uniquement divisible, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^r}A(k)|}{|A(k)/\ell^r|} = \frac{|{}_{\ell^r}A_1(k_1)|}{|A_1(k_1)/\ell^r|}. \tag{32}$$

De plus, on a des suites exactes :

$$0 \to A_1^0 \to A_1 \to F_1 \to 0,$$
$$0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0,$$

d'où des suites exactes de cohomologie :

$$0 \to A_1^0(k_1) \to A_1(k_1) \to F_1(k_1), \tag{33}$$

$$0 \to U_1(k_1) \times T_1(k_1) \to A_1^0(k_1) \to B_1(k_1) \to H^1(k_1, U_1) \times H^1(k_1, T_1). \tag{34}$$

Or :
- $F_1(k_1)$ est fini,
- $H^1(k_1, U_1)$ est nul,
- $H^1(k_1, T_1)$ est simultanément de torsion de type cofini et d'exposant fini : il est donc fini.

En exploitant les suites (33) et (33), on obtient alors, pour $r \geq 0$:

$$\frac{|{}_{\ell^r}A_1(k_1)|}{|A_1(k_1)/\ell^r|} = \frac{|{}_{\ell^r}A_1^0(k_1)|}{|A_1^0(k_1)/\ell^r|} = \frac{|{}_{\ell^r}T_1(k_1)|}{|T_1(k_1)/\ell^r|}\frac{|{}_{\ell^r}B_1(k_1)|}{|B_1(k_1)/\ell^r|}. \tag{35}$$

D'après la proposition 1.13, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^r}T_1(k_1)|}{|T_1(k_1)/\ell^r|} = \ell^{-r\rho_1}. \tag{36}$$

De plus, d'après le théorème de Mattuck ([Mat55], lemme I.3.3 de [Mil06]), $B_1(k_1)$ possède un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathcal{O}_{k_1}^{\dim B_1}$. On en déduit que :

$$\frac{|{}_{\ell^r}B_1(k_1)|}{|B_1(k_1)/\ell^r|} = 1. \tag{37}$$

Par conséquent, en expoitant (32), (35), (36) et (37) :

$$\frac{|_{\ell^r}A(k)|}{|A(k)/\ell^r|} = \ell^{-r\rho_1}.$$

□

COROLLAIRE 3.8. *La quantité ρ_1 est invariante par isogénie. En particulier, cela peut être appliqué aux variétés abéliennes A et A^t, qui sont isogènes.*

3.2.2 CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA NULLITÉ DES $\beta_{r,\ell}$

Dans ce paragraphe technique, nous cherchons à prouver la nullité de $\beta_{1,\ell}$, $\beta_{2,\ell}$ et $\beta_{3,\ell}$ sous certaines hypothèses géométriques portant sur les tores T_i (théorème 3.15). Nous commençons par quelques lemmes.

LEMME 3.9.
(i) Les parties divisibles des groupes $(\varprojlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)))^D$ et de $H^{2-r}(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(i))$ sont (non canoniquement) isomorphes.
(ii) Les parties divisibles des groupes $(\varprojlim_s H^{1-r}(k_0, {}_{\ell^s}B_1(k_1^{nr})(i)))^D$ et de $H^r(k_0, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i))$ sont (non canoniquement) isomorphes.

Démonstration.
(i) Pour chaque entier naturel s, on a une suite exacte :

$$0 \to {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i) \to A^t(k^{nr})\{\ell\}(i) \to A^t(k^{nr})\{\ell\}(i) \to A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)/\ell^s \to 0.$$

En notant Q_{ℓ^s} le groupe $\ell^s A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)$, on obtient des suites exactes :

$$0 \to {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i) \to A^t(k^{nr})\{\ell\}(i) \to Q_{\ell^s} \to 0, \quad (38)$$
$$0 \to Q_{\ell^s} \to A^t(k^{nr})\{\ell\}(i) \to A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)/\ell^s \to 0. \quad (39)$$

On a alors un diagramme commutatif à colonne exacte dont les flèches diagonales sont la multiplication par ℓ^s :

$$\begin{tikzcd}
H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)) \arrow[d] \arrow[dr, "\cdot\ell^s"] & \\
H^{1-r}(k_1, Q_{\ell^s}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)) \\
H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \arrow[d] & \\
H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)) \arrow[d] \arrow[dr, "\cdot\ell^s"] & \\
H^{2-r}(k_1, Q_{\ell^s}) \arrow[r] & H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)).
\end{tikzcd} \tag{40}$$

Comme $A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)$ est un groupe de torsion de type cofini, quand on fait varier s, le module galoisien $A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)/\ell^s$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs à isomorphisme près. En particulier, il existe une constante entière $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$|H^t(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)/\ell^s)| < C_\ell.$$

La suite exacte (39) montre alors que pour tout $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Ker}(H^{1-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| &< C_\ell, \\
|\mathrm{Coker}(H^{1-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| &< C_\ell, \\
|\mathrm{Ker}(H^{2-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| &< C_\ell, \\
|\mathrm{Coker}(H^{2-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| &< C_\ell.
\end{aligned}$$

Le diagramme (40) permet alors de conclure que :

- le sous-groupe $C_\ell!{}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ de ${}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ est contenu dans l'image du morphisme $H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$, et donc :

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Coker}(H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| \\
&\qquad\qquad \leq |{}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))/C_\ell!|;
\end{aligned} \tag{41}$$

- tout élément du noyau du morphisme

$$H^{1-r}(k_1, Q_{\ell^s})/H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)) \to H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))/\ell^s$$

est dans la classe d'équivalence d'un élément du noyau de :

$$H^{1-r}(k_1, Q_{\ell^s}) \to H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)),$$

et donc :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Ker}(H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| \\ \leq C_\ell |H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))/\ell^s|,\end{aligned} \tag{42}$$

Comme les groupes $H^{1-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ et $H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ sont de torsion de type cofini, les relations (41) et (42) montrent qu'il existe une contante D_ℓ telle que, pour tout $s \geq 0$:

$$|\mathrm{Coker}(H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| \leq D_\ell, \tag{43}$$

$$|\mathrm{Ker}(H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i)))| \leq D_\ell. \tag{44}$$

On en déduit que les groupes :

$$\mathrm{Ker}(\varprojlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to \varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))), \tag{45}$$

$$\mathrm{Coker}(\varprojlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)) \to \varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))), \tag{46}$$

sont finis. Comme $H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ est de torsion de type cofini, cela montre que les parties divisibles des groupes $(\varprojlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(i)))^D$ et de $H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ sont isomorphes. Comme A et A^t sont isogènes, les parties divisibles de $H^{2-r}(k_1, A^t(k^{nr})\{\ell\}(i))$ et de $H^{2-r}(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(i))$ sont isomorphes, ce qui achève la preuve.

(ii) La preuve est analogue.

□

LEMME 3.10. *(i) Pour chaque entier naturel r et chaque entier i, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_1, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ et $H^{2-r}(k_1, A_1^0\{\ell\}(1-i))$ sont (non canoniquement) isomorphes.*

(ii) Pour chaque entier naturel r et chaque entier i, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i)))$ et $H^{1-r}(k_0, A_0^0\{\ell\}(-i))$ sont (non canoniquement) isomorphes.

Démonstration. (i) Soit $r \geq 0$. Par dualité sur $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (exemple I.1.10 de [Mil06]), on a un isomorphisme :

$$H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)) \cong (\varprojlim_s {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i))^D. \tag{47}$$

Par dualité sur le corps p-adique k_1, on a aussi un isomorphisme :

$$\varinjlim_s H^r(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i)^D) \cong \varinjlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(1-i))^D. \tag{48}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} H^r(k_1, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) &\overset{(47)}{\cong} H^r(k_1, (\varprojlim_s {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i))^D) \\ &\cong \varinjlim_s H^r(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i)^D) \\ &\overset{(48)}{\cong} \varinjlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(1-i))^D \\ &\cong (\varprojlim_s H^{2-r}(k_1, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(1-i)))^D. \end{aligned} \tag{49}$$

De plus, on sait que :

$$A(k^{nr})\{\ell\} \cong \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{k^{nr}})\{\ell\} \cong A_1\{\ell\}, \tag{50}$$

puisque $A(k^{nr}) = \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et le morphisme de réduction $\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_1(k_1^s)$ est surjectif à noyau uniquement divisible. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.9 et les isomorphismes (49) et (50), on montre que :

$$\begin{aligned} H^r(k_1, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}(i)))_{\text{div}} &\cong H^{2-r}(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(1-i))_{\text{div}} \\ &\cong H^{2-r}(k_1, A_1\{\ell\}(1-i))_{\text{div}} \end{aligned} \tag{51}$$

On remarque maintenant que l'on a la suite exacte :

$$0 \to A_1^0(k_1^s) \to A_1(k_1^s) \to F_1(k_1^s) \to 0.$$

Il existe donc un $\mathrm{Gal}(k_1^s/k_1)$-module fini F tel que la suite suivante est exacte :

$$0 \to A_1^0\{\ell\}(1-i) \to A_1\{\ell\}(1-i) \to F\{\ell\}(1-i) \to 0.$$

En passant à la cohomologie, on en déduit que :

$$H^{2-r}(k_1, A_1\{\ell\}(1-i))_{\text{div}} \cong H^{2-r}(k_1, A_1^0\{\ell\}(1-i))_{\text{div}} \tag{52}$$

Les isomorphismes (51) et (52) permettent de conclure.

(ii) La preuve est analogue.

□

Lemme 3.11. *(i) Pour chaque entier naturel r et chaque entier i, on a un isomorphisme $H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_1, A_1\{\ell\}(i))$. De plus, les parties divisibles de $H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(i))$ et de $H^r(k_1, A_1^0\{\ell\}(i))$ sont isomorphes.*

(ii) Pour chaque entier naturel r et chaque entier i, on dispose d'un isomorphisme $H^r(k_1, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_0, A_0\{\ell\}(i))$. De plus, les parties divisibles de $H^r(k_1, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i))$ et de $H^r(k_0, A_0^0\{\ell\}(i))$. sont isomorphes.

Démonstration. (i) L'isomorphisme (50) montre que :

$$H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_1, A_1\{\ell\}(i)).$$

De plus, on dispose de la suite exacte :

$$0 \to A_1^0 \to A_1 \to F_1 \to 0,$$

et donc de la suite exacte :

$$0 \to A_1^0(k_1^s)\{\ell\}(i) \to A_1(k_1^s)\{\ell\}(i) \to F_1(k_1^s)\{\ell\}(i) \to 0.$$

Comme $H^{r-1}(k_1, F_1(k_1^s)\{\ell\}(i))$ et $H^r(k_1, F_1(k_1^s)\{\ell\}(i))$ sont finis, on en déduit que les parties divisibles de $H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}(i))$ et de $H^r(k_1, A_1^0\{\ell\}(i))$ sont isomorphes.

(ii) La preuve est analogue.

□

LEMME 3.12. *Soient $r \in \{0,1,2\}$ et i un entier tels que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :*
(1) $r = 2$ et $i = 0$;
(2) $\rho_0 = 0$;
(3) $r = 0$ et $i \neq -1$.
Alors $H^r(k_1, B_1\{\ell\}(i))$ est fini.

Démonstration. La suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^s(k_0, H^t(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i))) \Rightarrow H^{s+t}(k_1, B_1\{\ell\}(i))$$

dégénère en une suite exacte longue :

$$\begin{aligned}\cdots \to H^r(k_0, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i))) \to H^r(k_1, B_1\{\ell\}(i)) \to \\ \to H^{r-1}(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i))) \to \cdots \quad (53)\end{aligned}$$

puisque k_1^{nr} est de dimension cohomologique 1. Montrons que les termes $H^r(k_0, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i)))$ et $H^{r-1}(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i)))$ sont finis.

- La suite exacte $0 \to U_0 \times T_0 \to A_0^0 \to B_0 \to 0$ induit une suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to T_0\{\ell\}(i) \to A_0^0\{\ell\}(i) \to B_0\{\ell\}(i) \to 0$$

et donc une suite exacte de cohomologie :

$$H^r(k_0, T_0\{\ell\}(i)) \to H^r(k_0, A_0^0\{\ell\}(i)) \to H^r(k_0, B_0\{\ell\}(i)). \quad (54)$$

Or la proposition 1.13 et les hypothèses (1), (2) et (3) imposent que :

$$\frac{|{}_nH^r(k_0, T_0\{\ell\}(i))|}{|H^r(k_0, T_0\{\ell\}(i))/n|} = 1.$$

Comme $H^r(k_0, B_0\{\ell\}(i))$ est fini d'après la proposition 1.17, on déduit de la suite (54) que $H^r(k_0, A_0^0\{\ell\}(i))$ est fini. Les parties divisibles des de groupes de torsion de type cofini $H^r(k_0, A_0^0\{\ell\}(i))$ et $H^r(k_0, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i)))$ étant isomorphes d'après le lemme 3.11, cela prouve que $H^r(k_0, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i)))$ est fini.

- On montre de la même manière que la suite (54) que l'on a une suite exacte :

$$H^{2-r}(k_0, T_0\{\ell\}(-i)) \to H^{2-r}(k_0, A_0^0\{\ell\}(-i)) \to H^{2-r}(k_0, B_0\{\ell\}(-i)). \tag{55}$$

Or la proposition 1.13 et les hypothèses (1), (2) et (3) imposent que

$$\frac{|_n H^{2-r}(k_0, T_0\{\ell\}(-i)))|}{|H^{2-r}(k_0, T_0\{\ell\}(-i)))/n|} = 1.$$

Comme $H^{2-r}(k_0, B_0\{\ell\}(-i))$ est fini d'après la proposition 1.17, on déduit de la suite (55) que $H^{2-r}(k_0, A_0^0\{\ell\}(-i))$ est fini. Les parties divisibles des de groupes de torsion de type cofini $H^{2-r}(k_0, A_0^0\{\ell\}(-i))$ et $H^{r-1}(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i)))$ étant isomorphes d'après le lemme 3.10, cela prouve que $H^{r-1}(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i)))$ est fini.

Comme $H^r(k_0, B_1(k_1^{nr})\{\ell\}(i)))$ et $H^{r-1}(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(i)))$ sont finis, la suite exacte (53) montre que $H^r(k_1, B_1\{\ell\}(i))$ est fini. □

On est maintenant en mesure d'établir la proposition qui fournit des conditions suffisantes pour que les groupes de cohomologie de $A\{\ell\}(i)$ soient finis.

PROPOSITION 3.13. *Soient $r \in \{2,3\}$ tel que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :*
(1) $r = 3$;
(2) $r = 2$ et $\rho_0 = \rho_1 = 0$.
Alors $H^r(k, A\{\ell\})$ est fini.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 3.12. La suite spectrale

$$H^s(k_1, H^t(k^{nr}, A\{\ell\})) \Rightarrow H^{s+t}(k, A\{\ell\})$$

dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\})) \to H^r(k, A\{\ell\}) \to H^{r-1}(k_1, H^1(k^{nr}, A\{\ell\})) \to .... \tag{56}$$

Montrons que les termes $H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}))$ et $H^{r-1}(k_1, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}))$ sont finis.

- La suite exacte $0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0$ induit une suite exacte de cohomologie :

$$H^r(k_1, T_1\{\ell\}) \to H^r(k_1, A_0^1\{\ell\}) \to H^r(k_1, B_1\{\ell\}). \tag{57}$$

Or la proposition 1.13 et les hypothèses (1) et (2) imposent que :

$$\frac{|_n H^r(k_1, T_1\{\ell\})|}{|H^r(k_1, T_1\{\ell\})/n|} = 1.$$

Comme $H^r(k_1, B_1\{\ell\})$ est fini d'après le lemme 3.12, on déduit de la suite (57) que $H^r(k_1, A_0^1\{\ell\})$ est fini. La partie divisible de $H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}))$ étant isomorphe à celle de $H^r(k_1, A_1^0\{\ell\})$ d'après le lemme 3.11, cela prouve que $H^r(k_1, A(k^{nr})\{\ell\}))$ est fini

- La suite exacte $0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0$ induit une suite exacte de cohomologie :

$$H^{3-r}(k_1, T_1\{\ell\}(1)) \to H^{3-r}(k_1, A_1^0\{\ell\}(1)) \to H^{3-r}(k_1, B_1\{\ell\}(1)). \tag{58}$$

Or la proposition 1.13 et les hypothèses (1) et (2) imposent que

$$\frac{|{}_nH^{3-r}(k_1, T_1\{\ell\}(1))|}{|H^{3-r}(k_1, T_1\{\ell\}(1))/n|} = 1.$$

Comme $H^{3-r}(k_1, B_1\{\ell\}(1))$ est fini d'après le lemme 3.12, on déduit de la suite (58) que $H^{3-r}(k_1, A_1^0\{\ell\}(1))$ est fini. La partie divisible de $H^{r-1}(k_1, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}))$ étant isomorphe à celle de $H^{3-r}(k_1, A_1^0\{\ell\}(1))$, le groupe $H^{r-1}(k_1, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}))$ est bien fini.

On déduit alors de la suite (56) que $H^r(k, A\{\ell\}(i))$ est fini. □

Remarque 3.14. De manière tout à fait analogue, on peut montrer que, si $\rho_0 = 0$, alors $H^1(k, A)\{\ell\}$ est fini.

Nous pouvons à présent établir le théorème suivant qui montre la nullité des $\beta_{r,\ell}$ sous certaines hypothèses.

Théorème 3.15. *Soit $\ell \neq p$ un nombre premier.*
(i) On a toujours $\beta_{3,\ell} = 0$.
(ii) Si $\rho_0 = \rho_1 = 0$, alors $\beta_{2,\ell} = 0$.
(iii) Si $\rho_0 = 0$, alors $\beta_{1,\ell} = 0$.

Démonstration. (i) C'est un corollaire immédiat de la proposition 3.13 car $H^3(k, A)\{\ell\} \cong H^3(k, A(k^s)\{\ell\})$.
(ii) C'est un corollaire immédiat de la proposition 3.13 car $H^2(k, A)\{\ell\} \cong H^2(k, A(k^s)\{\ell\})$.
(iii) C'est un corollaire immédiat de la remarque 3.14.

□

3.2.3 Conditions nécessaires pour la nullité des $\beta_{r,\ell}$

Dans cette section, nous allons donner une réciproque au théorème 3.15(ii). Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.16. *Supposons que $H^1(k_0, A_0^0\{\ell\}(-1))$ soit fini. Alors $\rho_0 = 0$.*

Démonstration. La suite $0 \to U_0 \times T_0 \to A_0^0 \to B_0 \to 0$ induit une suite exacte de cohomologie :

$$H^0(k_0, B_0\{\ell\}(-1)) \to H^0(k_0, T_0\{\ell\}(-1)) \to H^1(k_0, A_0^0\{\ell\}(-1)).$$

En utilisant la proposition 1.17, on déduit que le groupe $H^0(k_0, T_0\{\ell\}(-1))$ est fini. La proposition 1.13 impose alors que $\rho_0 = 0$. □

Théorème 3.17. *Soit $\ell \neq p$ un nombre premier. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\rho_1 = \rho_0 = 0$ *;*
(ii) $\beta_{2,\ell} = 0$.

Démonstration. Le sens direct n'est autre que le théorème 3.15.
Supposons (ii). Dans ce cas, le groupe $H^2(k, A)\{\ell\} \cong H^2(k, A\{\ell\})$ est fini. De plus, par dimension cohomologique, le groupe $H^3(k_1, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\})$ est nul. Par conséquent, en écrivant la suite exacte :

$$H^2(k, A\{\ell\}) \to H^1(k_1, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\})) \to H^3(k_1, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}) = 0$$

associée à la suite spectrale de Hochschild-Serre, on déduit que le groupe abélien $H^1(k_1, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ est fini. Le lemme 3.10 montre alors la finitude de $H^1(k_1, A_1^0\{\ell\}(1))$.

Écrivons maintenant la suite :

$$0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0.$$

Elle induit une suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to T_1\{\ell\}(1)) \to A_1^0\{\ell\}(1)) \to B_1\{\ell\}(1)) \to 0 \tag{59}$$

et donc une suite de cohomologie :

$$H^1(k_1, A_1^0\{\ell\}(1)) \to H^1(k_1, B_1\{\ell\}(1)) \to H^2(k_1, T_1\{\ell\}(1)).$$

Comme $H^2(k_1, T_1\{\ell\}(1))$ est fini (proposition 1.13), la finitude de $H^1(k_1, A_1^0\{\ell\}(1))$ implique celle de $H^1(k_1, B_1\{\ell\}(1))$.

La suite spectrale $H^s(k_0, H^t(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(1))) \Rightarrow H^{s+t}(k_1, B_1\{\ell\}(1))$ fournit une suite exacte :

$$\begin{aligned} H^1(k_1, B_1\{\ell\}(1)) \to H^0(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(1))) \to \\ \to H^2(k_0, H^0(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(1))) = 0 \end{aligned}$$

car k_1 est de dimension cohomologique 2. La finitude de $H^1(k_1, B_1\{\ell\}(1))$ implique donc celle de $H^0(k_0, H^1(k_1^{nr}, B_1\{\ell\}(1)))$, et les lemmes 3.10 et 3.16 montrent alors que $H^1(k_0, A_0^0\{\ell\}(-1))$ est fini puis que $\rho_0 = 0$.

Reste à montrer que $\rho_1 = 0$. Pour ce faire, on remarque que, d'après le lemme 3.12, le groupe $H^2(k_1, B_1\{\ell\}(1))$ est fini car $\rho_0 = 0$. De plus, la suite exacte de modules galoisiens (59) induit une suite exacte de cohomologie :

$$H^2(k_1, T_1\{\ell\}(1)) \to H^2(k_1, A_1^0\{\ell\}(1)) \to H^2(k_1, B_1\{\ell\}(1)).$$

Comme $H^2(k_1, T_1\{\ell\}(1))$ est fini (proposition 1.13), la finitude de $H^2(k_1, B_1\{\ell\}(1))$ implique celle de $H^2(k_1, A_1^0\{\ell\}(1))$ et donc celle de $H^0(k_1, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ (lemme 3.10).

Écrivons maintenant la suite exacte :

$$H^0(k_1, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\})) \to H^2(k_1, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}) \to H^2(k, A\{\ell\})$$

associée à la suite spectrale de Hochschild-Serre. Comme $H^2(k, A\{\ell\})$ est fini, la finitude de $H^0(k_1, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ implique celle de $H^2(k_1, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ et donc aussi celle de $H^2(k_1, A_1^0(k_1^s)\{\ell\})$ (lemme 3.11). En exploitant encore une fois la suite (59), on obtient une suite exacte :

$$H^1(k_1, B_1(k_1^s)\{\ell\}) \to H^2(k_1, T_1(k_1^s)\{\ell\}) \to H^2(k_1, A_1^0(k_1^s)\{\ell\}).$$

Comme $H^1(k_1, B_1(k_1^s)\{\ell\})$ est fini car $\rho_0 = 0$ (lemme 3.12), on déduit qu'il en est de même de $H^2(k_1, T_1(k_1^s)\{\ell\})$. On obtient finalement $\rho_1 = 0$ grâce à la proposition 1.13. □

Remarque 3.18. Dans l'article [Koy00], Y. Koya construit un complexe C de $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-modules pour lequel la multiplication par ℓ^s induit un triangle distingué

$$({}_{\ell^s}A)' \to C \to C \to ({}_{\ell^s}A)'[1] \tag{60}$$

avec $({}_{\ell^s}A)' = \underline{\mathrm{Hom}}({}_{\ell^s}A, \mu_{\ell^s}^{\otimes 2})$ quel que soit l'entier naturel s. Son théorème principal (théorème 1.1) implique que $H^0(k, C)\{\ell\}$ et $H^1(k, C)\{\ell\}$ sont finis quelle soit la variété abélienne A sur k. De plus, sa preuve repose très fortement sur la proposition 4.1, qui impose que, pour chaque $s \geq 0$, on a $|H^0(k, C)/\ell^s| = |{}_{\ell^s}H^0(k, C)|$. Cela montre que la fonction $s \mapsto |H^0(k, C)/\ell^s|$ est bornée. Or on remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{|{}_{\ell^s}H^1(k, C)|}{|{}_{\ell^s}H^2(k, A)|} &= \frac{|{}_{\ell^s}H^1(k, C)|}{|H^1(k, ({}_{\ell^s}A)')|}\frac{|H^1(k, ({}_{\ell^s}A)')|}{|H^2(k, {}_{\ell^s}A)|}\frac{|H^2(k, {}_{\ell^s}A)|}{|{}_{\ell^s}H^2(k, A)|}\\ &= \frac{|H^1(k, A)/\ell^s|}{|H^0(k, C)/\ell^s|},\end{aligned}$$

car $|H^1(k, ({}_{\ell^s}A)')| = |H^1(k, ({}_{\ell^s}A)')|$ par dualité sur k (théorème I.2.17 de [Mil06]) et car on a des suites exactes induites par (60) et par $0 \to {}_{\ell^s}A \to A \to A \to 0$:

$$\begin{gathered}0 \to H^0(k, C)/\ell^s \to H^1(k, ({}_{\ell^s}A)') \to {}_{\ell^s}H^1(k, C) \to 0,\\ 0 \to H^1(k, A)/\ell^s \to H^2(k, {}_{\ell^s}A) \to {}_{\ell^s}H^2(k, A) \to 0.\end{gathered}$$

Comme $H^1(k, C)\{\ell\}$ est fini et la fonction $s \mapsto |H^0(k, C)/\ell^s|$ est bornée, on en déduit que la fonction $s \mapsto |{}_{\ell^s}H^2(k, A)|$ est aussi bornée, et donc que $H^2(k, A)\{\ell\}$ est fini, quelle que soit la variété abélienne A. En utilisant 3.17, cela impose que $\rho_1 = 0$ pour toute variété abélienne A. Mais cela est clairement faux : par exemple, la courbe elliptique $y^2 = x^3 + x^2 + t$ vérifie $\rho_1 = 1$. On en déduit que, parmi le théorème 1.1 et la proposition 4.1 de [Koy00], au moins l'un des deux énoncés est faux. En particulier, la preuve du théorème 1.1 de [Koy00] semble erronée et difficile à rattraper.

3.3 Étude en p

Les résultats sont plus imprécis que dans le paragraphe précédent, puisque nous ne savons pas calculer les parties p-primaires des groupes de cohomologie d'un tore et puisque le noyau du morphisme de réduction $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}_{k_1}) \to A_0(k_0)$ n'est pas forcément uniquement divisible par p.

Théorème 3.19. *On a :*

$$\beta_{0,p} - \beta_{1,p} + \beta_{2,p} - \beta_{3,p} = 0,$$
$$\beta_{0,p} = -\rho_1 - [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim T_1 + \dim B_1).$$

Si $\dim B_1 = 0$*, alors* $\beta_{1,p} = \beta_{3,p} = 0$.

Démonstration. La première égalité été vue dans 3.6. La deuxième peut être démontrée comme la proposition 3.7, à condition d'utiliser le théorème de structure de Mattuck (lemme 3.3 de [Mil06]) : pour plus de détails, on pourra consulter la proposition 5.21 de [Izq16b]. Finalement, la preuve de la dernière assertion est analogue à celle du théorème 3.17 (c'est même plus facile). □

Corollaire 3.20. *On a* $\dim U_1 = \dim U_1^*$. *En particulier, si A a très mauvaise réduction, alors il en est de même de A^t.*

Remarque 3.21. On pourrait bien sûr remplacer A^t par n'importe quelle variété abélienne isogène à A.

3.4 Le noyau de $H^2(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$

Exactement comme dans la section 3.1, on peut montrer que :

Théorème 3.22. *Pour chaque $r \geq 0$, il existe un morphisme naturel surjectif $H^r(k, \tilde{A}) \to (H^{2-r}(k, A)^\wedge)^D$ dont le noyau est de torsion de type cofini divisible.*

Il se trouve que, dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^2(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient de poser $\tilde{\mathcal{A}} = g_*\tilde{A}$ où $g : \text{Spec } k \to \text{Spec } \mathcal{O}_k$ désigne l'immersion ouverte, et d'établir quelques propriétés préliminaires :

Lemme 3.23.
(i) Le morphisme naturel $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2) \to H^1(k, A)$ est injectif d'image le sous-groupe $H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ de $H^1(k, A)$.
(ii) Le faisceau $\tilde{\mathcal{A}}$ est de torsion. De plus, pour chaque $n \geq 1$, on a l'égalité ${}_n\tilde{\mathcal{A}} = {}_n\mathcal{A}_2^* \otimes \mu_n$, où $\mathcal{A}_2^*$ désigne le modèle de Néron de A^t.

(iii) On a un isomorphisme $H^2(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^2(k^{nr}/k, \tilde{A}(k^{nr}))$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^2(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "\cong"] & H^2(k, \tilde{A}) \\ H^2(k^{nr}/k, \tilde{A}(k^{nr})) \arrow[ur, "Inf"'] & \end{tikzcd} .$$

Démonstration. Les preuves de (i) et (iii) sont analogues à celle de 2.7. Le fait que $\tilde{\mathcal{A}}$ est de torsion est évident, et pour montrer que ${}_n\tilde{\mathcal{A}} = {}_n\mathcal{A}_2^* \otimes \mu_n$, il suffit de remarquer que ${}_n\tilde{A} = {}_nA^t \otimes \mu_n$ (lemme 3.2) et donc que :

$${}_n\tilde{\mathcal{A}} = g_*({}_n\tilde{A}) = g_*({}_nA^t \otimes \mu_n) = g_*({}_nA^t) \otimes \mu_n = {}_n\mathcal{A}_2^* \otimes \mu_n.$$

□

PROPOSITION 3.24. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_1|$ (mais pouvant être éventuellement égal à p).*

(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $H^0(k^{nr}, \tilde{A})$ sont ℓ-divisibles.

(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D.$$

Démonstration. (i) On prouve que $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles exactement de la même manière que dans la proposition 2.8. De plus, comme ${}_n\tilde{A} = {}_nA^t \otimes \mu_n$, on remarque que :

$$H^0(k^{nr}, \tilde{A}) = \varinjlim_n H^0(k^{nr}, {}_n\tilde{A}) \cong \varinjlim_n H^0(k^{nr}, {}_nA^t) = A^t(k^{nr})_{\mathrm{tors}}.$$

On en déduit que $H^0(k^{nr}, \tilde{A})$ est ℓ-divisible.

(ii) La preuve est analogue à celle de la proposition 2.8.

□

LEMME 3.25. *On obtient un isomorphisme :*

$$\iota_\ell : H^1(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, \tilde{A}))\{\ell\} \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D$$

par composition des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} H^1(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, \tilde{A}))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, \tilde{A})) && (61)\\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A})) && (62)\\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A(k^{nr})(-1))^D) && (63)\\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D. && (64) \end{aligned}$$

Démonstration. Décrivons les quatre isomorphismes précédents.

- L'isomorphisme (61) est évident.
- La suite exacte $0 \to {}_{\ell^r}\tilde{A} \to \tilde{A} \to \tilde{A} \to 0$ induit une suite exacte en cohomologie :
$$0 \to \tilde{A}(k^{nr})/\ell^r \to H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A}) \to {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, \tilde{A}) \to 0.$$
Le lemme 3.24(i) montre alors que le morphisme $H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A}) \to {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, \tilde{A})$ est un isomorphisme. Cela fournit l'isomorphisme (62).
- Le groupe $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr})$ est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$. Comme ${}_{\ell^r}\tilde{A} \cong \underline{\mathrm{Hom}}({}_{\ell^r}A, \mu_{\ell^r}^{\otimes 2})$, l'exemple I.1.10 de [Mil06] montre alors que l'on a un accouplement parfait de groupes finis :
$${}_{\ell^r}A(k^{nr})(-1) \times H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Cet accouplement induit un isomorphisme :
$$H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A}) \xrightarrow{\sim} ({}_{\ell^r}A(k^{nr})(-1))^D.$$
Cela fournit l'isomorphisme (63).
- La dualité de Tate sur le corps p-adique k_1 montre que l'on a un accouplement parfait de groupes finis :
$$H^1(k_1, ({}_{\ell^r}A(k^{nr})(-1))^D) \times H^1(k_1, {}_{\ell^r}A(k^{nr})) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Cet accouplement induit un isomorphisme :
$$H^1(k_1, ({}_{\ell^r}A(k^{nr})(-1))^D) \xrightarrow{\sim} (H^1(k_1, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D.$$
En passant à la limite inductive sur r, on obtient l'isomorphisme (64).

□

Comme dans 2.10, nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 3.26. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_1|$ (mais éventuellement égal à p). On appelle* ℓ-GROUPE DE COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE SYMÉTRISÉ DE $\tilde{A}$ *le groupe :*
$$H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) := (\iota_\ell \circ \varphi)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2))^D) \subseteq H^2(k, \tilde{A})\{\ell\}$$
où $\varphi : H^2(k, \tilde{A}) \to H^1(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, \tilde{A}))$ désigne le morphisme induit par la suite spectrale $H^r(k^{nr}/k, H^s(k^{nr}, \tilde{A})) \Rightarrow H^{r+s}(k, \tilde{A})$. Comme dans la proposition 2.12, on peut alors établir une suite exacte :
$$0 \to \frac{H^2(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}})}{\delta(H^0(\mathcal{O}_k, R^1 g_* \tilde{A}))}\{\ell\} \to H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2))^D \to 0 \quad (65)$$
où $\delta : H^0(\mathcal{O}_k, R^1 g_* \tilde{A}) \to H^2(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}})$ est le morphisme de bord provenant de la suite spectrale $H^r(\mathcal{O}_k, R^s g_* \tilde{A}) \Rightarrow H^{r+s}(k, \tilde{A})$.

Dans la suite, on notera $H^2_{nr}(k, \tilde{A}) := \mathrm{Im}(H^2(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^2(k, \tilde{A})))$. On dira que c'est la cohomologie non ramifiée de $\tilde{A}$.

PROPOSITION 3.27. *Soit ℓ un nombre premier* différent de p *et ne divisant pas* $|F_1|$. *Alors* $H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) = H^2_{nr}(k, \tilde{A})\{\ell\}$.

Démonstration. En utilisant le lemme 3.23 et en remarquant que le morphisme de réduction $A(k^{nr}) = \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_1(k_1^s)$ est surjectif à noyau uniquement divisible, on a :

$$H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2)\{\ell\} \cong H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))\{\ell\} \cong H^1(k_1, A_1)\{\ell\}. \tag{66}$$

De plus, la suite exacte $0 \to A_1^0 \to A_1 \to F_1 \to 0$ induit une suite exacte de cohomologie :

$$F_1(k_1) \to H^1(k_1, A_1^0) \to H^1(k_1, A_1) \to H^1(k_1, F_1),$$

et comme ℓ ne divise pas $|F_1|$, on obtient l'identification :

$$H^1(k_1, A_1)\{\ell\} \cong H^1(k_1, A_1^0)\{\ell\}. \tag{67}$$

En exploitant maintenant la suite exacte $0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0$ et en remarquant que $H^1(k_1, T_1)\{\ell\}$ et $H^1(k_1, B_1)\{\ell\}$ sont finis, on voit que $H^1(k_1, A_1^0)\{\ell\}$ est fini. Les isomorphismes (66) et (67) montrent alors la finitude de $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2)\{\ell\}$ et donc la nullité de $T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_2)$. Par conséquent, d'après la suite exacte (65) :

$$H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) = H^2_{nr}(k, \tilde{A})\{\ell\}.$$

□

REMARQUE 3.28. Ainsi, il est vraiment nécessaire de parler du groupe de cohomologie non ramifié symétrisé uniquement dans le cas $\ell = p$. Mais il est quand même utile d'introduire ce groupe quel que soit ℓ pour deux raisons : d'une part, dans le théorème qui suit, c'est avec le groupe de cohomologie non ramifié symétrisé qu'on identifie naturellement le noyau du morphisme de la dualité locale ; d'autre part, cela permet de donner des énoncés vrais pour tout ℓ.

THÉORÈME 3.29. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F_1|$ (éventuellement égal à p), la partie ℓ-primaire du noyau de $H^2(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$ est $H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell)$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 2.14. □

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^2_{nrs}(k, \tilde{A}) := \bigoplus_{\ell \wedge |F_1| = 1} H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^2_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell)$ si ℓ ne divise pas $|F_1|$, triviale sinon.

4. Variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p(u)$

4.1 Approche sans les groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés

Dans cette section, on se donne un nombre premier p et k désigne un corps p-adique. On rappelle que $K = k(X)$ est le corps des fonctions d'une courbe projective lisse géométriquement intègre X. Soient A une variété abélienne sur K et $\tilde{A} = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = \varinjlim_n {}_nA^t \otimes \mu_n$. Le but de ce paragraphe est d'établir, sous de bonnes hypothèses géométriques sur A, des théorèmes de dualité entre certains groupes de Tate-Shafarevich de A et $\tilde{A}$ (théorème 4.10). Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on adopte des notations analogues à celles de la section 3.2 pour la variété abélienne $A_v = A \times_K K_v$ sur le corps 2-local K_v. Ainsi, on introduit les schémas en groupes $\mathcal{A}_{v,2}, A_{v,1}, F_{v,1}, U_{v,1}, T_{v,1}, B_{v,1}$, $\mathcal{A}_{v,1}, A_{v,0}, F_{v,0}, U_{v,0}, T_{v,0}, B_{v,0}$.
On se donne un entier $r_0 \in \{0, 1, 2\}$ et un nombre premier ℓ différent de p et on fait l'hypothèse suivante :

(H 4.1)
- *si $r_0 = 1$, alors les tores $T_{v,0}, T_{v,1}$ sont anisotropes pour toute place $v \in X^{(1)}$;*
- *si $r_0 = 2$, alors le tore $T_{v,0}$ est anisotrope pour toute place $v \in X^{(1)}$.*

Remarque 4.2. Ces hypothèses sont assez restrictives puisqu'elles portent sur toutes les places $v \in X^{(1)}$ et pas uniquement sur les places de mauvaise réduction (voir remarque 4.11). Dans le paragraphe suivant, on pourra s'affranchir de ces hypothèses grâce aux groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés.

Soit maintenant U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\tilde{\mathcal{A}} = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$. On montre comme dans le lemme 3.2 que :

$$ {}_n\tilde{\mathcal{A}} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = \underline{\mathrm{Hom}}_U({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = {}_n\mathcal{A}^t \otimes \mu_n $$

pour chaque $n > 0$ et que $\tilde{\mathcal{A}}$ est divisible.

Certains des lemmes qui suivent sont faciles et similaires à certains lemmes de la section II.5 de [Mil06] ou à certains lemme de la section 2.2.

Lemme 4.3. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(U, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Pour $r > 1$, le groupe $H^r_c(U, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. La preuve est tout à fait analogue à celle de 2.19. □

Remarque 4.4. Pour tout $r \geq 0$, les groupes $H^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$ et $H^r_c(U, \tilde{\mathcal{A}})$ sont de torsion de type cofini. En effet, ce sont des groupes de torsion car $\tilde{\mathcal{A}}$ est un faisceau de torsion, et pour voir qu'ils sont de type cofini, il suffit de procéder comme dans la preuve de 2.19 en utilisant la suite :

$$ 0 \to {}_n\tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}} \to 0 $$

et la finitude de $H^r(U, {}_n\tilde{\mathcal{A}})$ (proposition 2.1 de [Izq16a]).

Fixons à partir de maintenant un nombre premier p.

LEMME 4.5. *Pour $r \geq 0$, il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^r(U,\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \to H^{r+1}(U,\mathcal{A}\{\ell\}) \to H^{r+1}(U,\mathcal{A})\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^r_c(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to H^{r+1}_c(U,T_\ell\tilde{\mathcal{A}}) \to T_\ell H^{r+1}_c(U,\tilde{\mathcal{A}}) \to 0.$$

Ici, $H^{r+1}(U,\mathcal{A}\{\ell\})$ et $H^{r+1}_c(U,T_\ell\tilde{\mathcal{A}})$ désignent $\varinjlim_n H^{r+1}(U, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ et $\varprojlim_n H^2_c(U, {}_{\ell^n}\tilde{\mathcal{A}})$ respectivement.

Démonstration. La preuve est identique à celle de 2.20. $\square$

LEMME 4.6. *Pour chaque $r \geq 0$, il existe un accouplement canonique :*

$$H^r(U,\mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{4-r}_c(U,T_\ell\tilde{\mathcal{A}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.21. $\square$

On sait que $\underline{\mathrm{Hom}}_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = 0$. On dispose donc d'un accouplement dans la catégorie dérivée :

$$\mathcal{A} \otimes^{\mathbf{L}} {}_n\tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)[1].$$

Comme de plus $H^4_c(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(4)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (lemme 1.3 de [Izq16a]), on obtient pour chaque $n > 0$, un accouplement :

$$H^r(U, {}_n\tilde{\mathcal{A}}) \times H^{3-r}_c(U,\mathcal{A}) \to H^4_c(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) \to H^4_c(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En passant à la limite inductive sur n, on obtient un accouplement :

$$H^r(U,\tilde{\mathcal{A}}) \times H^{3-r}_c(U,\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{68}$$

Posons maintenant, pour chaque $r \geq 0$:

$$D^r(U,\tilde{\mathcal{A}}) = \mathrm{Im}(H^r_c(U,\tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K,\tilde{A})).$$

Ce groupe est de torsion de type cofini d'après la remarque 4.4. Pour l'étudier, il sera utile d'avoir une suite exacte de localisation pour $\tilde{A}$. Pour ce faire, on remarque que la proposition 3.1 de [HSz16] fournit une suite exacte :

$$... \to H^r_c(V,\tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(V,\tilde{\mathcal{A}}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^r(K_v^h,\tilde{A}) \to ..., \tag{69}$$

où K_v^h désigne l'hensélisé de K en v. De plus, d'après le lemme 2.7 de [HSz05], comme $\tilde{A}$ est la limite inductive des ${}_nA^t \otimes \mu_n$ qui sont des schémas en groupes finis étales sur K, on a :

$$H^r(K_v^h,\tilde{A}) \cong H^r(K_v,\tilde{A}). \tag{70}$$

En combinant (69) et (70), on obtient la suite exacte souhaitée :

$$... \to H^r_c(V, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^r(K_v, \tilde{A}) \to .... \tag{71}$$

Lemme 4.7. *Soit $r \geq 0$. Il existe V_0 un ouvert non vide de U tel que, pour tout ouvert V de V_0, le morphisme $H^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K, \tilde{A})$ induit un isomorphisme :*

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}})\{\ell\} \cong Ш^r(K, \tilde{A})\{\ell\}.$$

Démonstration. On remarque que, si $V \subseteq V'$ sont des ouverts non vides dans U, alors le morphisme $H^r_c(V, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K, \tilde{A})$ se factorise par $H^r_c(V', \tilde{\mathcal{A}})$ et donc $D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \subseteq D^r(V', \tilde{\mathcal{A}})$. Comme $D^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$ est de torsion de type cofini, le lemme 3.7 de [HSz16] montre qu'il existe V_0 un ouvert non vide de U tel que, pour tout V contenu dans V_0, on a :

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}})\{\ell\} = D^r(V_0, \tilde{\mathcal{A}})\{\ell\}.$$

Par ailleurs, la suite exacte de localisation (71) montre que, pour chaque ouvert non vide V de V_0, on a :

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \subseteq \mathrm{Ker}(H^r(K, \tilde{A}) \to \prod_{v \in X \setminus V} H^r(K_v, \tilde{A})).$$

On en déduit que, pour chaque ouvert non vide V de V_0, on a :

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}})\{\ell\} \cong Ш^r(K, \tilde{A})\{\ell\}.$$

□

Afin d'établir un théorème de dualité pour le groupe de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour le groupe $D^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$:

Proposition 4.8. *On suppose (H 4.1). On pose*

$$D^{3-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(H^{3-r_0}(U, \mathcal{A}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^{3-r_0}(K_v, A)).$$

Il existe alors un accouplement canonique :

$$\overline{D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})\{\ell\}} \times \overline{D^{3-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})\{\ell\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

Lemme 4.9. *La suite :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r_0 - 1}(K_v, \tilde{A})^{(\ell)} \to H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. On a $\tilde{\mathcal{A}} = \varinjlim_n {}_n\tilde{\mathcal{A}}$, et donc, en utilisant la proposition 2.3 de [Izq16a], on a une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r_0-1}(K_v, \tilde{A}) \to H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to 0.$$

Cela étant établi, la preuve est analogue à celle du lemme 2.25. □

Démonstration. (De la proposition 4.8)
D'après le lemme 4.6, nous disposons d'un isomorphisme

$$f : H^{3-r_0}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \to (H^{r_0+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}}))^D.$$

De plus, l'accouplement (68) induit un accouplement :

$$H^{3-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \times H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et donc un morphisme $g : H^{3-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \to (H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D$. Ainsi on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{2-r_0}(U, \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & H^{3-r_0}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \arrow[r] \arrow[d, "f"', "\cong"] & H^{3-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (T_\ell H^{r_0+1}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}))^D \arrow[r] & (H^{r_0+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}}))^D \arrow[r] & (H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad (72)$$

où j est l'unique morphisme qui fait commuter le diagramme. Cela montre que g est surjectif.

De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^{3-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & H^{3-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \prod_{v \in X^{(1)}} H^{3-r_0}(K_v, A)\{\ell\} \arrow[d, "h"'] \\
0 \arrow[r] & (D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \prod_{v \in X^{(1)}} (H^{r_0-1}(K_v, \tilde{A})^{(\ell)})^D
\end{tikzcd} \quad (73)$$

D'après le théorème 3.15, l'hypothèse (H 4.1) montre que h est un isomorphisme. Du coup, en procédant exactement comme dans la proposition 2.24 et à l'aide des diagrammes (72) et (73), on montre que l'on a un accouplement non dégénéré :

$$\overline{D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})}\{\ell\} \times \overline{D^{3-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de conclure :

Théorème 4.10. *On rappelle que k est un corps p-adique de caractéristique résiduelle p et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 4.1). Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes de torsion :*

$$\overline{Ш^{r_0}(K,\tilde{A})}_{non-p} \times \overline{Ш^{3-r_0}(K,A)}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, $Ш^{r_0}(K,\tilde{A})$ et $Ш^{3-r_0}(K,A)$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. D'après le lemme 4.7 et la proposition 4.8, pour chaque ouvert non vide V de V_0, on a un isomorphisme :

$$\overline{D^{3-r_0}_{sh}(V,\mathcal{A})}\{\ell\} \cong (\overline{Ш^{r_0}(K,\tilde{A})}\{\ell\})^D.$$

Il suffit alors de passer à la limite sur U. □

Remarque 4.11. • Les hypothèses de (H 4.1) concernent toutes les places de $X^{(1)}$. On ne peut pas restreindre ces hypothèses aux places de mauvaise réduction de A puisqu'on ne sait pas si l'ouvert V_0 du lemme 4.7 peut être choisi égal à U. Ce problème vient en particulier du fait que le corps K est de dimension cohomologique 3 et que, même si $v \in X^{(1)}$ est une place de bonne réduction, le groupe $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{A})$ peut être non nul !

- Même si le théorème est une dualité modulo divisibles, dans la preuve, on a besoin d'une dualité locale qui n'est pas modulo divisibles. C'est pourquoi nous sommes amenés à faire les hypothèses (H 4.1).

Remarque 4.12. Toute variété abélienne sur K vérifie les hypothèses du théorème lorsque $r_0 = 0$. Dans ce cas, le théorème affirme que la partie divisible de $Ш^3(K,A)$ est p-primaire.

Exemple 4.13. Dans le cas où $K = k(u)$, si on se donne $f(u) \in K^\times$, la courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + f(u)$ vérifie les hypothèses du théorème pour $r_0 \in \{1,2\}$.

4.2 Approche avec les groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés

Soient ℓ un nombre premier (éventuellement égal à p) et U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction. Faisons l'hypothèse suivante :

(H 4.14)$_\ell$
- *si $\ell \neq p$, pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
  - *ℓ ne divise pas $|F_{v,1}|$,*
  - *le tore $T_{v,0}$ est anisotrope.*
- *si $\ell = p$, pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
  - *ℓ ne divise pas $|F_{v,1}|$,*
  - *la variété abélienne $B_{v,1}$ est triviale.*

REMARQUE 4.15. Cette hypothèse est nettement mois forte que l'hypothèse de la section précédente. Elle ne concerne que les places de mauvaise réduction et est vérifiée pour presque tout ℓ.

On note Z l'ensemble suivant :

- si $\ell \neq p$, alors Z désigne l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que le tore $T_{v,0}$ est anisotrope,
- si $\ell = p$, alors Z désigne l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que la variété abélienne $B_{v,1}$ est triviale.

On introduit le groupe suivant :

$$Ш^2_{nrs}(\tilde{A}) := \mathrm{Ker}\left(H^2(K,\tilde{A}) \to \prod_{v\in Z} H^2(K_v,\tilde{A}) \times \prod_{v\in X^{(1)}\setminus Z} H^2(K_v,\tilde{A})/H^2_{nrs}(K_v,\tilde{A})\right).$$

Si ℓ est différent de p, le groupe $Ш^2_{nrs}(\tilde{A})\{\ell\}$ coïncide avec la partie ℓ-primaire de :

$$Ш^2_{nr}(\tilde{A}) := \mathrm{Ker}\left(H^2(K,\tilde{A}) \to \prod_{v\in Z} H^2(K_v,\tilde{A}) \times \prod_{v\in X^{(1)}\setminus Z} H^2(K_v,\tilde{A})/H^2_{nr}(K_v,\tilde{A})\right).$$

En procédant de manière similaire à la section 2.2 et en utilisant les théorèmes 3.15, 3.19 et 3.29, on peut établir le théorème et le corollaire suivants :

THÉORÈME 4.16. *On rappelle que k est un corps p-adique de caractéristique résiduelle p et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 4.14)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^2_{nrs}(\tilde{A})}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

COROLLAIRE 4.17. *On rappelle que k est un corps p-adique de caractéristique résiduelle p et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 4.14)$_\ell$ et on note $\tilde{i} : Ш^2(\tilde{A}) \hookrightarrow Ш^2_{nrs}(\tilde{A})$ l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré à gauche de groupes finis :*

$$Ш^2(\tilde{A})\{\ell\}/\tilde{i}^{-1}(Ш^2_{nrs}(\tilde{A})\{\ell\}_{div}) \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

QUESTION : Quel est le noyau à droite dans l'accouplement précédent ?

5. QUELQUES REMARQUES SUR LA FINITUDE DES GROUPES DE TATE-SHAFAREVICH

Le but de cette section est de donner, pour $k = \mathbb{C}((t))$ ou $k = \mathbb{Q}_p$, des exemples de variétés abéliennes sur K pour lesquelles on peut déterminer si le premier groupe de Tate-Shafarevich est fini ou pas. Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème 3.1 de [Tat66], dont nous rappelons l'énoncé (adapté à notre situation) :

Théorème 5.1. *(théorème 3.1 de [Tat66])*
On rappelle que X est une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k de corps des fonctions K. Soit Y une surface régulière sur k munie d'un morphisme propre $f : Y \to X$ à fibres de dimension 1. On suppose que les fibres géométriques de f sont connexes, et que la fibre générique est lisse. Si f admet une section, $\mathrm{Br}\, X$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{Br}\, Y$ *et on a un isomorphisme* $Ш^1(K, J) \cong \mathrm{Br}\, Y / \mathrm{Br}\, X$ *où J désigne la jacobienne de la fibre générique de f.*

5.1 Cas où $k = \mathbb{C}((t))$

On se place dans le cas où $k = \mathbb{C}((t))$. On rappelle que la courbe projective lisse géométriquement intègre X sur k de corps des fonctions K a été fixée depuis le début de l'article.

5.1.1 Cas où Y est un produit

Soient C une courbe projective lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$ et $Y = C \times_k X$. On note J_C (resp. J_X) la jacobienne de C (resp. X) sur k. D'après le théorème 5.1, le groupe $Ш^1(K, J_C \times_k K)$ est égal à $\mathrm{Br}\, Y/\mathrm{Br}\, X$. Par ailleurs, nous savons que $\mathrm{Br}_1\, Y = H^1(k, \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}})$ car $\mathrm{Br}\, k = 0$. D'après la proposition 1.7 de [SZ14], le morphisme naturel $H^1(k, \mathrm{Pic}\, C_{\overline{k}}) \times H^1(k, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}}) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}})$ a un noyau et un conoyau finis. Écrivons la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to J_C(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}\, C_{\overline{k}} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

$$0 \to J_X(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$\mathbb{Z} \to H^1(k, J_C) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, C_{\overline{k}}) \to 0.$$

$$\mathbb{Z} \to H^1(k, J_X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}}) \to 0.$$

Les noyaux des morphismes surjectifs $H^1(k, J_C) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, C_{\overline{k}})$ et $H^1(k, J_X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}})$ sont donc finis. On en déduit que les parties divisibles de $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X \cong H^1(k, \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}})/H^1(k, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}})$ et $H^1(k, J_C)$ sont égales. Par conséquent, d'après le théorème de Ogg (théorème 1.15), si J_C n'a pas réduction purement additive, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)_{div} \neq 0$. La réciproque est vraie par exemple si X est de genre 0, puisque dans ce cas, la partie divisible de $\mathrm{Br}\, Y_{\overline{k}}$ est nulle d'après la section 2.9 de [SZ14].

5.1.2 Cas où Y est de dimension de Kodaira $-\infty$

Soit Y une surface projective lisse sur k de dimension de Kodaira $-\infty$. Le cas où Y est une fibration en coniques sur une courbe est inintéressant, puisque la jacobienne de la fibre générique est triviale.
Supposons donc que Y est une surface de del Pezzo (cf section 24 de [Man86]) vérifiant les hypothèses du théorème 5.1. On note J la jacobienne de la fibre

générique de $Y \to X$. Soit L une extension finie de k telle que $Y \times_k L$ est rationnelle. Alors, par un argument de restriction-corestriction, Br Y est fini, et donc $Ш^1(K,J)_{div} = 0$.
Remarquons finalement qu'il existe bien des surfaces de del Pezzo Y vérifiant les hypothèses du théorème 5.1. Par exemple, il suffit de choisir $Y_0/\mathbb{C}$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en les points base d'un pinceau de cubiques et $Y = Y_0 \times_{\mathbb{C}} k$ puisque, dans ce cas, Y est une surface jacobienne sur $\mathbb{P}^1_k$.

5.1.3 Cas où Y est de dimension de Kodaira 0

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le cas où Y est une surface projective lisse minimale sur k de dimension de Kodaira 0. La classification de telles surfaces montre que Y est un twist d'une surface abélienne, une surface bielliptique, une surface K3 ou une surface d'Enriques.

Surfaces abéliennes. Supposons que X soit une courbe elliptique et soit Y le produit de X par une courbe elliptique E. Dans ce cas, Y est une surface abélienne fibrée au-dessus de X. Si E n'a pas réduction purement additive, alors, d'après l'étude menée dans le paragraphe 5.1.1, $Ш^1(K, E \times_k K)_{div} \neq 0$. Le cas où E a réduction purement additive est plus difficile, puisque $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X$ est fini et il faut donc s'intéresser au groupe de Brauer transcendant $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}(Y \times_k \overline{k}))$.

Surfaces bielliptiques. Soit $Y = (E_1 \times_k E_2)/G$ une surface bielliptique, avec E_1 et E_2 deux courbes elliptiques et G un sous-groupe fini de E_1 agissant sur E_2 de sorte que $E_2/G \cong \mathbb{P}^1_k$. Le morphisme $\pi : Y \to E_1/G$ est alors une fibration elliptique isotriviale, de fibre E_2. On prend $X = E_1/G$ et on suppose que la fibration a une section. Comme le genre géométrique de Y est nul, la dualité de Serre montre que $H^2(X_{\overline{k}}, \mathcal{O}_{X_{\overline{k}}}) = 0$, et donc que le groupe $\mathrm{Br}(Y \times_k \overline{k})$ est fini. De plus, comme Alb $Y = E_1/G = X$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}} \to \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}} \to N \to 0$$

où N désigne un groupe abélien de type fini. On déduit que $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X = H^1(k, \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}})/H^1(k, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}})$ est fini. Cela montre que $\mathrm{Br}\, Y/\mathrm{Br}\, X$ est fini, et il en est donc de même de $Ш^1(K,J)$ où J désigne la jacobienne de la fibre générique de π.

Surfaces K3. Supposons que $X = \mathbb{P}^1_k$. Soient Y_0 une surface K3 sur $\mathbb{C}$ telle que $Y = Y_0 \times_{\mathbb{C}} k$ est une surface elliptique sur X avec une section. On note $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$ et $\rho = \mathrm{rg}(\mathrm{NS}(Y_0)) = \mathrm{rg}(\mathrm{NS}(\overline{Y}))$. Comme la variété d'Albanese de Y est triviale, le groupe $\mathrm{Br}_1\, Y$ est fini. Concernant le groupe de Brauer transcendant de Y, comme $\mathrm{Br}\, Y_0 \cong \mathrm{Br}\, \overline{Y}$, on a $\mathrm{Br}\, \overline{Y} = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y})$. Or $(\mathrm{Br}\, \overline{Y})_{div} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{22-\rho}$. Étant donné que $\rho \leq 20$, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y})_{div} \neq 0$. Le théorème 5.1 permet alors de conclure que $Ш^1(K,J)_{div} \neq 0$ où J est la jacobienne de la fibre générique de $Y \to X$. On remarquera que dans cette

situation, la non nullité de $Ш^1(K,J)_{div}$ n'est pas expliquée par le groupe de Brauer algébrique de Y.
Reste à rappeler qu'il existe bel et bien des surfaces K3 sur $\mathbb{C}$ qui sont des surfaces jacobiennes :

- toutes les surfaces K3 avec $\rho \geq 13$ sont jacobiennes (lemme 12.22 de [SS10]) ;
- pour $\rho < 13$, dans la section 3.2 de [HS11], Hulek et Schütt construisent une famille de surfaces K3 qui sont des surfaces jacobiennes et qui vérifient $\rho \geq 10$;
- d'après [CD89], la surface jacobienne d'une surface K3 elliptique est une surface K3 de même rang de Picard, et toute surface K3 avec $\rho \geq 5$ est elliptique.

Surfaces d'Enriques. Si Y est une surface d'Enriques, c'est toujours une surface elliptique, mais elle ne possède jamais de section, ce qui ne permet donc pas d'appliquer le théorème 5.1.

Remarque 5.2. Si Y est une surface projective lisse sur k de dimension de Kodaira 1, alors Y est automatiquement une surface elliptique, mais pas forcément jacobienne. Si Y est de type général, alors Y n'est pas une surface elliptique.

5.2 Cas où $k = \mathbb{Q}_p$

Soient p et ℓ des nombres premiers distincts. On se place dans le cas où k un corps p-adique. Soient C une courbe projective lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$ et $Y = C \times_k X$. On note J_C (resp. J_X) la jacobienne de C (resp. X) sur k. Comme dans le paragraphe précédent, on montre que la partie divisible de $(\mathrm{Br}_1\ Y/\mathrm{Br}\ X)\{\ell\}$ est toujours triviale. En particulier, si X est de genre 0, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)\{\ell\}_{div} = 0$ (et ce résultat reste vrai si $C(k) = \emptyset$ par un argument de restriction-corestriction). Par contre, si $J_C \neq 0$, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)\{p\}_{div} \neq 0$.

Question : Si X est de genre 0, est-ce que toute jacobienne J sur K vérifie $Ш^1(K,J)\{\ell\}_{div} = 0$?

Références

[CTH15] Jean-Louis Colliot-Thélène et David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(6) :1475–1516, 2015.

[CTS87] Jean-Louis Colliot-Thélène et Jean-Jacques Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles II. *Duke Mathematical Journal*, 54 :375–492, 1987.

[CD89] François R. Cossec and Igor V. Dolgachev. *Enriques surfaces I.* Progress in Mathematics 76, Birkhäuser, Boston, 1989.

[FK88] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Volume 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Fuc70] László Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, Academic Press, New York-London, 1970.

[HSz05] David Harari and Tamás Szamuely. Arithmetic duality theorems for 1-motives. *J. Reine Angew. Math.*, 578 :93–128, 2005.

[HSz16] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for tori over p-adic function fields. *J. Algebraic Geom.*, 25(3) :571–605, 2016.

[HS11] Klaus Hulek and Matthias Schütt. Enriques surfaces and Jacobian elliptic K3 surfaces. *Mathematische Zeitschrift*, 268(3-4) :1025–1056, 2011.

[Izq16a] Diego Izquierdo. Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs. *Mathematische Zeitschrift*, 284(1-2), p. 615-642, 2016.

[Izq16b] Diego Izquierdo. Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions. 2016. Thèse disponible sur `http://www.math.ens.fr/ izquierd/recherche.html`.

[Koy00] Yoshihiro Koya. On a duality theorem of abelian varieties over higher dimensional local fields. *Kodai Math. J.*, 2 :297–308, 2000.

[Lan58] Serge Lang and John Tate. Principal homogeneous spaces over abelian varieties. *American Journal of Mathematics*, 80 :659–684, 1958.

[Man86] Yuri I. Manin. *Cubic forms*, Second edition, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Algebra, geometry, arithmetic ; Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[Mat55] Arthur Mattuck. Abelian varieties over p-adic ground fields. *Ann. of Math. (2)*, 62 :92–119, 1955.

[Mil86] James S. Milne. *Abelian varieties.* In *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), p.103–150. Springer, New York, 1986.

[Mil06] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems.* BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Ogg62] Andrew P. Ogg. Cohomology of abelian varieties over function fields. *Ann. of Math. (2)*, 76 :185–212, 1962.

[Ono61] Takashi Ono. Arithmetic of algebraic tori. *Ann. of Math. (2)*, 74 :101–139, 1961.

[Oor66] Frans Oort. *Commutative group schemes*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[SvH03] Claus Scheiderer and Joost van Hamel. Cohomology of tori over p-adic curves. *Math. Ann.*, 326(1) :155–183, 2003.

[SS10] Matthias Schütt and Tetsuji Shioda. Elliptic surfaces. In *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, Adv. Stud. Pure Math., 60 :51—160, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII, Hermann, Paris, 1968.

[Ser92] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1500, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*, fifth edition. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, Springer-Verlag, 1972.

[SZ14] Alexei N. Skorobogatov and Yuri G. Zarhin. The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties. *J. Eur. Math. Soc.*, 16 :749–768, 2014.

[Tam94] Günter Tamme. *Introduction to étale cohomology*, *Universitext*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Tat58] John Tate. WC-groups over p-adic fields. *Séminaire Bourbaki*, année 1957/1958, exposé 156.

[Tat63] John Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 288–295. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.

[Tat66] John Tate. On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. *Séminaire Bourbaki*, année 1964/1966, exposé 306.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Diego Izquierdo
École Normale Supérieure
45 Rue d'Ulm
75005 Paris, France
diego.izquierdo@ens.fr