Réalisation ℓ-Adique des Motifs Triangulés Géométriques I

Florian Ivorra

Received: December 30, 2005

Communicated by Alexander Merkurjev

Abstract. In this work, we provide an integral ℓ-adic realization functor for Voevodsky's triangulated category of geometrical motives over a noetherian separated scheme. Our approach to the realization problem is to study finite correspondences from the Nisnevich and étale local point of view. We set the existence of a local decomposition for finite correspondences which implies the existence of local transfers. This result allows us to provide canonical transfers on the Godement resolution of a Nisnevich sheaf with transfers and then to carry out the construction of the ℓ-adic realization functor. We also give a moderate ℓ-adic realization functor in some geometrical situations.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 19E15 ; Secondary 19F27, 14F42.

Keywords and Phrases: Mixed motives, ℓ-adic realizations, algebraic cycles.

Introduction

Nous nous intéressons dans cet article à la réalisation des motifs triangulés géométriques de V. Voevodsky sur un schéma noethérien séparé S dans la catégorie des coefficients ℓ-adiques de T. Ekedahl [11] [1]. M. Levine a construit dans [25] une catégorie triangulée de motifs munie de foncteurs de réalisation très généraux. Ce travail fournit indirectement des foncteurs de réalisations pour les motifs triangulés de Voevodsky dans les cas où les catégories de [29] et [25] sont équivalentes à savoir essentiellement le cas d'un corps parfait [25, 22]. Dans [18, 19] A. Huber fait directement le lien pour un corps de caractéristique

[1]Nous renvoyons à l'appendice A pour un rappel sur la construction de cette catégorie et pour de plus amples précisions sur les notations utilisées dans le cadre ℓ-adique.

nulle entre les motifs triangulés de Voevodsky et la catégorie des réalisations mixtes de [16] en construisant un foncteur de réalisation mixte.

Nous commençons ce travail en remarquant que la construction de la catégorie triangulée des motifs mixtes géométriques de [29] se généralise au schéma de base S, ce qui nous permet d'obtenir une catégorie triangulée tensorielle que nous notons $DM_{gm}(S)$. L'approche faisceautique sur une base régulière fait l'objet d'un travail en cours de D-C. Cisinski et F. Déglise commencé dans [6]. En convenant de désigner par $\mathrm{D}^+(S,\mathbb{Z}_\ell)$ la catégorie des coefficients ℓ-adiques définie par T. Ekedahl [11], notre résultat principal — le théorème 4.3 — s'énonce alors comme suit :

Théorème. *Le foncteur de réalisation ℓ-adique des S-schémas lisses de type fini*

$$\begin{array}{rcl} R_\ell : \mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} & \to & \mathrm{D}^+(S,\mathbb{Z}_\ell) \\ X & \mapsto & R\pi_{X*}\pi_X^*\mathbb{Z}_S/\ell^*. \end{array}$$

se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé quasi-tensoriel[2]

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S,\mathbb{Z}_\ell). \tag{1}$$

(a) Lorsque S est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension ≤ 1, le foncteur (1) prend ses valeurs dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S,\mathbb{Z}_\ell)$ sous-catégorie triangulée pleine formée des coefficients constructibles.

(b) Lorsque S est de type fini sur un corps fini, le foncteur (1) induit un foncteur triangulé tensoriel

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{m}}(S,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où le second membre désigne la catégorie des coefficients ℓ-adiques mixtes de P. Deligne [8, 5].

L'approche des réalisations que nous adoptons repose essentiellement sur une étude locale pour les topologies de Nisnevich et étale des correspondances finies. Le résultat fondamental à ce sujet — la proposition 2.1 — consiste en un raffinement de la proposition 3.1.3 de [29] et assure l'existence d'une homotopie canonique pour certains complexes de Čech associés à la décomposition locale d'un schéma pour la topologie de Nisnevich. Dans l'article [9] P. Deligne et A. Goncharov ont utilisé une approche similaire pour construire certains foncteurs de réalisation. Nous renvoyons à [21] pour le lien entre le travail de A. Huber [18, 19] et le présent article.

Dans certaines situations géométriques nous raffinons également la construction précédente en un foncteur de réalisation ℓ-adique modérée — corollaire 4.17.

Les résultats contenus dans cet article ainsi que dans [21] proviennent de la thèse de doctorat de l'auteur [20].

[2]Nous renvoyons à la définition B.1 pour ce qui concerne la terminologie utilisée dans cet article.

Conventions

Tout au long de ce travail, nous adoptons la convention suivante.

> *S désigne un schéma noethérien séparé et ℓ un nombre premier inversible sur S. Tous les schémas considérés sont supposés noethériens et séparés.*

Nous sortirons parfois, de manière anodine, de ce cadre en considérant des réunions disjointes, non nécessairement finies, de schémas pris au sens de la convention précédente. Cela sera notamment le cas dans la section 2. Nous notons Sch_S (resp. Var_S) la catégorie des S-schémas (resp. des S-schémas de type fini) et nous désignons par Sm_S la catégorie des S-schémas lisses de type fini. Le morphisme structural d'un S-schéma X est noté π_X.

1 Motifs mixtes géométriques

Rappelons que sur un corps[3] Voevodsky définit DM_{gm}^{eff} à partir de la catégorie homotopique de la catégorie des complexes de variétés lisses munies des correspondances finies, modulo les relations :
– Mayer-Vietoris pour la topologie de Zariski
– invariance par homotopie.
La construction que nous donnons ici est exactement la même (en se fondant sur la théorie des correspondances finies sur S de Suslin-Voevodsky), à une différence près : nous remplaçons les relations de Mayer-Vietoris pour la topologie de Zariski par leurs analogues en topologie de Nisnevich. Il y a donc a priori plus de relations, mais il résulte de la proposition 4.1.23 de [20] et du théorème 3.1.12 de [29] que les deux constructions coïncident sur un corps parfait.

Avant d'introduire les correspondances finies sur une base quelconque, nous rappelons pour la commodité du lecteur quelques constructions tirées de [28], référence à laquelle nous renvoyons pour un exposé complet.

1.1 Quelques rappels sur les cycles relatifs

Soient K un corps, $\underline{s}$ un K-point de S. Un épaississement de $\underline{s}$ est la donnée d'un trait $\mathcal{O}$ et d'une factorisation de $\underline{s}$ sous la forme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}\mathcal{O} \arrow[r, "\tau"] & S \\ \operatorname{Spec}K \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "\underline{s}"'] & \end{tikzcd}$$

[3] Dans le texte de référence [29], le schéma de base considéré est un corps et pour les besoins de la démonstration de la conjecture de Bloch-Kato, les constructions sont étendues à des schémas simpliciaux lisses sur un corps dans [31].

où σ est le point fermé de $\mathcal{O}$ et τ un morphisme birationnel de $\mathcal{O}$ sur une composante irréductible de S contenant le lieu s de $\underline{s}$. Le point $\underline{s}$ est épais lorsqu'il admet un épaississement. Soit Z un schéma équidimensionnel sur S de dimension n dominant la même composante irréductible que $\mathcal{O}$. Le schéma $\mathcal{O} \times_S Z$ possède une unique composante irréductible $\mathcal{Z}$ dominant $\mathcal{O}$ et cette dernière est plate et équidimensionnelle sur $\mathcal{O}$ de dimension n. Supposons donné un cycle α de la forme

$$\alpha = \sum_Z \alpha_Z[Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres Z de X qui sont équidimensionnels sur S de dimension n, les α_Z non nuls étant en nombre fini. On peut associer à α le cycle

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\circledast}\alpha := \sum_Z \alpha_Z[\mathrm{Spec}(K) \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Z}] \tag{2}$$

la somme étant restreinte aux sous-schémas fermés qui dominent la même composante irréductible de S que $\mathcal{O}$. On prendra garde néanmoins que pour un K-point épais $\underline{s}$ de S, le choix de l'épaississement n'est pas unique et qu'en toute généralité rien n'assure que les cycles (2) pour des épaississements distincts soient égaux. Ceci explique l'introduction dans [28, Definition 3.1.3] du groupe abélien $PropCycl_{equi}(X/S, n)$ formé des cycles

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i[Z_i]$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

– Les Z_i sont des sous-schémas fermés intègres de X équidimensionnels et propres sur S de dimension n [4].
– Pour tout K-point épais $\underline{s}$ de S, le cycle $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\circledast}\alpha$ est indépendant de l'épaississement $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$ choisi.

L'opération essentielle sur les cycles relatifs est l'opération de changement de base

$$\theta^{\circledast} : PropCycl_{equi}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} \to PropCycl_{equi}(X_T/T, n)_{\mathbb{Q}}$$

pour un morphisme de schémas $\theta : T \to S$ qui est construite de sorte que l'on ait

$$\underline{s}^{\circledast}\alpha = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\circledast}\alpha$$

pour un K-point épais $\underline{s}$ et un épaississement $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$ de ce dernier. En général un cycle obtenu par changement de base n'est pas nécessairement à coefficients entiers, en revanche par construction les dénominateurs pouvant apparaître ne peuvent avoir comme facteurs premiers que les caractéristiques résiduelles de S aux points images des points génériques des composantes irréductibles de T.

[4]Dans le cas $n = 0$ cela revient à dire que les Z_i sont finis et dominants sur une composante irréductible de S.

Finalement on introduit le sous-groupe $c_{\text{equi}}(X/S,n)$ de $PropCycl_{equi}(X/S,n)$ formé des cycles universellement entiers c'est à dire des cycles α tels que $\theta^{\circledast}\alpha$ soit à coefficients entiers pour tout morphisme de schéma $\theta : T \to S$.

Le changement de base permet alors de définir l'opération Cor. Soient X un S-schéma et Y un X-schéma. Supposons donnés un cycle $\alpha \in c_{\text{equi}}(Y/X,n)$ et un cycle $\beta \in c_{\text{equi}}(X/S,m)$ que l'on écrit

$$\beta = \sum_Z \beta_Z[Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de X propres et équidimensionnels sur S de dimension m. Pour un tel sous-schéma, on a le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \times_X Z \arrow[r, "(\iota_Z)_Y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "\iota_Z"] & X \end{tikzcd}$$

et on peut considérer le cycle

$$Cor(\alpha,\beta) = \sum_Z \beta_Z (\iota_Z)_{Y*}\iota_Z^{\circledast}\alpha$$

qui appartient à $c_{\text{equi}}(Y/S,n+m)$ d'après le corollaire 3.7.5 de [28]. Nous utilisons dans la suite le lemme suivant.

LEMME 1.1. *Soient X un S-schéma et $p : Y \to Y'$ un morphisme de X-schémas. Pour tout cycle $\alpha \in c_{\text{equi}}(Y/X,n)$ et $\beta \in c_{\text{equi}}(X/S,m)$, on a*

$$Cor(p_*\alpha,\beta) = p_*Cor(\alpha,\beta)$$

dans $c_{\text{equi}}(Y'/S,n+m)$.

Démonstration. Par linéarité on peut supposer $\beta = [Z]$ où Z est un sous-schéma fermé intègre de X. Notons ι l'immersion fermée correspondante, en utilisant les notations du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & Y' \times_X Z \arrow[rr, "\iota_{Y'}"] \arrow[d, dotted] & & Y' \arrow[dd] \\ Y \times_X Z \arrow[ur, "p_Z"] \arrow[rr, "\iota_Y"] \arrow[r] & Z & Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr] & \\ & & & X \end{tikzcd}$$

la proposition 3.6.2 de [28] assure que

$$\begin{aligned} Cor(p_*\alpha,\beta) &= \iota_{Y'*}\iota^{\circledast}p_*\alpha = \iota_{Y'*}p_{Z*}\iota^{\circledast}\alpha \\ &= p_*\iota_{Y*}\iota^{\circledast}\alpha = p_*Cor(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

□

1.2 Correspondances finies

Hormis un survol dans [26, Appendix 1A], cette notion n'est disponible dans la littérature que dans le cas des corps. L'extension aux schémas de base quelconques [5] ne présente aucune difficulté et s'avère une application de la théorie générale des cycles relatifs de [28]. Nous énonçons sans démonstration certaines propriétés élémentaires des correspondances finies : on trouvera plus de détails dans la thèse de l'auteur [20, §2.1].

Définition 1.2. Soient X et Y deux S-schémas. Les S-correspondances finies de X dans Y sont les éléments du groupe abélien

$$c_S(X,Y) := c_{\mathrm{equi}}(X \times_S Y/X, 0).$$

La composition des correspondances finies est fournie par la relation

$$\beta \circ \alpha := p^{XYZ}_{XZ*} Cor(p^{XY\circledast}_X \beta, \alpha) \tag{3}$$

dans laquelle $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$.

Remarque 1.3. Dans la formule (3) donnant la composition p^{XYZ}_{XZ} désigne la projection de $X \times_S Y \times_S Z$ sur $X \times_S Z$ et p^{XY}_X la projection de $X \times_S Y$ sur X. Nous utilisons ce type de notation pour les projections dans le reste de ce travail.

Dans la suite nous utilisons la notation suivante.

Notation 1.4. Nous désignons par Δ_p l'immersion fermée $X \hookrightarrow X \times_S Y$ associée à un morphisme de S-schémas $p : X \to Y$ et par Γ_p le graphe de ce dernier. Celui-ci définit une correspondance finie de X dans Y que nous notons $[p]$.

Lemme 1.5. *Soient X, Y, Z et W des S-schémas.*

(a) Étant données des correspondances finies $\alpha \in c_S(X,Y)$, $\beta \in c_S(Y,Z)$ et $\gamma \in c_S(Z,W)$ on a
$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

(b) Pour tout morphisme de S-schémas $p : X \to Y$ et toute correspondance finie $\alpha \in c_S(Y,Z)$ on a
$$\alpha \circ [p] = p^{\circledast}\alpha.$$

(c) Pour tout morphisme de S-schémas $p : Y \to Z$ et toute correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$ on a
$$[p] \circ \alpha = (\mathrm{id}_X \times_S p)_*\alpha.$$

(d) Pour tout morphisme de S-schémas $p : X \to Y$ et $q : Y \to Z$ on a
$$[q] \circ [p] = [q \circ p].$$

[5] Le cas plus restreint des schémas lisses de type fini sur une base réguliere est traité dans [6] en utilisant les multiplicités d'intersection de Serre. Nous renvoyons à la proposition 1.8 pour le lien entre ces deux approches.

En particulier le lemme 1.5 assure qu'en prenant pour objets les S-schémas et pour morphismes les correspondances finies, on obtient une catégorie SchCor_S munie d'un foncteur pleinement fidèle

$$[-] : \mathrm{Sch}_S \to \mathrm{SchCor}_S. \tag{4}$$

qui à un morphisme de schémas associe son graphe. La définition suivante est donc licite :

DÉFINITION 1.6. Nous désignons par SchCor_S la catégorie des S-schémas munis des correspondances finies ayant pour objet les S-schémas et dont les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SchCor}_S}([X],[Y]) := c_S(X,Y)$$

pour des S-schémas X et Y. La notation VarCor_S (resp. SmCor_S) fait référence à la sous-categorie strictement pleine obtenue en restreignant les objets aux seuls schémas de type fini sur S (resp. lisses de type fini sur S).

L'opération « correspondance » de [28] permet de définir un produit associatif et commutatif sur les cycles relatifs via la composition

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} c_{\mathrm{equi}}(X/S,0) \\ \otimes \\ c_{\mathrm{equi}}(Y/S,0) \end{matrix} \arrow[r, "\pi^{\circledast}_{Y/S}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend left, "\times_S"] & \begin{matrix} c_{\mathrm{equi}}(X\times_S Y/Y,0) \\ \otimes \\ c_{\mathrm{equi}}(Y/S,0) \end{matrix} \arrow[r, "Cor"] & c_{\mathrm{equi}}(X\times_S Y/S,0).
\end{tikzcd}$$

Ce produit est compatible aux morphismes de changement de base. En posant pour $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(X',Y')$

$$\alpha \otimes \beta := (p_X^{XX'\circledast}\alpha) \times_{X\times_S X'} (p_{X'}^{XX'}\beta)$$

on définit sur la catégorie additive SchCor_S une structure tensorielle naturelle compatible via le foncteur (4) avec la structure monoïdale symétrique induite par le produit fibré sur Sch_S.

Remarque 1.7. Étant donnés des S-schémas X, Y et une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$, le carré

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{[\Delta_X]}"] \arrow[d, "\alpha"'] & X\times_S X \arrow[d, "\alpha\otimes\alpha"] \\
Y \arrow[r, "{[\Delta_Y]}"] & Y\times_S Y
\end{tikzcd}$$

n'est pas nécessairement commutatif lorsque α n'est pas une correspondance finie obtenue à partir d'un morphisme de S-schémas.

La proposition suivante montre que la composition définie par les relations (3) coïncident avec la composition des correspondances finies pour les schémas lisses de type fini sur une base régulière obtenue via la théorie de l'intersection et considérée dans [29, 6].

PROPOSITION 1.8. *Supposons que S soit régulier et que X, Y, Z soient des S-schémas lisses de type fini. Alors pour toute correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$*

(a) les cycles $p_{XY}^{XYZ*}\alpha$ et $p_{YZ}^{XYZ*}\beta$ s'intersectent proprement,

(b) la composition des correspondances α et β est donnée par

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ*}^{XYZ}\left(p_{XY}^{XYZ*}\alpha \frown p_{YZ}^{XYZ*}\beta\right)$$

où $\frown$ désigne le produit d'intersection.

Nous utiliserons dans la suite l'extension aux schémas munis des correspondances finies de l'opération classique de changement de base. Étant donnés un morphisme de schémas $\theta : T \to S$ et des S-schémas X, Y, nous pouvons considérer le morphisme de changement de base induit par le morphisme θ_X

$$\theta_X^{\circledast} : c_{\mathrm{equi}}(X \times_S Y/X, 0) \to c_{\mathrm{equi}}((T \times_S X) \times_S (X \times_S Y)/T \times_S X, 0).$$

Sachant que l'on a les isomorphismes

$$(T \times_S X) \times_S (X \times_S Y) = T \times_S (X \times_S Y) = (T \times_S X) \times_T (T \times_S Y)$$

ce dernier nous donne en fait un morphisme de changement de base

$$T \times_S - : c_S(X,Y) \to c_T(T \times_S X, T \times_S Y).$$

Nous noterons souvent α_T la T-correspondance finie obtenue par changement de base à partir d'une S-correspondance finie α. Les propriétés élémentaires du changement de base sont rassemblées dans le lemme ci-dessous.

LEMME 1.9. *Soient $\theta : T \to S$ un morphisme de schémas et X, X', Y, Y', Z des S-schémas.*

(a) Étant données $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$, on a

$$\beta_T \circ \alpha_T = (\beta \circ \alpha)_T.$$

(b) Étant données $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Y')$, on a

$$\alpha_T \otimes \beta_T = (\alpha \otimes \beta)_T.$$

(c) Si $p : X \to Y$ est un morphisme de S-schémas alors $[p]_T = [p_T]$.

Le lemme 1.9 assure que le morphisme de changement de base $T \times_S -$ est fonctoriel, tensoriel et qu'en outre le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sch}_S \arrow[r, "T\times_S -"] \arrow[d, "{[-]}"'] & \mathrm{Sch}_T \arrow[d, "{[-]}"] \\
\mathrm{SchCor}_S \arrow[r, "T\times_S -"'] & \mathrm{SchCor}_T.
\end{tikzcd}$$

Définition 1.10. Soit $\mathcal{S} = \mathrm{Sch}_S, \mathrm{Var}_S, \mathrm{Sm}_S$. Un préfaisceau avec transferts sur $\mathcal{S}$ est un préfaisceau additif de groupes abéliens sur la catégorie $\mathcal{S}\mathrm{Cor}_S$. Un faisceau Nisnevich (étale) avec transferts est un préfaisceau avec transferts dont la restriction à $\mathcal{S}$ est un faisceau Nisnevich (resp. étale). Nous notons $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S})$) la catégorie des faisceaux Nisnevich (resp. étales) avec transferts sur $\mathcal{S}$.

1.3 Motifs mixtes géométriques

La topologie de Nisnevich intervient dans cette sous-section via la définition suivante.

Définition 1.11. On appelle carré distingué élémentaire pour la topologie de Nisnevich, un carré cartésien excisif de Sm_S

$$\begin{tikzcd}
U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[r, "e"'] & X
\end{tikzcd} \tag{5}$$

dans lequel e est une immersion ouverte et p un morphisme étale.

Définition 1.12. La catégorie $\underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$ est la catégorie triangulée tensorielle

$$\underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S) = \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)/E_{gm}(S)$$

obtenue par passage au quotient par la sous-catégorie triangulée épaisse $E_{gm}(S)$ de $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)$ engendrée par les complexes :

– *Homotopie* :

$$[\mathbb{A}^1_X] \xrightarrow{[\pi]} [X] \tag{6}$$

où X est un S-schéma lisse de type fini et π la projection de $\mathbb{A}^1_X$ sur X.

– *Mayer-Vietoris pour la topologie de Nisnevich* :

$$[U \times_S X] \longrightarrow [U] \oplus [V] \xrightarrow{[e]\oplus(-[p])} [X] \tag{7}$$

pour tout carré distingué élémentaire pour la topologie de Nisnevich de la forme (5).

Remarque 1.13. Sachant que le complexe (6) est le cône dans $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)$ du morphisme $[\mathbb{A}^1_X] \to [X]$ induit par la projection et que le complexe (7) est le cône du morphisme canonique entre le cône du morphisme de $[U \times_X V]$ dans $[U] \oplus [V]$ et $[X]$, un foncteur triangulé

$$F : \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S) \to \mathcal{T}$$

se prolonge à la catégorie $\underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(a) Le morphisme $F(\mathbb{A}^1_X) \to F(X)$ induit par la projection est un isomorphisme.

(b) Le triangle de Mayer-Vietoris

$$F(U \times_X V) \to F(U) \oplus F(V) \to F(X) \to F(U \times_X V)[1]$$

est distingué.

DÉFINITION 1.14. La catégorie des motifs géométriques effectifs que nous noterons

$$DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$$

est l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie triangulée $\underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$.

Remarque 1.15. La catégorie introduite à la définition 1.14 possède une structure naturelle de catégorie triangulée d'après le théorème 1.5 de [4].

Nous notons M le foncteur canonique

$$M : \mathrm{Sm}_S \to DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$$

qui à un S-schéma lisse de type fini X associe son motif géométrique $M(X)$ image de l'objet $[X]$ de SmCor_S dans la catégorie des motifs mixtes géométriques effectifs.

En posant $DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)(n) := DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$, on dispose d'un 2-système inductif, indexé par l'ensemble ordonné $\mathbb{Z}$, de catégories triangulées tensorielles

$$n \mapsto DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)(n)$$

avec pour foncteurs de transition si $m \geq n$

$$- \otimes \mathbb{Z}(m-n) : DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)(n) \to DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)(m)$$

Par définition les catégories des motifs mixtes non effectifs sont données par les 2-colimites de ces systèmes

$$DM_{gm}(S) := 2\text{-}\operatorname*{colim}_n DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)(n).$$

Ces catégories $DM_{gm}(S)$ héritent d'une structure tensorielle. En effet il s'agit de voir que la permutation cyclique des facteurs du motif $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$ est l'identité dans $DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$ et cette propriété résulte du lemme 3.13 de [24].

2 Localisation des correspondances finies

Dans cette section nous donnons deux résultats de décomposition locale des correspondances finies pour la topologie de Nisnevich. Nous utilisons de manière cruciale les propriétés des anneaux locaux henséliens lors de la construction de ces décompositions, en particulier ces dernières ne possèdent pas d'analogue en topologie de Zariski.

L'existence de ces décompositions locales est aussi valable lorsque l'on remplace la topologie de Nisnevich par la topologie étale. Les démonstrations sont identiques à condition de substituer les anneaux locaux strictement henséliens aux anneaux locaux henséliens et nous avons choisi pour simplifier la présentation de ne donner les détails que pour la topologie de Nisnevich. Les modifications mineures à effectuer lorsque l'on considère la topologie étale sont données dans la sous-section 2.4.

2.1 Schémas décomposés

Nous dirons qu'un S-schéma est décomposé pour la topologie de Nisnevich lorsqu'il est une réunion disjointe non nécessairement finie de S-schémas locaux henséliens. À un S-schéma X on peut associer fonctoriellement un S-schéma décomposé pour la topologie de Nisnevich

$$X^{\mathfrak{h}} := \coprod_{x \in X} X^{\mathfrak{h}}_x$$

réunion disjointe sur les points de X des schémas locaux henséliens $X^{\mathfrak{h}}_x$ spectre de l'anneau local hensélien $\mathcal{O}^h_{X,x}$ dont on notera le point fermé abusivement par x. Pour tout point x de X on dispose du morphisme canonique

$$\begin{tikzcd} X^{\mathfrak{h}}_x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}"] & \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

nous donnant un morphisme de schémas $\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_X : X^{\mathfrak{h}} \to X$.

La propriété universelle des hensélisés se traduit par le fait que la composition par $\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_X$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_S}(D, X^{\mathfrak{h}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_S}(D, X) \tag{8}$$

pour tout S-schéma D décomposé pour la topologie de Nisnevich. On remarquera que le morphisme

$$\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X^{\mathfrak{h}}} : (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}} \to X^{\mathfrak{h}}$$

n'est pas un isomorphisme en général, mais qu'il admet cependant une section canonique $\mathfrak{s}^{\mathfrak{h}}_X$ identifiant $X^{\mathfrak{h}}$ à un sous-schéma fermé de $(X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}$ et provenant du fait que l'anneau local hensélien de $X^{\mathfrak{h}}_x$ en son point fermé est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}^h_{X,x}$:

$$\begin{tikzcd} X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{s}^{\mathfrak{h}}_X"] \arrow[rr, bend right, equal, "\mathrm{id}_{X^{\mathfrak{h}}}"'] & (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{r}^{\mathfrak{h}}_{X^{\mathfrak{h}}}"] & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{r}^{\mathfrak{h}}_X"] & X \end{tikzcd}$$

Autrement dit dans $(X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}$ apparaissent des facteurs supplémentaires correspondant aux points non fermés des $X^{\mathfrak{h}}_x$.

2.2 Une homotopie canonique

Étant donnés un S-schéma X et un X-schéma U, nous notons $\check{C}_X(U)$ le schéma simplicial de Čech dont les n-simplexes sont donnés par le produit fibré sur X de $n+1$-copies de U

$$\check{C}_X(U)_n = U_X^{n+1} = \underbrace{U \times_X \cdots \times_X U}_{n+1 \text{ termes}}$$

la i-ème dégénérescence δ_i^n étant le morphisme de projection sur chaque facteur sauf le i-ème et la i-ème face σ_i^n le morphisme induit par l'immersion diagonale sur le i-ème facteur. Ce schéma simplicial nous définit un complexe de Čech augmenté dans la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts [6]

$$\check{C}_{U/X} : \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\check{C}_X(U)_n] \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\check{C}_X(U)_{n-1}] \to \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]. \tag{9}$$

dont la différentielle est donnée par la somme alternée des morphismes induits par les dégénérescences

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\delta_i^n)_*.$$

Dans la suite nous nous intéressons dans un premier temps aux sections de (9) sur les schémas locaux henséliens puis nous raffinons les résultats obtenus en considérant cette fois les fibres pour la topologie de Nisnevich.

2.2.1 Cas des sections sur les schémas locaux henséliens

Étant donné un S-schéma $\mathcal{O}$, en prenant les sections sur $\mathcal{O}$ du complexe de Čech précédent on obtient un complexe de groupes abéliens

$$\check{C}_{U/X}(\mathcal{O}) : \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[U_X^2\right](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[U](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X](\mathcal{O}) \to 0 \to \cdots .$$

[6] Nous renvoyons à définition 1.10 pour la notion de faisceau Nisnevich avec transferts. $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]$ désigne selon les conventions usuelles le faisceau Nisnevich avec transferts représentable associé à X.

Le résultat essentiel assurant l'existence d'une décomposition locale canonique des correspondances finies consiste en un raffinement de la proposition 3.1.3 de [29]. Cette dernière assure que lorsque U est un recouvrement Nisnevich de X et $\mathcal{O}$ est un schéma local hensélien, le complexe $\check{C}_{U/X}(\mathcal{O})$ est exact. Lorsque l'on remplace le recouvrement Nisnevich U par le schéma décomposé $X^{\mathfrak{h}}$ le complexe

$$\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}(\mathcal{O}) : \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^2_X\right](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X^{\mathfrak{h}}](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X](\mathcal{O}) \to 0 \to \cdots \tag{10}$$

est non seulement exact mais devient en fait canoniquement homotope à zéro. Plus précisément :

Proposition 2.1. *Soient X un S-schéma et $\mathcal{O}$ un S-schéma local hensélien. Il existe des morphismes canoniques*

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right](\mathcal{O}) \qquad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

(a) (Homotopie) On a pour tout n les relations

$$d_{n+1} \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n} + \sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n-1} \circ d_n = \mathrm{id}. \tag{11}$$

(b) (Fonctorialité) Étant donnés un S-schéma local hensélien $\mathcal{O}'$ et une correspondance finie $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right](\mathcal{O}) \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right](\alpha)"] \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right](\mathcal{O}') \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n}"] \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right](\mathcal{O}) \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right](\alpha)"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right](\mathcal{O}'). \end{tikzcd} \tag{12}$$

Remarque 2.2. En pratique pour les applications — [21, 22] et section 4 du présent article — seuls les cas $n = 0$ des propositions 2.1 et 2.7 nous seront utiles.

Démonstration. Étant donné un sous-schéma fermé Z de $\mathcal{O} \times_S X$ fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}$, on note W le sous-schéma fermé de $\mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}}$ défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d] \\ \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathcal{O} \times_S X. \end{tikzcd}$$

Sachant que dans le carré précédent les morphismes verticaux sont des immersions fermées et que

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\times_S (X^{\natural})^n_X &= \mathcal{O}\times_S \left(\underbrace{X^{\natural}\times_X\cdots\times_X X^{\natural}}_{n+1\text{ termes}}\right)\\ &= \underbrace{(\mathcal{O}\times_S X^{\natural})\times_{(\mathcal{O}\times_S X)}\cdots\times_{(\mathcal{O}\times_S X)}(\mathcal{O}\times_S X^{\natural})}_{n+1\text{ termes}}\\ &= (\mathcal{O}\times_S X^{\natural})^n_{\mathcal{O}\times_S X}\end{aligned}$$

on voit que W^n_Z est un sous-schéma fermé de $\mathcal{O}\times_S (X^{\natural})^n_X$. En particulier on a des sous-groupes

$$c_{\text{equi}}(W^n_Z/\mathcal{O},0)\subset \mathbb{Z}_{\text{tr}}\left[(X^{\natural})^n_X\right](\mathcal{O})$$

définissant un sous-complexe de (10)

$$\cdots\to c_{\text{equi}}(W^2_Z/\mathcal{O},0)\to c_{\text{equi}}(W^1_Z/\mathcal{O},0)\to c_{\text{equi}}(Z/\mathcal{O},0)\to 0\cdots. \tag{13}$$

Les complexes (13) sont fonctoriels pour l'inclusion des sous-schémas fermés Z finis et équidimensionnels sur $\mathcal{O}$ et on voit que le complexe (10) est la colimite sur de tels sous-schémas fermés de ces complexes. En effet il s'agit de voir que pour tout n

$$\operatorname*{colim}_Z c_{\text{equi}}(W^n_Z,\mathcal{O},0)=\mathbb{Z}_{\text{tr}}\left[(X^{\natural})^n_X\right](\mathcal{O}) \tag{14}$$

la colimite étant prise sur les sous-schémas fermés de $\mathcal{O}\times_S X$ équidimensionnels et finis sur $\mathcal{O}$. Soit $\mathcal{W}$ un sous-schéma fermé intègre de $\mathcal{O}\times_S (X^{\natural})^n_X$ équidimensionnel et fini sur $\mathcal{O}$. Comme les images de $\mathcal{W}$ par les morphismes

$$\mathcal{O}\times_S (X^{\natural})^n_X \xrightarrow[\substack{\text{la } i\text{-ème}\\ \text{projection}}]{\substack{\text{morphisme}\\ \text{induit par}}} \mathcal{O}\times_S X^{\natural} \xrightarrow{\mathcal{O}\times_S \iota^{\natural}_X} \mathcal{O}\times_S X$$

sont des sous-schémas fermés intègres de $\mathcal{O}\times_S X$ finis et équidimensionnels sur $\mathcal{O}$, il existe un sous-schéma fermé Z fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}$ qui les contient toutes. Pour un tel Z notre $\mathcal{W}$ est un sous-schéma fermé de W^n_Z ce qui prouve la relation (14).

Nous allons construire pour chacun des complexes (13) une homotopie canonique. Comme Z est fini sur le schéma local hensélien $\mathcal{O}$, il est lui même semi-local hensélien [7] donc décomposé pour la topologie de Nisnevich de la forme

$$Z=\coprod_{\substack{z\text{ point fermé}\\ \text{de } Z}}\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}).$$

[7]Cette propriété des anneaux henséliens est cruciale, un raisonnement analogue ne peut donc s'appliquer à la topologie de Zariski.

En particulier la propriété universelle (8) nous assure l'existence d'un unique morphisme θ_Z factorisant la projection π_Z de Z sur X sous la forme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dotted, "\theta_Z"'] \arrow[rr, bend left, "\pi_Z"] & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\iota^{\mathfrak{h}}_X"'] & X. \end{tikzcd}$$

La propriété universelle des produits fibrés nous fournit alors une section canonique $\sigma^{\mathfrak{h}}_Z$ du morphisme r via le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dotted, "\sigma^{\mathfrak{h}}_Z"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_Z"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_Z"'] & W \arrow[r, "r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\pi_Z"] \\ & \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{O} \times_S X \arrow[d] \\ & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\iota^{\mathfrak{h}}_X"'] & X. \end{tikzcd} \tag{15}$$

On peut alors considérer les morphismes de schémas

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n} = \sigma^{\mathfrak{h}}_Z \times_Z \mathrm{id}_{W^n_Z} : W^n_Z \to W^{n+1}_Z.$$

Ces derniers vérifient les relations pour $i = 0, \dots, n$

$$\delta^{n+1}_{i+1} \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n} = \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n-1} \circ \delta^n_i \qquad \delta^{n+1}_0 \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n} = \mathrm{id}$$

ce qui assure que les morphismes induits sur les cycles équidimensionnels

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,Z,n} := (\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n})_* : c_{\mathrm{equi}}(W^n_Z/\mathcal{O}, 0) \to c_{\mathrm{equi}}(W^{n+1}_Z/\mathcal{O}, 0)$$

définissent une homotopie entre l'identité du complexe (13) et le morphisme nul.

Lorsque Z' est un sous-schéma fermé de $\mathcal{O} \times_S X$ fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}$ contenant Z, les factorisations précédemment obtenues sont compatibles

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dd] \arrow[dr, "\theta_Z"'] \arrow[drr, bend left, "\pi_Z"] & & \\ & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\iota^{\mathfrak{h}}_X"] & X \\ Z' \arrow[ur, "\theta_{Z'}"'] \arrow[urr, bend right, "\pi_{Z'}"'] & & \end{tikzcd}$$

et en particulier la construction de la section $\sigma^{\natural}_Z$ assure que le carré

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\sigma^{\natural}_Z"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ Z' \arrow[r, "\sigma^{\natural}_{Z'}"] & W' \end{tikzcd}$$

est commutatif et donc que le diagramme obtenu au niveau des cycles algébriques

$$\begin{tikzcd} c_{\mathrm{equi}}(W^n_Z/\mathcal{O},0) \arrow[r, "\sigma^{\natural}_{\mathcal{O},X,Z,n}"] \arrow[dd] & c_{\mathrm{equi}}(W^{n+1}_Z/\mathcal{O},0) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^{n+1}_X\right](\mathcal{O}) \\ c_{\mathrm{equi}}\left((W')^n_{Z'}/\mathcal{O},0\right) \arrow[r, "\sigma^{\natural}_{\mathcal{O},X,Z',n}"] & c_{\mathrm{equi}}\left((W')^{n+1}_{Z'}/\mathcal{O},0\right) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

l'est aussi. En passant à la colimite sur les sous-schémas fermés Z on obtient ainsi un morphisme

$$\sigma^{\natural}_{\mathcal{O},X,n} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^n_X\right](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^{n+1}_X\right](\mathcal{O})$$

et ces derniers nous donnent une homotopie canonique du complexe (10).

Montrons maintenant que le carré (12) est commutatif autrement dit que l'on a l'égalité

$$\sigma^{\natural}_{\mathcal{O}',X,n}(\beta\circ\alpha) = \sigma^{\natural}_{\mathcal{O},X,n}(\beta)\circ\alpha$$

pour toute correspondance finie $\beta \in c_S\left(\mathcal{O},(X^{\natural})^n_X\right)$. Fixons pour cela un sous-schéma fermé Z de $\mathcal{O}\times_S X$ fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}$ de sorte qu'en notant ι_n l'immersion fermée de W^n_Z dans $\mathcal{O}\times_S (X^{\natural})^n_X$ on ait

$$\beta = (\iota_n)_*\overline{\beta} \qquad \overline{\beta}\in c_{\mathrm{equi}}(W^n_Z/\mathcal{O},0).$$

De même fixons un sous-schéma fermé $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}$ fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}'$ de sorte qu'en notant ι l'immersion fermée de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}$ on ait

$$\alpha = \iota_*\overline{\alpha} \qquad \overline{\alpha}\in c_{\mathrm{equi}}(\mathcal{Z}/\mathcal{O}',0).$$

Notons alors Z'' le sous-schéma fermé de $\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}\times_S X$ défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Z'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{fini}"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{fini}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d, "\mathrm{fini}"] \\ \mathcal{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{fini}"] & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}'. & \end{tikzcd}$$

Fixons d'autre part un sous-schéma fermé Z' de $\mathcal{O}' \times_S X$ fini équidimensionnel sur $\mathcal{O}'$ tel que l'on ait le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\text{fini}"'] & \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X \arrow[d] \\
Z' \arrow[r] \arrow[d, "\text{fini}"'] & \mathcal{O}' \times_S X \arrow[dl] \\
\mathcal{O}' &
\end{tikzcd}$$

et convenons de noter W'' le schéma défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
W'' \arrow[r, "r''"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z'' \arrow[d] \\
\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X.
\end{tikzcd}$$

Par définition Z'' est fini sur le schéma local hensélien $\mathcal{O}'$, autrement dit semi-local hensélien et donc décomposé pour la topologie de Nisnevich de la forme

$$Z'' = \coprod_{\substack{z'' \text{ point fermé} \\ \text{de } Z''}} \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{Z'',z''}\right).$$

La propriété universelle (8) nous assure comme précédemment l'existence d'un unique morphisme $\theta_{Z''}$ factorisant la projection $\pi_{Z''}$ de Z'' sur X sous la forme

$$\begin{tikzcd}
Z'' \arrow[r, dotted, "\theta_{Z''}"'] \arrow[rr, bend left, "\pi_{Z''}"] & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_X"'] & X.
\end{tikzcd}$$

La propriété universelle des produits fibrés nous fournit une section canonique $\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z''}$ du morphisme r'' via le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z'' \arrow[r, dotted, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z''}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{Z''}"] \arrow[dr, bend right, "\theta_{Z''}"'] & W \arrow[r, "r''"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z'' \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\pi_{Z''}"] \\
 & \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X \arrow[d] \\
 & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_X"'] & X.
\end{tikzcd}$$

On a par ailleurs le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& Z'' \arrow[dl] \arrow[d, "\theta_{Z''}"] \arrow[dr] \arrow[dd, bend left=80, "\pi_{Z''}"] & \\
Z \arrow[r, "\theta_Z"] \arrow[dr, "\pi_Z"'] & X^{\mathfrak{h}} \arrow[d, "\iota^{\mathfrak{h}}_X"] & Z' \arrow[l, "\theta_{Z'}"'] \arrow[dl, "\pi_{Z'}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

ce qui assure que les carrés suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_Z"] & Z'' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z''}"] & Z' \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'}"] \\
W & W'' \arrow[l] \arrow[r] & W'.
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi que le diagramme suivant dans lequel p_n et q_n désignent respectivement les projections induites par les projections de Z'' sur Z et Z'

$$\begin{tikzcd}
& (W'')^{n+1}_{Z''} \arrow[dl, "q_{n+1}"'] \arrow[dr, "p_{n+1}"] & & & (W'')^{n}_{Z''} \arrow[lll, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'',n}"'] \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
& & (W')^{n+1}_{Z'} & & & (W')^{n}_{Z'} \arrow[lll, dotted, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z',n}"'] \\
W^{n+1}_Z & & & W^{n}_Z \arrow[lll, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n}"'] & &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'autre part on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(W'')^{n}_{Z''} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W^{n}_Z \arrow[d] \\
\mathcal{Z} \arrow[r] & \mathcal{O}.
\end{tikzcd}$$

Cela donne ainsi

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}(\beta\circ\alpha) &= \sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}\left[\left(p^{\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}\times_S X}_{\mathcal{O}'\times_S X}\right)_* Cor_{\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\beta,\alpha\right)\right] \\
&= \sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}\left[(\iota'_n)_*(p_n)_* Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\overline{\beta},\overline{\alpha}\right)\right] \\
&= (\iota'_{n+1})_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z',n})_*(p_n)_* Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\overline{\beta},\overline{\alpha}\right) \\
&= (\iota'_{n+1})_*(p_{n+1})_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'',n})_* Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\overline{\beta},\overline{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

D'autre part en utilisant la proposition 3.6.2 de [28] et le lemme 1.1, on voit que

$$\begin{aligned}(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'',n})_* Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\overline{\beta},\overline{\alpha}\right) &= Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left((\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'',n})_*\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\overline{\beta},\overline{\alpha}\right)\\ &= Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n})_*\overline{\beta},\overline{\alpha}\right)\end{aligned}$$

ce qui assure finalement que

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}(\beta\circ\alpha) &= (\iota'_{n+1})_*(p_{n+1})_* Cor_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{Z}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z,n})_*\overline{\beta},\overline{\alpha}\right)\\ &= \left[p^{\mathcal{O}\times_S\mathcal{O}'\times_S(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X}_{\mathcal{O}'\times_S(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X}\right]_* Cor_{\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}/\mathcal{O}'}\left(\left(p^{\mathcal{O}'\times_S\mathcal{O}}_{\mathcal{O}}\right)^{\circledast}\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n}(\beta),\alpha\right)\\ &= \sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n}(\beta)\circ\alpha.\end{aligned}$$

□

2.2.2 Cas des fibres pour la topologie de Nisnevich

Considérons maintenant les fibres Nisnevich du complexe (9). Rappelons que pour un point $x \in X$ on dispose d'un isomorphisme canonique

$$X^{\mathfrak{h}}_x = \lim_{U\in(\mathcal{V}^h_{X,x})^{\mathrm{op}}} U$$

où $\mathcal{V}^h_{X,x}$ désigne la catégorie des voisinages Nisnevich affines de x. La fibre Nisnevich d'un préfaisceau F au point x est alors donnée par

$$F_x = \operatorname*{colim}_{U\in(\mathcal{V}^h_{X,x})^{\mathrm{op}}} F(U).$$

Plus généralement considérons la définition suivante.

Définition 2.3. Soit $\mathcal{O}$ un S-schéma. On appelle présentation de $\mathcal{O}$ la donnée d'un triplet (Λ, U, u) vérifiant les conditions suivantes.
– Λ est une catégorie cofiltrante.
– $U : \Lambda \to \mathrm{Sch}_S; \lambda \mapsto U_\lambda$ est un système projectif de S-schémas indexé par Λ^{op} tel que pour tout morphisme $\lambda \to \mu$ de Λ le morphisme induit $U_\lambda \to U_\mu$ soit plat et affine.
– u est un isomorphisme de S-schémas $\mathcal{O} \to \lim_{\lambda\in\Lambda^{\mathrm{op}}} U_\lambda$.

Exemple 2.4. La catégorie $\mathcal{V}^h_{X,x}$ des voisinages Nisnevich affines de x fournit une présentation naturelle du schéma local hensélien $X^{\mathfrak{h}}_x$. De même pour un point $y \in X^{\mathfrak{h}}_x$ en remarquant que l'on a un isomorphisme canonique

$$(X^{\mathfrak{h}}_x)^{\mathfrak{h}}_y = \lim_{U\in(\mathcal{V}^h_{X,x})^{\mathrm{op}},V\in(\mathcal{V}^h_{U,z})^{\mathrm{op}}} V$$

on obtient une présention naturelle du S-schéma local hensélien $(X^{\mathfrak{h}}_x)^{\mathfrak{h}}_y$. On remarquera que lorsque X est (lisse) de type fini sur S les schémas apparaissant dans les systèmes projectifs précédemment décrit sont tous (lisses) de type fini sur S.

Notation 2.5. Étant donnés un S-schéma X et une présentation d'un S-schéma $\mathcal{O}'$ il sera commode de disposer des groupes abéliens [8]

$$c_S\{\mathcal{O}, X\} := \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda^{\mathrm{op}}} c_S(U_\lambda, X)$$

$$c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O}\} := \lim_{\lambda\in\Lambda^{\mathrm{op}}} c_S(\mathcal{O}', U_\lambda) \qquad c_S\{\mathcal{O}', \mathcal{O}\} := \lim_{\lambda\in\Lambda^{\mathrm{op}}} c_S\{\mathcal{O}', U_\lambda)$$

Lorsque F est un préfaisceau (avec transferts) on pose également

$$F\{\mathcal{O}\} := \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda^{\mathrm{op}}} F(U_\lambda)$$

de sorte que $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]\{\mathcal{O}\} = c_S\{\mathcal{O}, X)$ avec les notations précédentes.

On dispose via u d'un morphisme naturel $F\{\mathcal{O}\} \to F(\mathcal{O})$ et les transferts induisent des morphismes naturels s'inscrivant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
c_S\{\mathcal{O}', \mathcal{O}) \otimes F\{\mathcal{O}\} \arrow[r] \arrow[d] & c_S\{\mathcal{O}', \mathcal{O}) \otimes F(\mathcal{O}) \arrow[d] \\
c_S\{\mathcal{O}', \mathcal{O}\} \otimes F\{\mathcal{O}\} \arrow[r] \arrow[d] & F\{\mathcal{O}'\} \arrow[d] \\
c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O}\} \otimes F\{\mathcal{O}\} \arrow[r] & F(\mathcal{O}') \\
c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O}) \otimes F\{\mathcal{O}\} \arrow[r] \arrow[u] & c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O}) \otimes F(\mathcal{O}). \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{16}$$

Étant donné un élément $\alpha \in c_S\{\mathcal{O}', \mathcal{O})$ ou plus généralement un élément $\alpha \in c_S\{\mathcal{O}', \mathcal{O}\}$ nous désignerons dans la suite par

$$F\{\alpha\} : F\{\mathcal{O}\} \to F\{\mathcal{O}'\}$$

le morphisme induit. On remarquera que si $\beta \in c_S\{\mathcal{O}'', \mathcal{O}')$ et $\underline{\alpha}$ désigne l'image de α dans $c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ on a la relation

$$F\{\underline{\alpha} \circ \beta\} = F\{\beta\} \circ F\{\alpha\}.$$

Nous noterons également $F\{\alpha\} : F\{\mathcal{O}\} \to F(\mathcal{O}')$ le morphisme induit par un élément $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O}\}$. Le lemme suivant nous sera très utile dans la suite :

LEMME 2.6. *Étant donnés un S-schéma X et une présentation d'un S-schéma $\mathcal{O}$. Le morphisme canonique*

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]\{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X](\mathcal{O})$$

est injectif.

[8] Ces notations peuvent sembler ambiguës à priori puisque l'on néglige de préciser la présentation choisie. Néanmoins dans la suite cela n'entrainera aucune confusion, la présentation étant clairement définie par le contexte. Dans le cas des hensélisés nous utiliserons les présentations décrites dans l'exemple 2.4.

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, le morphisme $\mathcal{O} \to U_\lambda$ est plat et ainsi

$$c_S(U_\lambda, X) = c_{\mathrm{equi}}(U_\lambda \times_S X/U_\lambda, 0) \to c_S(\mathcal{O}, X) = c_{\mathrm{equi}}(\mathcal{O} \times_S X/\mathcal{O}, 0)$$

est donné par un simple changement de base plat. Soit $\alpha \in c_S(U_\lambda, X)$ une correspondance dont l'image dans $c_S(\mathcal{O}, X)$ soit nulle. Étant donné $\mu \in \Lambda/\lambda$, si Z_μ désigne le support de l'image α_μ dans $c_S(U_\mu, X)$ de α, il s'ensuit que la limite projective du système $\mu \mapsto Z_\mu$ est vide. Le théorème 8.10.5 de [14] assure alors que Z_μ est vide pour μ suffisamment grand et donc que $\alpha_\mu = 0$. L'injectivité en résulte. $\square$

Dans la situation précédente il est possible de raffiner la proposition 2.1 sous la forme suivante.

Proposition 2.7. *Étant donnés un S-schéma X et une présentation d'un S-schéma local hensélien $\mathcal{O}$. Il existe d'uniques morphismes*

$$\{\sigma\}^{\natural}_{\mathcal{O},X,n} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^n_X\right]\{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}\} \qquad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

(a) (Homotopie) On a pour tout n les relations

$$d_{n+1} \circ \{\sigma\}^{\natural}_{\mathcal{O},X,n} + \{\sigma\}^{\natural}_{\mathcal{O},X,n-1} \circ d_n = \mathrm{id}. \tag{17}$$

(b) (Compatibilité) Le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^n_X\right]\{\mathcal{O}\} \arrow[r, "\{\sigma\}^{\natural}_{\mathcal{O},X,n}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}\} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^n_X\right](\mathcal{O}) \arrow[r, "\sigma^{\natural}_{\mathcal{O},X,n}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\natural})^{n+1}_X\right](\mathcal{O}).
\end{tikzcd} \tag{18}$$

Démonstration. L'unicité de tels morphismes découle immédiatement de la commutativité de (18) et du lemme 2.6. Il suffit donc de donner une construction de ces morphismes en raffinant la preuve de la proposition 2.1. Introduisons la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les couples (λ, Z) où $\lambda \in \Lambda$ et Z est un sous-schéma fermé de $U_\lambda \times_S X$ fini et équidimensionnel sur U_λ. L'ensemble des morphismes de (λ, Z) dans (λ', Z') étant réduit à un élément si le schéma $Z_{\mathcal{O}}$ est contenu dans $Z'_{\mathcal{O}}$ et vide dans le cas contraire. Étant donné $(\lambda, Z) \in \mathcal{C}$, on note W le sous-schéma fermé de $V \times_S X^{\natural}$ défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d] \\
U_\lambda \times_S X^{\natural} \arrow[r] & U_\lambda \times_S X
\end{tikzcd}$$

ce qui fournit le complexe

$$\cdots \to \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^{n+1}_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) \to \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^{n}_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) \to \cdots. \tag{19}$$

Ces complexes sont fonctoriels par rapport aux morphismes dans $\mathcal{C}$ et en remarquant que

$$\operatorname*{colim}_{(\lambda,Z)\in\mathcal{C}} \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^{n}_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X^{\mathfrak{h}})^n_X\{\mathcal{O}\}$$

on voit que le complexe $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}\{\mathcal{O}\}$ est la colimite sur $\mathcal{C}$ des complexes (19). Nous allons construire comme précédemment une homotopie canonique pour chacun de ces complexes. Il résulte de la preuve de la proposition 2.1 que le morphisme $r_{\mathcal{O}} : W_{\mathcal{O}} \to Z_{\mathcal{O}}$ possède une section canonique

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{\mathcal{O}}} : Z_{\mathcal{O}} \to W_{\mathcal{O}}.$$

En particulier quitte à remplacer (λ, Z) par (μ, Z_{U_μ}) pour un certain élément $\mu \in (\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}$ cette section se relève en une section du morphisme r

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z} : Z \to W.$$

On peut alors considérer pour tout $\mu \in (\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}$ les morphismes de schémas

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu},n} = \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu}} \times_{Z_{U_\mu}} \mathrm{id}_{(W_{U_\mu})^n_{Z_{U_\mu}}} : (W_{U_\mu})^n_{Z_{U_\mu}} \to (W_{U_\mu})^{n+1}_{Z_{U_\mu}}.$$

Ces derniers vérifient les relations pour $i = 0, \ldots, n$

$$\delta^{n+1}_{i+1} \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu},n} = \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu},n-1} \circ \delta^n_i \qquad \delta^{n+1}_0 \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu},n} = \mathrm{id}$$

ce qui assure que les morphismes induits sur les cycles équidimensionnels

$$\{\sigma\}^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,(\lambda,Z),n} := \begin{array}{c} \operatorname{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^{n}_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) \\ \downarrow{\scriptstyle \operatorname{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}}(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu},n})_*} \\ \operatorname{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^{n+1}_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) \end{array}$$

définissent une homotopie entre l'identité du complexe (19) et le morphisme nul.

Supposons donné un morphisme $(\lambda, Z) \to (\lambda', Z')$ dans $\mathcal{C}$. Il résulte de la preuve de la proposition 2.1 que le carré

$$\begin{tikzcd} Z_{\mathcal{O}} \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{\mathcal{O}}}"] \arrow[d] & W_{\mathcal{O}} \arrow[d] \\ Z'_{\mathcal{O}} \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'_{\mathcal{O}}}"] & W'_{\mathcal{O}} \end{tikzcd}$$

commute. Il existe donc $\mu \in \Lambda$ et des morphismes $\lambda \leftarrow \mu \to \lambda'$ tels que le carré

$$\begin{tikzcd} Z_{U_\mu} \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_{U_\mu}}"] \arrow[d] & W_{U_\mu} \arrow[d] \\ Z'_{U_\mu} \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z'_{U_\mu}}"] & W'_{U_\mu} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Cela entraîne que le carré

$$\begin{tikzcd} \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^n_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) \arrow[r, "\{\sigma\}^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,(\lambda,Z),n}"] \arrow[d] & \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda)^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W_{U_\mu})^{n+1}_{Z_{U_\mu}}/U_\mu,0) \arrow[d] \\ \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda')^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W'_{U_\mu})^n_{Z'_{U_\mu}}/U_\mu,0) \arrow[r, "\{\sigma\}^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,(\lambda',Z'),n}"] & \operatorname*{colim}_{\mu\in(\Lambda/\lambda')^{\mathrm{op}}} c_{\mathrm{equi}}((W'_{U_\mu})^n_{Z'_{U_\mu}}/U_\mu,0) \end{tikzcd}$$

l'est aussi et en passant à la colimite sur $\mathcal{C}$ on obtient ainsi des morphismes

$$\{\sigma\}^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right]\{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}\}$$

fournissant une homotopie canonique du complexe $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}\{\mathcal{O}\}$. Il résulte immédiatement de la construction que le carré (18) est commutatif. □

Par application du lemme 2.6, la commutativité du carré supérieur de (16) ainsi que celle du carré (12) assurent que les morphismes construits dans la proposition précédente satisfont également le lemme suivant.

Lemme 2.8. *(Fonctorialité) Étant donnés une présentation d'un S-schéma local hensélien $\mathcal{O}'$ et un élément $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathcal{O}]\{\mathcal{O}'\}$, on a un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right]\{\mathcal{O}\} \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right]\{\alpha\}"] \arrow[d, "\{\sigma\}^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\right]\{\mathcal{O}'\} \arrow[d, "\{\sigma\}^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n}"] \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}\} \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right]\{\alpha\}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}'\}. \end{tikzcd}$$

Corollaire 2.9. *Soit X un S-schéma. Le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}$ est universellement exact au sens de Grayson [12].*

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour toute présentation d'un S-schéma local hensélien $\mathcal{O}$ le complexe

$$\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}\{\mathcal{O}\} : \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{h}})^2_X\right]\{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X^{\mathfrak{h}}]\{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]\{\mathcal{O}\} \to 0 \to \cdots$$

est universellement exact au sens de Grayson. Ceci découle de la proposition 2.1 puisque cette dernière assure que $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}\{\mathcal{O}\}$ est en fait homotope à zéro donc à fortiori universellement exact au sens de Grayson . □

Remarque 2.10. En dépit de la fonctorialité — lemme 2.8 — des homotopies construites dans la proposition 2.7, ces dernières ne peuvent généralement pas se relever en des morphismes de faisceaux avec transferts. En particulier le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\check{C}_{X^\natural/X} : \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^\natural)^2_X\right] \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X^\natural] \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X] \to 0 \to \cdots$$

bien qu'exact d'après le corollaire 2.9 n'est pas homotope à zéro en général.

2.3 Décomposition locale

2.3.1 Première décomposition locale

Nous abordons maintenant la décomposition locale d'une correspondance finie pour la topologie de Nisnevich. Les morphismes de schémas $\mathfrak{l}^\natural_{X,x}$ nous donnent un morphisme naturel

$$\bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O}, X^\natural_x\right) \xrightarrow{\sum_{x\in X}[\mathfrak{l}^\natural_{X,x}]\circ -} c_S(\mathcal{O}, X). \tag{20}$$

La remarque suivante résulte immédiatement de la définition des correspondances finies.

Remarque 2.11. On a un isomorphisme naturel $c_S(\mathcal{O}, X^\natural) = \bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O}, X^\natural_x\right)$ s'insérant dans le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O}, X^\natural_x\right) \arrow[r, "\sum_{x\in X}[\mathfrak{l}^\natural_{X,x}]\circ -"] \arrow[d, equal] & c_S(\mathcal{O}, X) \\
c_S(\mathcal{O}, X^\natural). \arrow[ur, "{[\mathfrak{l}^\natural_X]\circ -}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{O}$ est hensélien, la proposition précédente nous permet d'écrire une correspondance finie $\alpha \in c_S(\mathcal{O}, X)$ sous la forme d'une somme de contributions locales

$$\alpha = \sum_x [\mathfrak{l}^\natural_{X,x}] \circ \alpha_x \qquad \alpha_x \in c_S\left(\mathcal{O}, X^\natural_x\right)$$

la correspondance α_x étant canoniquement déterminée par α. Plus précisément on peut déduire de la proposition 2.1 l'énoncé suivant.

Corollaire 2.12. *Soient X un S-schéma et $\mathcal{O}$ un S-schéma local hensélien. Il existe un morphisme canonique*

$$c_S(\mathcal{O}, X) \xrightarrow{\sigma^\natural_{\mathcal{O},X}} \bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O}, X^\natural_x\right) \tag{21}$$

satisfaisant les propriétés suivantes.

(a) $\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}$ *est une section du morphisme (20) telle que le carré*

$$\begin{tikzcd} c_S(\mathcal{O},X) \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}"] \arrow[d, "c_S(\alpha,X)"] & \bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}_x\right) \arrow[d, "c_S(\alpha,X^{\mathfrak{h}}_x)"] \\ c_S(\mathcal{O}',X) \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X}"] & \bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O}',X^{\mathfrak{h}}_x\right) \end{tikzcd} \tag{22}$$

soit commutatif pour tout schéma local hensélien $\mathcal{O}'$ et toute correspondance finie $\alpha \in c_S(\mathcal{O}',\mathcal{O})$.

(b) Pour un S-morphisme $g : \mathcal{O} \to X$ la composante suivant le point x de l'image de $[g]$ par (21) est donnée par

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}([g])_x = \begin{cases} [\overline{g}] & \textit{si } x=\tau \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

τ étant l'image du point fermé de $\mathcal{O}$ et $\overline{g}$ le morphisme déduit de g

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[rr, bend left, "g"] & X^{\mathfrak{h}}_x \arrow[r, "\iota^{\mathfrak{h}}_{X,x}"] & X. \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate de la proposition 2.1. En effet le morphisme

$$\begin{tikzcd} c_S(\mathcal{O},X) \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,0}"] \arrow[rr, bend left, dotted, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}"] & c_S(\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}) \arrow[r, equal] & \bigoplus_{x\in X} c_S\left(\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}_x\right) \end{tikzcd}$$

est une section du morphisme (20) d'après la relation d'homotopie (11), et la commutativité du diagramme (22) n'est autre que celle du diagramme (12).

Considérons donc la seconde assertion. Pour reprendre les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 2.1, nous désignons par Z le sous-schéma fermé de $\mathcal{O}\times_S X$ graphe du morphisme g et par W le schéma défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d] \\ \mathcal{O}\times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathcal{O}\times_S X. \end{tikzcd}$$

Le sous-schéma fermé Z s'identifie à l'immersion fermée $\Delta_g : \mathcal{O} \to \mathcal{O}\times_S X$ et l'on voit que le morphisme θ_Z de la démonstration de la proposition 2.1

s'identifie à la composée de $\overline{g}$ et du morphisme d'inclusion $\iota : X^{\mathfrak{h}}_x \to X^{\mathfrak{h}}$. Dans ce cas le diagramme (15) est donc de la forme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \arrow[r, dotted, "\sigma^{\mathfrak{h}}_Z"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}}"] \arrow[rdd, bend right, "\iota\circ\overline{g}"'] & W \arrow[r, "r"] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\square"] & \mathcal{O} \arrow[d, "\Delta_g"] \arrow[dd, bend left, "g"] \\
 & \mathcal{O}\times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\square"] & \mathcal{O}\times_S X \arrow[d] \\
 & X^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_X"] & X
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve que $(\sigma^{\mathfrak{h}}_Z)_*([g]) = [\overline{g}]$. Par construction du morphisme $\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}$ cela se traduit par

$$\sigma_{\mathcal{O},X}([g])_x = \begin{cases} [\overline{g}] & \text{si } x = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est autre que l'égalité souhaitée. $\square$

Remarque 2.13. Supposons que X soit lui même un schéma local hensélien de point fermé s. On a vu que pour une correspondance finie $\alpha \in c_S(\mathcal{O}, X)$ on avait une décomposition locale

$$\alpha = \underbrace{\sum_{x\in X\setminus\{s\}} [\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\circ\alpha_x}_{\substack{\text{contribution des points}\\ \text{non fermés}}} + \alpha_s.$$

En général les correspondances α et α_s ne sont pas égales, autrement dit les points non fermés de X ont une contribution non nulle dans la décomposition locale. Prenons par exemple le cas où α est la correspondance finie associée à un morphisme de schéma. On voit d'après la seconde assertion du corollaire 2.12 que

$$\alpha_s = \begin{cases} \alpha & \text{si le morphisme est local} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et que de plus lorsque le morphisme est local non seulement la contribution globale des points non fermés est nulle mais encore chaque correspondance α_x associée à un point non fermé est nulle.

Compte tenu de la remarque 2.11, le morphisme donnant la décomposition locale peut être vu comme un morphisme

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X} : c_S(\mathcal{O}, X) \to c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}). \tag{23}$$

On dispose d'un morphisme d'inclusion

$$[\mathfrak{s}^{\mathfrak{h}}_X] \circ - : c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) \to c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}})$$

et d'un morphisme de localisation

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}} : c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) \to c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}).$$

Ces morphismes ne coïncident naturellement pas comme on le voit déjà avec la remarque 2.13. Sachant que le morphisme $\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X^{\mathfrak{h}}}$ n'est pas un isomorphisme en général, il est légitime de se demander si l'on obtient plus d'informations en localisant à nouveau le résultat fourni par le morphisme (23). Le lemme suivant montre qu'il n'en est rien.

Lemme 2.14. *Soient X un S-schéma et $\mathcal{O}$ un S-schéma local hensélien. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} c_S(\mathcal{O}, X) \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}"] \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}"] & c_S\left(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}\right) \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}}"] \\ c_S\left(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}\right) \arrow[r, "{[\mathfrak{s}^{\mathfrak{h}}_X]\circ -}"] & c_S\left(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}\right). \end{tikzcd} \tag{24}$$

Démonstration. Fixons une correspondance finie $\alpha \in c_S(\mathcal{O}, X)$ et désignons par Z son support qui est un sous-schéma fermé de $\mathcal{O} \times_S X$ fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}$. Notons $\mathcal{Z}$ le support de la correspondance finie

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}(\alpha) \in c_S\left(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}\right)$$

qui est un sous-schéma fermé de $\mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}}$ fini et équidimensionnel sur $\mathcal{O}$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{Z}}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{W} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Z} \arrow[d] & \\ W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d] \\ \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}\times_S X^{\mathfrak{h}}}"'] & \mathcal{O} \times_S (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathcal{O} \times_S X. \end{tikzcd}$$

Le schéma Z est semi-local hensélien donc de la forme

$$Z = \coprod_{\substack{z \text{ point fermé} \\ \text{de } Z}} \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{Z,z}\right).$$

Notons $z_1, \dots, z_n$ ses points fermés et désignons par $x_1, \dots, x_n$ leur projection sur X. Par construction de la section $\sigma_Z^{\mathfrak{h}}$, le diagramme (15) est commutatif et

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}(\alpha) = \iota_*(\sigma_Z^{\mathfrak{h}})_*(\alpha).$$

En particulier on voit que les points fermés du schéma semi-local $\mathcal{Z}$ se projettent nécessairement sur $x_1, \dots, x_n$. Cela entraîne que $\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{Z}}$ est en fait le morphisme d'inclusion de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{W}$ et donc que

$$\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}}\left[\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}(\alpha)\right] = \sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X}(\alpha)$$

dans $c_S\left(\mathcal{O},(X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}\right)$. Ce qui prouve la commutativité du diagramme (24). $\square$

En particulier lorsque l'on se donne une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$, on peut associer à un point x de X et un point y de Y une correspondance finie $\alpha_{x,y}$ du schéma $X_x^{\mathfrak{h}}$ dans le schéma $Y_y^{\mathfrak{h}}$ donnée par

$$\alpha_{x,y} := \sigma^{\mathfrak{h}}_{X_x^{\mathfrak{h}},Y}(\alpha \circ [\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_{X,x}])_y$$

On obtient ainsi une décomposition locale pour la topologie de Nisnevich de la correspondance α de la forme

$$\alpha \circ [\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_{X,x}] = \sum_{y \in Y} [\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}] \circ \alpha_{x,y}.$$

Notation 2.15. Pour un morphisme de S-schéma $g : X \to Y$ et un point x nous notons $g_x^{\mathfrak{h}}$ le morphisme de schémas locaux henséliens déduit de g

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \\ X_x^{\mathfrak{h}} \arrow[u, "\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_{X,x}"] \arrow[r, "g_x^{\mathfrak{h}}"] & Y^{\mathfrak{h}}_{g(x)}. \arrow[u, "\mathfrak{i}^{\mathfrak{h}}_{Y,g(x)}"'] \end{tikzcd}$$

La proposition suivante explicite le comportement par composition et itération de cette décomposition ainsi que la nature de la décomposition obtenue dans le cas d'un morphisme de schémas.

PROPOSITION 2.16. *Soient X, Y et Z des S-schémas.*

(a) *Étant données des correspondances finies $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$, on a pour tout point $x \in X$ et $z \in Z$ l'égalité*

$$(\beta \circ \alpha)_{x,z} = \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y}. \tag{25}$$

(b) *Étant donné un morphisme $g : X \to Y$ de S-schémas on a*

$$[g]_{x,y} = \begin{cases} [g_x^{\mathfrak{h}}] & \text{si } y = g(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) *Étant donnée une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$, on a l'égalité dans $c_S\big(X_x^{\mathfrak{h}}, (Y_y^{\mathfrak{h}})_z^{\mathfrak{h}}\big)$*

$$(\alpha_{x,y})_{x,z} = \begin{cases} \alpha_{x,y} & \textit{si } z = y \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

pour tout point x de X et tout point z du schéma local hensélien $Y_y^{\mathfrak{h}}$.

Démonstration. Le second point est une conséquence immédiate du corollaire 2.12. La formule de composition (25), se déduit des égalités

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha)_{x,z} = \sigma^{\mathfrak{h}}_{X_x^{\mathfrak{h}},Z}\Big(\beta \circ \alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\Big)_z &= \sigma^{\mathfrak{h}}_{X_x^{\mathfrak{h}},Z}\left(\sum_{y\in Y} \beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}] \circ \alpha_{x,y}\right)_z \\
&= \sum_{y\in Y} \sigma^{\mathfrak{h}}_{Y_y^{\mathfrak{h}},Z}\big(\beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)_z \circ \alpha_{x,y} \\
&= \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y}
\end{aligned}$$

dans lesquelles nous avons utilisé la commutativité du diagramme (22). La dernière assertion est quant à elle un corollaire du lemme 2.14. □

Nous donnons maintenant le lien entre la décomposition locale du produit tensoriel de deux correspondances finies et le produit tensoriel des décompositions locales. Étant donnés deux S-schémas X et Y, la propriété universelle (8) nous donne un morphisme

$$\begin{tikzcd}
(X \times_S Y)^{\mathfrak{h}} \arrow[r, dotted, "\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y}"] \arrow[dr, "\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X\times_S Y}"'] & X^{\mathfrak{h}} \times_S Y^{\mathfrak{h}} \arrow[d, "(\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_X)\times_S(\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_Y)"] \\
& X \times_S Y.
\end{tikzcd}$$

Ces morphismes font du foncteur $(-)^{\mathfrak{h}}$ un foncteur quasi-monoïdal symétrique. Lorsque l'on se fixe un point e du produit $X \times_S Y$ se projetant sur x et y on a une factorisation

$$\begin{tikzcd}
(X \times_S Y)^{\mathfrak{h}}_e \arrow[r, "\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}"] \arrow[d] & (X^{\mathfrak{h}}_x) \times_S (Y^{\mathfrak{h}}_y) \arrow[d] \\
(X \times_S Y)^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y}"] & X \times_S Y.
\end{tikzcd}$$

Le comportement des décompositions locales par rapport au produit tensoriel des correspondances finies est donné par le résultat suivant.

Proposition 2.17. *Soient X, Y, X', Y' des S-schémas, $\alpha \in c_S(X, X')$ et $\beta \in c_S(Y, Y')$ des correspondances finies. Pour tout point e de $X \times_S Y$ et tout point x' de X' et y' de Y', on a l'égalité*

$$\Big(\alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'}\Big) \circ \Big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}\Big] = \sum_{\substack{e' \text{ point de } X' \times_S Y' \\ \text{se projetant sur } x' \text{ et } y'}} \Big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y',e'}\Big] \circ \Big(\alpha \otimes \beta\Big)_{e,e'}$$

dans $c_S\Big((X \times_S Y)^{\mathfrak{h}}_e, (X')^{\mathfrak{h}}_{x'} \times_S (Y')^{\mathfrak{h}}_{y'}\Big)$.

Démonstration. Pour simplifier convenons de noter E le produit $X \times_S Y$, E' le produit $X' \times_S Y'$ et de désigner par $E'_{x'y'}$ l'ensemble des points de E' se projetant sur x' et y'. Le lemme sera démontré lorsque nous aurons vérifié la formule

$$\begin{aligned}[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y'}] \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{E^{\mathfrak{h}}_e, E'} &\Big(\big(\alpha \otimes \beta\big) \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{E,e}]\Big) \\ &= \Big[\sigma^{\mathfrak{h}}_{X^{\mathfrak{h}}_x, X'}\big(\alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big) \otimes \sigma^{\mathfrak{h}}_{Y^{\mathfrak{h}}, Y'}\big(\beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)\Big] \circ [\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}].\end{aligned} \tag{26}$$

En effet on a d'une part

$$[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y'}] \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{E^{\mathfrak{h}}_e, E'} \Big(\big(\alpha \otimes \beta\big) \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{E,e}]\Big) = \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} \sum_{e' \in E'_{x'y'}} \Big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y',e'}\Big] \circ \Big(\alpha \otimes \beta\Big)_{e,e'}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Big[\sigma^{\mathfrak{h}}_{X^{\mathfrak{h}}_x, X'}\big(\alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big) \otimes \sigma^{\mathfrak{h}}_{Y^{\mathfrak{h}}, Y'}\big(\beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)\Big] &\circ [\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}] \\ &= \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} \Big(\alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'}\Big) \circ \Big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}\Big].\end{aligned}$$

Il suffit alors d'identifier facteur direct par facteur direct pour voir que l'égalité (26) n'est qu'une reformulation du résultat cherché.

Fixons un sous-schéma fermé Z_α de $X^{\mathfrak{h}}_x \times_S X'$ fini et équidimensionnel sur le schéma local hensélien $X^{\mathfrak{h}}_x$ de sorte qu'en notant ι_{Z_α} l'immersion fermée associée à ce dernier on ait

$$\alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}] = (\iota_{Z_\alpha})_* \overline{\alpha}$$

pour un unique élément $\overline{\alpha}$ de $c_{\mathrm{equi}}(Z_\alpha / X^{\mathfrak{h}}_x, 0)$.

Choisissons de même un sous-schéma fermé Z_β de $Y^{\mathfrak{h}}_y \times_S Y'$ équidimensionnel fini sur $Y^{\mathfrak{h}}_y$ de sorte qu'en notant ι_{Z_β} l'immersion fermée associée à ce dernier on ait

$$\beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}] = (\iota_{Z_\beta})_* \overline{\beta}$$

pour un unique élément $\overline{\beta}$ de $c_{\mathrm{equi}}(Z_\beta / X^{\mathfrak{h}}_x, 0)$.

Notons comme précédemment W_α et W_β les schémas définis par les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
W_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{W_\alpha}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_\alpha \arrow[d, "\iota_{Z_\alpha}"'] \\
X_x^{\mathfrak{h}} \times_S (X')^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & X_x^{\mathfrak{h}} \times_S X'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W_\beta \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{W_\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_\beta \arrow[d, "\iota_{Z_\beta}"'] \\
Y_y^{\mathfrak{h}} \times_S (Y')^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & Y_y^{\mathfrak{h}} \times_S Y'
\end{tikzcd}$$

et posons $Z = Z_\alpha \times_S Z_\beta$ et $W = W_\alpha \times_S W_\beta$. Nous avons alors un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "\iota_W"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d, "\iota_Z"'] \\
X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}} \times_S (X')^{\mathfrak{h}} \times_S (Y')^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}} \times_S E'.
\end{tikzcd}$$

Considérons par ailleurs les schémas définis par les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
 & & & W \arrow[d] \\
\mathcal{W}' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{W}'}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{W} \arrow[urr, bend left] \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{W}}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & \mathcal{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{Z}}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d, "\iota_Z"] \\
E_e^{\mathfrak{h}} \times_S (E')^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & E_e^{\mathfrak{h}} \times_S (X')^{\mathfrak{h}} \times_S (Y')^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & E_e^{\mathfrak{h}} \times_S E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}} \times_S E' \arrow[d] \\
 & & E_e^{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}"'] & X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}.
\end{tikzcd}$$

Notons p et q les projections de $X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}$ sur le premier et le second facteur. Par définition du produit tensoriel des correspondances, on a

$$\begin{aligned}
\big(\alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big) \otimes \big(\beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big) &= \Big[p^{\circledast}\big(\alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big)\Big] \times_{X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}} \Big[q^{\circledast}\big(\beta \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)\Big] \\
&= \Big[p^{\circledast}(\iota_{Z_\alpha})_*\overline{\alpha}\Big] \times_{X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}} \Big[q^{\circledast}(\iota_{Z_\beta})_*\overline{\beta}\Big] \\
&= (\iota_{\mathcal{Z}})_*\Big[\big(p^{\circledast}\overline{\alpha}\big) \times_{X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}} \big(q^{\circledast}\overline{\beta}\big)\Big].
\end{aligned}$$

Convenons de noter $\overline{\gamma}$ le cycle algébrique

$$\overline{\gamma} = \big(p^{\circledast}\overline{\alpha}\big) \times_{X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}} \big(q^{\circledast}\overline{\beta}\big)$$

appartenant à $c_{\mathrm{equi}}(Z/X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}, 0)$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y'}] \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{E_e^{\mathfrak{h}},E'}\Big(\big(\alpha\otimes\beta\big)\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{E,e}]\Big) &= (\mathrm{id}_{E_e^{\mathfrak{h}}} \times_S \mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y'})_*\Big[(\iota_{\mathcal{W}'})_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{Z}})_*\big(\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\circledast}_{X,Y,e}\overline{\gamma}\big)\Big]\\
&= (\iota_{\mathcal{W}})_*\theta_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{Z}})_*\Big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\circledast}_{X,Y,e}\overline{\gamma}\Big]\\
&= \mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\circledast}_{X,Y,e}\Big[(\iota_W)_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_\alpha}\times_S \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_\beta})_*\overline{\gamma}\Big].
\end{aligned}$$

On a par ailleurs l'égalité

$$\begin{aligned}
(\iota_W)_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_\alpha}\times_S \sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_\beta})_*\overline{\gamma} &= \Big[p^{\circledast}\big((\iota_{W_\alpha})_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_\alpha})_*\overline{\alpha}\big)\Big] \times_{X_x^{\mathfrak{h}}\times_S Y_y^{\mathfrak{h}}} \Big[q^{\circledast}\big((\iota_{W_\beta})_*(\sigma^{\mathfrak{h}}_{Z_\beta})_*\overline{\beta}\big)\Big]\\
&= \Big[\sigma^{\mathfrak{h}}_{X_x^{\mathfrak{h}},X'}\big(\alpha\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big)\Big] \otimes \Big[\sigma^{\mathfrak{h}}_{Y_y^{\mathfrak{h}},Y'}\big(\beta\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)\Big]
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y'}] \circ \sigma^{\mathfrak{h}}_{E_e^{\mathfrak{h}},E'}\Big(\big(\alpha\otimes\beta\big)\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{E,e}]\Big)\\
&\qquad= \mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\circledast}_{X,Y,e}\Big(\sigma^{\mathfrak{h}}_{X_x^{\mathfrak{h}},X'}\big(\alpha\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big)\otimes\sigma^{\mathfrak{h}}_{Y_y^{\mathfrak{h}},Y'}\big(\beta\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)\Big)\\
&\qquad= \Big[\sigma^{\mathfrak{h}}_{X_x^{\mathfrak{h}},X'}\big(\alpha\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\big)\otimes\sigma^{\mathfrak{h}}_{Y_y^{\mathfrak{h}},Y'}\big(\beta\circ[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\big)\Big]\circ[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}]
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule (26). □

2.3.2 Décomposition locale raffinée

Supposons donnés une présentation d'un S-schéma local hensélien $\mathcal{O}$ ainsi qu'un élément α de $c_S\{\mathcal{O}, X)$. On peut alors constater en utilisant le cas $n = 0$ de la proposition 2.7 que la correspondance α_x précédemment construite provient en fait d'un unique élément $\{\alpha\}_x$ de $c_S\left\{\mathcal{O}, X_x^{\mathfrak{h}}\right)$ vérifiant

$$\alpha = \sum_x [\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{X,x}]\circ\{\alpha\}_x$$

dans $c_S\left\{\mathcal{O}, X\right)$. Désignons par $\{\mathfrak{l}\}^{\mathfrak{h}}_{X,x}$ l'élément de $c_S\left\{X_x^{\mathfrak{h}}, X\right)$ induit par les morphismes $U \to X$ pour U parcourant $\mathcal{V}^h_{X,x}$. Une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$ possède alors une décomposition locale raffinée de la forme

$$\alpha\circ\{\mathfrak{l}\}^{\mathfrak{h}}_{X,x} = \sum_{y\in Y}[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}]\circ\{\alpha\}_{x,y} \qquad \{\alpha\}_{x,y}\in c_S\left\{X_x^{\mathfrak{h}}, Y_y^{\mathfrak{h}}\right)$$

$\{\alpha\}_{x,y}$ ayant pour image $\alpha_{x,y}$ dans $c_S\left(X_x^{\mathfrak{h}}, Y_y^{\mathfrak{h}}\right)$.

Notation 2.18. Soient $g : X \to Y$ un morphisme et x un point de X. Pour tout $V \in \mathcal{V}^h_{Y,g(x)}$ le morphisme g définit un élément dans $c_S\left\{X_x^{\mathfrak{h}}, V\right)$ et la collection de ces éléments définit un élément

$$\{g\}^{\mathfrak{h}}_x \in c_S\left\{X_x^{\mathfrak{h}}, Y_y^{\mathfrak{h}}\right\}.$$

Les propriétés de ces décompositions locales raffinées se déduisent directement du lemme 2.6 et de la proposition 2.16.

Proposition 2.19. *Soient X, Y et Z des S-schémas.*

(a) *Étant données des correspondances finies $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$, on a pour tout point $x \in X$ et $z \in Z$ l'égalité*

$$\{\beta \circ \alpha\}_{x,z} = \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \{\alpha\}_{x,y}. \tag{27}$$

(b) *Étant donné un morphisme $g : X \to Y$ de S-schémas on a*

$$\{[g]\}_{x,y} = \begin{cases} \{g\}_x^{\mathfrak{h}} & \text{si } y = g(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans $c_S\left\{X_x^{\mathfrak{h}}, Y_y^{\mathfrak{h}}\right\}$.

(c) *Étant donnée une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$, on a l'égalité dans $c_S\left\{X_x^{\mathfrak{h}}, (Y_y^{\mathfrak{h}})_z^{\mathfrak{h}}\right)$*

$$\{\{\alpha\}_{x,y}\}_{x,z} = \begin{cases} \{\alpha\}_{x,y} & \text{si } z = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout point x de X et tout point z du schéma local hensélien $Y_y^{\mathfrak{h}}$.

Soient X, Y deux S-schémas et e un point de $X \times_S Y$ se projetant sur x et y. L'identité de $X \times_S Y$ induit pour tout $U \in \mathcal{V}_{X,x}^h, V \in \mathcal{V}_{Y,y}^h$ un élément dans $c_S\left\{(X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}}, U \times_S V\right)$ et la collection de ces éléments donne un élément de

$$\{\mathfrak{m}\}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} \in c_S\left\{(X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}}, X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}\right\}$$

ayant même image que $[\mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}]$ dans $c_S\left((X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}}, X_x^{\mathfrak{h}} \times_S Y_y^{\mathfrak{h}}\right\}$.

Proposition 2.20. *Soient X, Y, X', Y' des S-schémas, $\alpha \in c_S(X,X')$ et $\beta \in c_S(Y,Y')$ des correspondances finies. Pour tout point e de $X \times_S Y$ et tout point x' de X' et y' de Y', on a l'égalité*

$$\Big(\{\alpha\}_{x,x'} \otimes \{\beta\}_{y,y'}\Big) \circ \{\mathfrak{m}\}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} = \sum_{\substack{e' \text{ point de } X' \times_S Y' \\ \text{se projetant sur } x' \text{ et } y'}} \Big[\mathfrak{m}_{X',Y',e'}^{\mathfrak{h}}\Big] \circ \Big\{\alpha \otimes \beta\Big\}_{e,e'}$$

dans $c_S\Big\{(X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}}, (X')_{x'}^{\mathfrak{h}} \times_S (Y')_{y'}^{\mathfrak{h}}\Big)$.

2.4 Cas de la topologie étale

Les démonstrations données dans la section précédente s'adaptent parfaitement au cas de la topologie étale, il suffit pratiquement pour cela de remplacer les anneaux locaux henséliens par les anneaux locaux strictement henséliens. Dans cette sous-section nous avons rassemblé les énoncés des résultats obtenus pour la topologie étale tout en précisant les modifications mineures à effectuer.

Nous fixons pour tout point s de S une clôture algébrique $\overline{\kappa}(s)$ de $\kappa(s)$ et nous désignons par $\overline{s}$ le point géométrique de S défini par la clôture algébrique $\overline{\kappa}(s)$.

Définition 2.21. Un bon point géométrique $\overline{x}$ est la donnée d'un point $x \in X$ et d'un plongement $\kappa(x) \to \overline{\kappa}(s)$ le point s étant l'image de x dans S.

Lemme 2.22. *Les bons points géométriques possèdent les proprétés suivantes.*

(a) L'image par un morphisme de S-schémas d'un bon point géométrique est un bon point géométrique.

(b) Les bons points géométriques forment un ensemble conservatif de points [9] *pour la topologie étale sur* Var_S.

Démonstration. La première assertion est immédiate, quant à la seconde d'après la remarque 3.13.b de l'exposé VIII de [2], il suffit de voir que les points d'un S-schéma de type fini X fermés dans leur fibre sont le lieu d'un point bon géométrique. Or pour un point x de X fermé dans sa fibre, l'extension $\kappa(x)/\kappa(s)$ est finie et il existe bien un morphisme de corps de $\kappa(x)$ dans la clôture algébrique □

Nous appellerons bon S-schéma local strictement hensélien la donnée d'un S-schéma strictement hénsélien $\mathcal{O}$ et d'un isomorphisme $\omega : \kappa \to \overline{\kappa}(s)$ de $\kappa(s)$-extensions où k est le corps résiduel de $\mathcal{O}$ et s est l'image dans S du point fermé de $\mathcal{O}$. Les hensélisés stricts d'un S-schéma en un bon point géométrique sont canoniquement des bons S-schémas strictement henséliens. Étant donné un bon S-schéma strictement hensélien $(\mathcal{O}, \omega)$, on remarquera pour l'adaptation des démonstrations précédentes au cas de la topologie étale que les $\mathcal{O}$-schémas finis sont canoniquement des réunions disjointes de bons S-schémas locaux strictement henséliens.

A un S-schéma X, on peut associer fonctoriellement le S-schéma $X^{\mathfrak{sh}}$

$$X^{\mathfrak{sh}} := \coprod_{\substack{\overline{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}.$$

Ce dernier est la réunion disjointe, sur les bons points géométriques de X, des schémas locaux strictement henséliens $X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}$ spectre de l'anneau local strictement hensélien $\mathcal{O}^{sh}_{X,\overline{x}}$ dont on notera le point fermé abusivement par $\overline{x}$.

[9] Pour un schéma qui n'est pas de type fini sur S on prendra garde que l'ensemble des bons points géométriques peut être vide.

Pour tout bon point géométrique $\overline{x}$ de X on dispose du morphisme canonique

$$\begin{tikzcd} X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{X,\overline{x}}"] & \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

nous donnant un morphisme de schémas $\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{X} : X^{\mathfrak{sh}} \to X$. Comme dans le cas hensélien, le morphisme

$$\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{X^{\mathfrak{sh}}} : (X^{\mathfrak{sh}})^{\mathfrak{sh}} \to X^{\mathfrak{sh}}$$

n'est pas un isomorphisme en général mais admet cependant une section canonique $\mathfrak{s}^{\mathfrak{sh}}_{X}$ identifiant $X^{\mathfrak{sh}}$ à un sous-schéma fermé de $(X^{\mathfrak{sh}})^{\mathfrak{sh}}$ et provenant du fait que l'anneau local strictement hensélien de $X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}$ en son point fermé $\overline{x}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}^{sh}_{X,\overline{x}}$:

$$\begin{tikzcd} X^{\mathfrak{sh}} \arrow[r, "\mathfrak{s}^{\mathfrak{sh}}_{X}"] \arrow[rr, equal, bend right, "\mathrm{id}_{X^{\mathfrak{sh}}}"'] & (X^{\mathfrak{sh}})^{\mathfrak{sh}} \arrow[r, "\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{X^{\mathfrak{sh}}}"] & X^{\mathfrak{sh}} \arrow[r, "\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{X}"] & X \end{tikzcd}$$

Autrement dit dans $(X^{\mathfrak{sh}})^{\mathfrak{sh}}$ apparaissent des facteurs supplémentaires correspondants aux bons points géométriques distincts des points fermés des $X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}$.

Dans le cas étale, le complexe considéré est le complexe de Čech associé au X-schéma $X^{\mathfrak{sh}}$

$$\check{C}_{X^{\mathfrak{sh}}/X}(\mathcal{O}) : \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{2}_{X}\right](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X^{\mathfrak{sh}}](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X](\mathcal{O}) \to 0.$$

On a alors l'analogue de la proposition 2.1.

Proposition 2.23. *Soient X un S-schéma et $\mathcal{O}$ un bon S-schéma local strictement hensélien. Il existe des morphismes canoniques*

$$\sigma^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n}_{X}\right](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_{X}\right](\mathcal{O}) \qquad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

(a) (Homotopie) On a pour tout n les relations

$$d_{n+1} \circ \sigma^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n} + \sigma^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n-1} \circ d_n = \mathrm{id}.$$

(b) (Fonctorialité) Étant donnés un bon S-schéma local strictement hensélien $\mathcal{O}'$ et une correspondance finie $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n}_{X}\right](\mathcal{O}') \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n}_{X}\right](\alpha)"] \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O}',X,n}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n}_{X}\right](\mathcal{O}) \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n}"] \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_{X}\right](\mathcal{O}') \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_{X}\right](\alpha)"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_{X}\right](\mathcal{O}). \end{tikzcd}$$

De même on dispose également de l'analogue de la proposition 2.7.

Proposition 2.24. *Soient X un S-schéma et une présentation $\mathcal{V}$ d'un bon S-schéma local strictement hensélien $\mathcal{O}$. Il existe d'uniques morphismes*

$$\{\sigma\}^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^n_X\right]\{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}\} \qquad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

(a) (Homotopie) On a pour tout n les relations

$$d_{n+1} \circ \{\sigma\}^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n} + \{\sigma\}^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n-1} \circ d_n = \mathrm{id}. \tag{28}$$

(b) (Compatibilité) Le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^n_X\right]\{\mathcal{O}\} \arrow[r, "\{\sigma\}^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_X\right]\{\mathcal{O}\} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^n_X\right](\mathcal{O}) \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{sh}}_{\mathcal{O},X,n}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\left[(X^{\mathfrak{sh}})^{n+1}_X\right](\mathcal{O}).
\end{tikzcd} \tag{29}$$

Sachant d'après le lemme 2.22 que les bons points géométriques fournissent une famille conservative de points pour la topologie étale, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.25. *Soit X un S-schéma de type fini. La restriction à la catégorie* VarCor_S *du complexe de faisceaux étales avec transferts $\check{C}_{X^{\mathfrak{sh}}/X}$ est universellement exact au sens de Grayson [12].*

Lorsque l'on se donne une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$ et des bons points géométriques $\overline{x}, \overline{y}$ de X et Y, le cas $n=0$ de la proposition 2.23 fournit une décomposition locale pour la topologie étale de la correspondance α de la forme

$$\alpha \circ [\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{X,\overline{x}}] = \sum_{\substack{\overline{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} [\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{Y,\overline{y}}] \circ \alpha_{\overline{x},\overline{y}}. \tag{30}$$

En utilisant le cas $n=0$ de la proposition 2.24 on voit finalement que la décomposition locale précédente se raffine en

$$\alpha \circ \{\mathfrak{l}\}^{\mathfrak{sh}}_{X,\overline{x}} = \sum_{\substack{\overline{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} [\mathfrak{l}^{\mathfrak{sh}}_{Y,\overline{y}}] \circ \{\alpha\}_{\overline{x},\overline{y}}$$

où $\{\mathfrak{l}\}^{\mathfrak{sh}}_{X,\overline{x}} \in c_S\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}, X)$ est induit par les morphismes $U \to X$ pour $U \in \mathcal{V}^{sh}_{X,\overline{x}}$. Soient $g : X \to Y$ un morphisme et x un point de X. Pour tout $V \in \mathcal{V}^{sh}_{Y,g\circ\overline{x}}$ le morphisme g définit un élément dans $c_S\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}, V)$ et la collection de ces éléments définit un élément

$$\{g\}^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}} \in c_S\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}, Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}\}.$$

Proposition 2.26. *Soient X, Y et Z des S-schémas.*

(a) Étant données des correspondances finies $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$, on a pour tout point bon point géométrique $\overline{x}$ de X et tout bon point géométrique $\overline{z}$ de Z l'égalité

$$\{\beta \circ \alpha\}_{\overline{x},\overline{z}} = \sum_{\substack{\overline{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} \beta_{\overline{y},\overline{z}} \circ \{\alpha\}_{\overline{x},\overline{y}}.$$

(b) Étant donné un morphisme $g : X \to Y$ de S-schémas on a

$$\{[g]\}_{\overline{x},\overline{y}} = \begin{cases} \{g\}^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}} & \text{si } \overline{y} = g \circ \overline{x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans $c_S\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}, Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}\}$.

(c) Étant donnée une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$, on a l'égalité dans $c_S\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}, (Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}})^{\mathfrak{sh}}_{\overline{z}})$

$$\{\{\alpha\}_{\overline{x},\overline{y}}\}_{\overline{x},\overline{z}} = \begin{cases} \{\alpha\}_{\overline{x},\overline{y}} & \text{si } \overline{z} = \overline{y} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout bon point géométrique $\overline{x}$ de X et tout bon point géométrique $\overline{z}$ du schéma local strictement hensélien $Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}$.

Comme dans le cas de la topologie Nisnevich, ces décompositions locales se comportent bien par produit tensoriel. Étant donnés deux S-schémas X et Y ainsi qu'un bon point géométrique $\overline{e}$ de $X \times_S Y$ se projetant sur $\overline{x}$ et $\overline{y}$ nous avons un diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
(X \times_S Y)^{\mathfrak{sh}}_{\overline{e}} \arrow[r, "\mathfrak{m}^{\mathfrak{sh}}_{X,Y,\overline{e}}"] \arrow[d] & (X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}) \times_S (Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}) \arrow[d] \\
(X \times_S Y)^{\mathfrak{sh}} \arrow[r, "\mathfrak{m}^{\mathfrak{sh}}_{X,Y}"] & X \times_S Y.
\end{tikzcd}$$

L'identité de $X \times_S Y$ induit par ailleurs un élément dans $c_S\{(X \times_S Y)^{\mathfrak{sh}}_{\overline{e}}, U \times_S V)$ pour tout $U \in \mathcal{V}^{sh}_{X,\overline{x}}, V \in \mathcal{V}^{sh}_{Y,\overline{y}}$. La collection de ces éléments donne un élément

$$\{\mathfrak{m}\}^{\mathfrak{sh}}_{X,Y,\overline{e}} \in c_S\{(X \times_S Y)^{\mathfrak{sh}}_{\overline{e}}, X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}} \times_S Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}\}$$

ayant même image que $[\mathfrak{m}^{\mathfrak{sh}}_{X,Y,\overline{e}}]$ dans $c_S((X \times_S Y)^{\mathfrak{sh}}_{\overline{e}}, X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}} \times_S Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}\}$.

Proposition 2.27. *Soient X, Y, X', Y' des S-schémas, $\alpha \in c_S(X,X')$ et $\beta \in c_S(Y,Y')$ des correspondances finies. Pour tout bon point géométrique $\overline{e}$ de $X \times_S Y$ et tout bon point géométrique $\overline{e}$' de $X' \times_S Y'$, on a l'égalité*

$$\Big(\{\alpha\}_{\overline{x},\overline{x}'} \otimes \{\beta\}_{\overline{y},\overline{y}'}\Big) \circ \{\mathfrak{m}\}^{\mathfrak{sh}}_{X,Y,\overline{e}} = \Big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{sh}}_{X',Y',\overline{e}'}\Big] \circ \Big\{\alpha \otimes \beta\Big\}_{\overline{e},\overline{e}'}$$

dans $c_S\{(X \times_S Y)^{\mathfrak{sh}}_{\overline{e}}, (X')^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}'} \times_S (Y')^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}'})$.

3 Résolution de Godement et transferts

Rappelons qu'une monade dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un endofoncteur M de $\mathcal{C}$ et de transformations naturelles $\mu : MM \to M$ et $\eta : \mathrm{id} \to M$ pour lesquelles les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta M"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & MM \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[l, "M\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} MMM \arrow[r, "M\mu"] \arrow[d, "\mu M"] & MM \arrow[d, "\mu"] \\ MM \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Étant donnée une monade (M, μ, η), l'un des nombreux avatars de la construction bar permet d'associer à un objet C de $\mathcal{C}$ un objet cosimplicial $B^*(M, C)$ de $\mathcal{C}$ muni d'une coaugmentation de C dans ce dernier. Les n-cosimplexes sont donnés par l'objet $M^{n+1}C$ de $\mathcal{C}$, les codégénérescences par les morphismes

$$\sigma_i^n := M^i \mu M^{n-1-i} \ : M^{n+1}C \to M^n C \qquad i = 0, \dots, n-1$$

et les cofaces par les morphismes

$$\delta_i^{n-1} := M^i \eta M^{n-i} \ : M^n C \to M^{n+1} C \qquad i = 0, \dots, n.$$

Dans la suite de cette section nous fixons une catégorie $\mathcal{S} = \mathrm{Sch}_S, \mathrm{Var}_S$ ou Sm_S, tous les préfaisceaux sont définis sur $\mathcal{S}$ et nous renvoyons à la définition 1.10 pour la notion de faisceaux avec transferts.

3.1 Cas de la topologie de Nisnevich

Nous allons maintenant appliquer les résultats concernant la localisation Nisnevich des correspondances finies que nous avons obtenus dans la sous-section 2.3. Rappelons que $\mathcal{S}$ désigne l'une des catégories suivantes $\mathrm{Sch}_S, \mathrm{Var}_S$ ou Sm_S.

Dans la suite, nous désignons par s_x la composante suivant le point x d'un élément s du produit

$$\prod_{x \in X} F\{X_x^\mathfrak{h}\}.$$

Par définition $F\{X_x^\mathfrak{h}\}$ correspond à la fibre Nisnevich de F au point x. Désignons par $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ la monade de la catégorie des faisceaux Nisnevich définissant la résolution cosimpliciale de Godement. Étant donné un faisceau Nisnevich F, cette dernière se caractérise de la manière suivante.

(a) Les sections sur X du faisceau Nisnevich $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F$ sont données par

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X) = \prod_{x \in X} F\{X_x^\mathfrak{h}\}$$

les morphismes structuraux étant déterminés par les égalités

$$\Big[\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(p)(s)\Big]_x = F\left\{\{p\}_x^{\mathfrak{h}}\right\}(s_{p(x)})$$

dans lesquelles x est un point de X, $p : X \to Y$ un morphisme de S-schémas et s un élément de $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(Y)$.

(b) Le morphisme structural η_F se trouve donné par

$$\Big[\eta_F(s)\Big]_x = F\big\{\{\mathfrak{l}\}_{X,x}^{\mathfrak{h}}\big\}(s)$$

pour un élément s de $F(X)$.

(c) Le morphisme structural μ_F coïncide avec la projection sur les composantes associées aux points fermés des $X_x^{\mathfrak{h}}$ via le morphisme naturel

$$(\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F)(X) \to \prod_{x\in X}\prod_{z\in X_x^{\mathfrak{h}}} F\left\{\left(X_x^{\mathfrak{h}}\right)_z^{\mathfrak{h}}\right\}.$$

Nous notons $s_{x,z}$ la composante suivant x, z de l'image d'une section s par le morphisme précédent de sorte que $\mu_F(s)_x = s_{x,x}$.

La résolution cosimpliciale de Godement d'un faisceau Nisnevich F est par définition le faisceau Nisnevich cosimplicial

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^*F = B^*(\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}, F).$$

Ce dernier nous fournit un complexe G_{Nis}^*F de faisceaux Nisnevich de termes $G_{\mathrm{Nis}}^nF = \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^nF$ et dont les différentielles sont données par la somme alternée des morphismes cofaces.

Remarque 3.1. La famille formée de ces foncteurs fibres $F \mapsto F\{X_x^{\mathfrak{h}}\}$ étant conservative, l'augmentation canonique

$$F \to G_{\mathrm{Nis}}^*F$$

est un quasi-isomorphisme [10] de complexes de faisceaux Nisnevich.

Proposition 3.2. *Il existe une monade canonique* $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}$ *de la catégorie* $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(\mathcal{S})$ *rendant le carré suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}"] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{S}) \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}"] \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(\mathcal{S}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{S}).
\end{tikzcd}$$

[10] Il s'agit d'une propriété classique de la résolution de Godement prouvée par exemple dans [25, Part II, Ch. IV, lemma 2.2.2].

Démonstration. Il suffit de montrer que pour un faisceau Nisnevich avec transferts F, le faisceau Nisnevich $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F$ est canoniquement muni de transferts et que les morphismes

$$\eta_F : F \to \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F \qquad \mu_F : \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F \to \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F$$

sont des morphismes de faisceaux Nisnevich avec transferts. Étant donnée une correspondance finie $\alpha \in c_S(X, Y)$, on peut associer à une section s de $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(Y)$ la section de $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X)$ donnée par

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)(s)_x = \sum_{y \in Y} F\big\{\{\alpha\}_{x,y}\big\}(s_y).$$

On obtient ainsi un morphisme de groupes abéliens $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)$. Lorsque l'on se donne une correspondance finie $\beta \in c_S(Y, Z)$, la formule de composition (27) de la proposition 2.19 nous assure que pour un point x de X

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta \circ \alpha)(s)_x &= \sum_{z \in Z} F\{\{\beta \circ \alpha\}_{x,z}\}(s_z) = \sum_{z \in Z} \sum_{y \in Y} F\{\beta_{y,z} \circ \{\alpha\}_{x,y}\}(s_z) \\
&= \sum_{z \in Z} \sum_{y \in Y} F\{\{\alpha\}_{x,y}\}\Big[F\{\{\beta\}_{y,z}\}(s_z)\Big] = \sum_{y \in Y} F\{\{\alpha\}_{x,y}\}\Big[\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta)(s)_y\Big] \\
&= \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)\Big[\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta)(s)\Big]_x
\end{aligned}$$

et donc que cette définition est fonctorielle :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta \circ \alpha) = \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha) \circ \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta).$$

Par ailleurs pour un morphisme $p : X \to Y$ de S-schémas, la seconde assertion de la proposition 2.19 nous donne

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F([p])(s)_x = F\{\{p\}^{\mathfrak{h}}_x\}(s_{p(x)}) = \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(p)(s)_x.$$

Les morphismes $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)$ étendent donc la structure usuelle de préfaisceau en une structure de préfaisceau avec transferts. La construction des germes de correspondances locaux utilisés assure que

$$\begin{aligned}
F(\alpha)(s)_x = F\{\alpha \circ \{\mathfrak{l}\}^{\mathfrak{h}}_{X,x}\}(s) &= \sum_y F\{[\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}}_{Y,y}] \circ \{\alpha\}_{x,y}\}(s) = \sum_y F\{\{\alpha\}_{x,y}\}(s_y) \\
&= \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)(\eta_F(s))_x
\end{aligned}$$

autrement dit que η_F est un morphisme de faisceaux avec transferts. Il reste à montrer que μ_F est aussi un morphisme de faisceaux Nisnevich avec transferts. Pour une section s appartenant à $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X)$ on obtient en utilisant la troisième assertion de la proposition 2.19

$$\begin{aligned}\mu_F(\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)(s))_x &= \sum_{y\in Y}\mu_F\Big[\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F\{\{\alpha\}_{x,y}\}(s_y)\Big]_x\\ &= \sum_{y\in Y}\sum_{z\in Y_y^{\mathfrak{h}}} F\big\{\{\{\alpha\}_{x,y}\}_{x,z}\big\}(s_{y,z})\\ &= \sum_{y\in Y} F\{\{\alpha\}_{x,y}\}(s_{y,y}) = \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)(\mu_F(s)).\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

La proposition 3.2 assure en particulier que la résolution cosimpliciale de Godement $\mathcal{G}^*_{\mathrm{Nis}}F$ d'un faisceau Nisnevich avec transferts est canoniquement munie de transferts et qu'à fortiori le complexe $G^*_{\mathrm{Nis}}F$ est un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts quasi-isomorphe à F dans la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts. Cela entraîne en particulier que les préfaisceaux de cohomologie Nisnevich

$$X \mapsto H^j_{\mathrm{Nis}}(X,F)$$

d'un faisceau Nisnevich avec transferts sont canoniquement munis de transferts, résultat se déduisant par ailleurs de la proposition 3.1.8 de [29, chapter 5].

Nous allons maintenant voir que les tranferts « naturels » précédemment construits sur la résolution de Godement sont en outre compatibles avec la structure tensorielle de cette dernière.

Définition 3.3. Nous appelons faisceau Nisnevich (resp. avec transferts) quasi-monoïdal symétrique la donnée d'un faisceau Nisnevich (resp. d'un faisceau Nisnevich avec transferts) F et pour tout S-schéma X, Y d'un morphisme associatif symétrique

$$\boxtimes^F_{X,Y} : F(X)\otimes F(Y) \to F(X\times_S Y)$$

fonctoriel par rapport aux morphismes de schémas (resp. aux correspondances finies).

Ces derniers sont les objets d'une catégorie $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S})$ (resp. une catégorie $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S})$) munie d'un foncteur fidèle vers $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{S})$ (resp. vers $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{S})$).

Remarque 3.4. La monade de Godement $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ induit une monade sur la catégorie des faisceaux Nisnevich quasi-monoïdaux symétriques. Étant donné un faisceau Nisnevich quasi-monoïdal symétrique $(F,\boxtimes^F_{X,Y})$, on voit en effet que $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F$ est canoniquement un faisceau Nisnevich quasi-monoïdal symétrique pour les morphismes

$$\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X,Y} : \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X)\otimes\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(Y) \to \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X\times_S Y)$$

donnés par les relations

$$\Big[\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X,Y}(s\otimes t)\Big]_e = F\big\{\{\mathfrak{m}\}^{\natural}_{X,Y,e}\big\}\Big[\boxtimes^{F}_{X^{\natural}_x,Y^{\natural}_y}(s_x\otimes t_y)\Big]$$

dans lesquelles $s\in\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X), t\in\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(Y)$ et e désigne un point du produit $X\times_S Y$ de projection x et y. Avec cette définition il est aisé de voir que les morphismes structuraux η_F et μ_F de la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ sont bien des morphismes de faisceaux Nisnevich quasi-monoïdaux symétriques.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.5. *La monade $\mathcal{G}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis}}$ induit une monade sur la catégorie $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S})$ compatible avec la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ via le foncteur d'oubli. Autrement dit le carré suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{G}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis}}"] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S}) \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}"] \\
\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}(\mathcal{S}).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Supposons que $(F,\boxtimes^F_{X,Y})$ soit un faisceau Nisnevich avec transferts quasi-monoïdal symétrique. En utilisant la proposition 3.2, il suffit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X')\otimes\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(Y') \arrow[r, "\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X',Y'}"] \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)\otimes\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta)"] & \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X'\times_S Y') \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha\otimes\beta)"] \\
\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X)\otimes\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(Y) \arrow[r, "\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X,Y}"] & \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(X\times_S Y)
\end{tikzcd} \tag{31}$$

est commutatif pour toute correspondance finie $\alpha\in c_S(X,X')$ et $\beta\in c_S(Y,Y')$. Notons E le produit $X\times_S Y$ et E' le produit $X'\times_S Y'$. Considérons un point e de E de projection x et y ainsi que des sections $s\in\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}(X'), t\in\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}(Y')$. En utilisant la remarque 3.4 nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha\otimes\beta)\Big[\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X',Y'}(s\otimes t)\Big]_e &= \sum_{e'\in E'} F\big\{\{\alpha\otimes\beta\}_{e,e'}\big\}\Big[\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X',Y'}(s\otimes t)\Big]_{e'} \\
&= \sum_{e'\in E'} F\big\{\{\alpha\otimes\beta\}_{e,e'}\big\}F\big\{\{\mathfrak{m}\}^{\natural}_{X',Y',e'}\big\}\Big[\boxtimes^{F}_{(X')^{\natural}_{x'},(Y')^{\natural}_{y'}}(s_{x'}\otimes t_{y'})\Big] \\
&= \sum_{\substack{x'\in X'\\ y'\in Y'}} F\left\{\sum_{e'\in E'_{x'y'}}[\mathfrak{m}^{\natural}_{X',Y',e'}]\circ\{\alpha\otimes\beta\}_{e,e'}\right\}\Big[\boxtimes^{F}_{(X')^{\natural}_{x'},(Y')^{\natural}_{y'}}(s_{x'}\otimes t_{y'})\Big].
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.20, cette dernière égalité peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha\otimes\beta)\Big[\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X',Y'}(s\otimes t)\Big]_e \\
&\qquad = \sum_{\substack{x'\in X'\\ y'\in Y'}} F\Big\{\big(\{\alpha\}_{x,x'}\otimes\{\beta\}_{y,y'}\big)\circ\{\mathfrak{m}\}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}\Big\}\Big[\boxtimes^{F}_{(X')^{\mathfrak{h}}_{x'},(Y')^{\mathfrak{h}}_{y'}}(s_{x'}\otimes t_{y'})\Big] \\
&\qquad = \sum_{\substack{x'\in X'\\ y'\in Y'}} F\big\{\{\mathfrak{m}\}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}\big\}\Big[\boxtimes^{F}_{X^{\mathfrak{h}}_x,Y^{\mathfrak{h}}_y}\big(F\{\{\alpha\}_{x,x'}\}(s_{x'})\otimes F\{\{\beta\}_{y,y'}\}(t_{y'})\big)\Big] \\
&\qquad = F\big\{\{\mathfrak{m}\}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}\big\}\Big[\boxtimes_{X^{\mathfrak{h}}_x,Y^{\mathfrak{h}}_y}\big(\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)(s)_x\otimes\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta)(t)_y\big)\Big].
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha\otimes\beta)\Big[\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X',Y'}(s\otimes t)\Big]_e = \boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F}_{X,Y}\Big[\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\alpha)(s)\otimes\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}F(\beta)(t)\Big]_e$$

et prouve la commutativité du carré (31). $\square$

La remarque 3.4 assure que la cohomologie d'un faisceau Nisnevich quasi-monoïdal symétrique est munie d'un produit associatif et commutatif

$$H^p(X,F)\otimes H^q(Y,F)\xrightarrow{\otimes^F_{X,Y}} H^{p+q}(X\times_S Y,F) \tag{32}$$

induit par la structure quasi-monoïdale symétrique sur la résolution de Godement. Ce produit est commutatif au sens gradué, autrement dit tel que

$$a\otimes^F_{X,Y} b = (-1)^{p+q} b\otimes^F_{Y,X} a$$

pour un élément a de $H^p(X,F)$ et un élément b de $H^q(X,F)$ et compatible au produit induit par F sur le H^0. En particulier on dispose d'un cup-produit associatif et commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^p(X,F)\otimes H^q(X,F) \arrow[r, "\otimes^F_{X,X}"'] \arrow[rr, bend left, "\smile^F_X"] & H^{p+q}(X\times_S X,F) \arrow[r, "\Delta^*_X"'] & H^{p+q}(X,F)
\end{tikzcd} \tag{33}$$

munissant $H^*(X,F)$ d'une structure d'algèbre graduée commutative. Lorsque F est en outre un faisceau Nisnevich avec transferts quasi-monoïdal symétrique, la proposition 3.5 assure que les produits (32) sont compatibles aux transferts *i.e.* que les carrés

$$\begin{tikzcd}
H^p(X',F)\otimes H^q(Y',F) \arrow[r, "\otimes^F_{X',Y'}"] \arrow[d, "H^p(\alpha,F)\otimes H^q(\beta,F)"'] & H^{p+q}(X'\times_S Y',F) \arrow[d, "H^{p+q}(\alpha\otimes\beta,F)"] \\
H^p(X,F)\otimes H^q(Y,F) \arrow[r, "\otimes^F_{X,Y}"] & H^{p+q}(X\times_S Y,F)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour toute correspondance $\alpha\in c_S(X,X')$ et $\beta\in c_S(Y,Y')$.

Remarque 3.6. On prendra garde que pour une correspondance finie $\alpha \in c_S(X,Y)$, les carrés

$$\begin{tikzcd} H^p(Y,F)\otimes H^q(Y,F) \arrow[r, "\smile^F_Y"] \arrow[d, "H^p(\alpha,F)\otimes H^q(\alpha,F)"'] & H^{p+q}(Y,F) \arrow[d, "H^{p+q}(\alpha,F)"] \\ H^p(X,F)\otimes H^q(X,F) \arrow[r, "\smile^F_X"] & H^{p+q}(X,F) \end{tikzcd}$$

ne sont pas nécessairement commutatifs — nous renvoyons d'ailleurs à la remarque 1.7 à ce propos. Les cup-produits (33) ne sont donc pas à priori compatibles aux transferts.

3.2 Cas de la topologie étale

Nous nous contentons dans cette sous-section d'énoncer les résultats dans le cas de la topologie étale : les démonstrations étant identiques à celles données pour la topologie de Nisnevich. Nous supposons ici que $\mathcal{S} = \mathrm{Var}_S$ ou Sm_S.

Dans la suite, nous désignons par $s_{\overline{x}}$ la composante suivant $\overline{x}$ d'un élément s du produit

$$\prod_{\substack{\overline{x}\text{ bon point}\\ \text{géométrique de }X}} F\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}\}.$$

Par définition $F\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}\}$ est la fibre étale de F au point géométrique $\overline{x}$. Pour définir la résolution de Godement dans le cadre étale, nous partons de la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}$ de la catégorie des faisceaux étales caractérisée pour un faisceau étale F par les propriétés suivantes.

(a) Les sections sur X du faisceau étale $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F$ sont données par

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(X) = \prod_{\substack{\overline{x}\text{ bon point}\\ \text{géométrique de }X}} F\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}\}$$

les morphismes structuraux étant déterminés par les égalités

$$\Big[\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(p)(s)\Big]_{\overline{x}} = F\left\{\{p\}^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}\right\}(s_{p\circ\overline{x}})$$

dans lesquelles $\overline{x}$ est un bon point géométrique de X, $p : X \to Y$ un morphisme de S-schémas et s un élément de $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(Y)$.

(b) Le morphisme structural η_F se trouve donné par

$$\Big[\eta_F(s)\Big]_{\overline{x}} = F\{\{\mathfrak{l}\}^{\mathfrak{sh}}_{X,\overline{x}}\}(s)$$

pour un élément s de $F(X)$.

(c) Le morphisme structural μ_F coïncide avec la projection sur les composantes associées aux points fermés des $X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}$ via le morphisme naturel

$$(\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}\mathcal{G}_{\mathrm{Et}})F(X) \to \prod_{\substack{\overline{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X}} \prod_{\substack{\overline{z} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}}} F\left\{\left(X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}\right)^{\mathfrak{sh}}_{\overline{z}}\right\}.$$

La résolution cosimpliciale de Godement d'un faisceau étale F est par définition le faisceau étale cosimplicial

$$\mathcal{G}^*_{\mathrm{Et}}F = B^*(\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}, F).$$

Ce dernier nous fournit un complexe $G^*_{\mathrm{Et}}F$ de faisceaux étales de termes $G^n_{\mathrm{Et}}F = \mathcal{G}^n_{\mathrm{Et}}F$ et dont les différentielles sont données par la somme alternée des morphismes cofaces.

Remarque 3.7. La famille formée des foncteurs fibres $F \mapsto F\{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}}\}$ étant conservative sur Var_S d'après le lemme 2.22, l'augmentation canonique

$$F \to G^*_{\mathrm{Et}}F$$

est un quasi-isomorphisme [11] de complexes de faisceaux étales sur Var_S.

Proposition 3.8. *Il existe une monade canonique* $\mathcal{G}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}$ *de la catégorie* $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S})$ *rendant le carré suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{G}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}"] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S}) \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}"] \\
\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S}).
\end{tikzcd}$$

Comme précédemment les tranferts « naturels » sur la résolution de Godement étale sont compatibles avec la structure tensorielle de cette dernière.

Définition 3.9. Nous appelons faisceau étale (resp. avec transferts) quasi-monoïdal symétrique la donnée d'un faisceau étale (resp. d'un faisceau étale avec transferts) F et pour tout S-schéma X, Y d'un morphisme associatif symétrique

$$\boxtimes^F_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \times_S Y)$$

fonctoriel par rapport aux morphismes de schémas (resp. aux correspondances finies).

Ces derniers sont les objets d'une catégorie $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S})$ (resp. une catégorie $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S})$) munie d'un foncteur fidèle vers $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S})$ (resp. vers $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}(\mathcal{S})$).

[11] Il s'agit d'une propriété classique de la résolution de Godement prouvée par exemple dans [25, Part II, Ch. IV, lemma 2.2.2].

Remarque 3.10. La monade de Godement $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}$ induit une monade sur la catégorie des faisceaux étales quasi-monoïdaux symétriques. Étant donné un faisceau étale quasi-monoïdal symétrique $(F, \boxtimes^F_{X,Y})$, on voit en effet que $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F$ est canoniquement un faisceau étale quasi-monoïdal symétrique pour les morphismes

$$\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F}_{X,Y} : \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(X) \otimes \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(Y) \to \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(X \times_S Y)$$

donnés par les relations

$$\Big[\boxtimes^{\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F}_{X,Y}(s \otimes t)\Big]_{\overline{e}} = F\big\{\{\mathfrak{m}\}^{\mathfrak{sh}}_{X,Y,\overline{e}}\big\}\Big[\boxtimes^{F}_{X^{\mathfrak{sh}}_{\overline{x}},Y^{\mathfrak{sh}}_{\overline{y}}}(s_{\overline{x}} \otimes t_{\overline{y}})\Big]$$

dans lesquelles $s \in \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(X), t \in \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}F(Y)$ et $\overline{e}$ désigne un bon point géomérique du produit $X \times_S Y$ de projection $\overline{x}$ et $\overline{y}$. Avec cette définition il est aisé de voir que les morphismes structuraux η_F et μ_F de la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}$ sont bien des morphismes de faisceaux Nisnevich quasi-monoïdaux symétriques.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.11. *La monade $\mathcal{G}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}$ induit une monade sur la catégorie $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S})$ compatible avec la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}$ via le foncteur d'oubli. Autrement dit le carré suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{G}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et}}"] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S}) \arrow[d, "\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}"] \\
\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}(\mathcal{S}).
\end{tikzcd}$$

4 Réalisation ℓ-adique des motifs mixtes

Nous allons montrer que le foncteur de réalisation ℓ-adique des S-schémas lisses de type fini [12]

$$\begin{array}{rcl} R_\ell : \mathrm{Sm}^{\mathrm{op}}_S & \to & \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell) \\ X & \mapsto & R\pi_{X*}\pi^*_X\mathbb{Z}_S/\ell^* \end{array} \tag{34}$$

se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé quasi-tensoriel sur la catégorie des motifs mixtes géométriques $DM_{gm}(S)$. Avant d'aborder le résultat principal, nous tenons à donner quelques précisions quant à la catégorie dans laquelle le foncteur de réalisation ℓ-adique prend ses valeurs.

Lemme 4.1. *Lorsque le foncteur (34) prend ses valeurs dans une sous-catégorie triangulée pleine $\mathcal{C}$ de $\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$, il est en est de même d'un prolongement de (34) aux motifs mixtes géométriques.*

Démonstration. Cela résulte du fait que la catégorie triangulée des motifs mixtes géométriques est engendrée par les motifs des S-schémas lisses de type fini. □

[12] La notation $\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$ désigne la catégorie des coefficients ℓ-adiques construite par T. Ekedahl dans [11]. Nous renvoyons le lecteur à l'appendice A.

Dans la construction qui suit nous utilisons la proposition suivante que nous tirons de [27, 28].

Proposition 4.2. *Les h-faisceaux en groupes abéliens ont une structure canonique de préfaisceau avec transferts. En particulier les faisceaux de groupes abéliens localements constants pour la topologie étale sont canoniquement munis d'une structure de préfaisceau avec transferts et de plus les faisceaux d'anneaux localement constants sont canoniquement munis d'une structure de préfaisceau avec transferts quasi-monoïdal symétrique.*

4.1 Construction

Nous consacrons cette sous-section à la construction du foncteur de réalisation ℓ-adique des motifs mixtes géométriques. L'ingrédient essentiel réside dans les propriétés de la résolution de Godement que nous prouvées dans la section 3. Nous allons donc prouver le

Théorème 4.3. *Le foncteur symétrique monoïdal (34) se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé quasi-tensoriel*

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell). \tag{35}$$

(a) Lorsque S est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension ≤ 1, le foncteur (35) prend ses valeurs dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S, \mathbb{Z}_\ell)$ sous-catégorie triangulée pleine formée des coefficients constructibles.

(b) Lorsque S est de type fini sur un corps fini, le foncteur (35) induit un foncteur triangulé tensoriel

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{m}}(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où le second membre désigne la catégorie des coefficients ℓ-adiques mixtes de P. Deligne [8, 5].

Avant de donner la démonstration de ce résultat, il y a lieu de préciser la terminologie que nous employons. On peut considérer le topos $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}S_{\mathrm{Et}}$ des systèmes projectifs de grands faisceaux étales [13] sur S ainsi que le faisceau d'anneaux sur ce dernier

$$\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^* : \cdots \to \mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^{r+1} \to \mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^r \to \cdots \to \mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell$$

et la catégorie de modules associée $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*)$. Un système projectif de faisceaux étales avec transferts

$$F : r \mapsto F_r$$

dont les composantes F_r sont des $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^{r+1}$-modules sera appelé un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module avec transferts. En prenant pour morphismes, les morphismes de

[13] Il s'agit des faisceaux sur Var_S munie de la topologie étale.

systèmes projectifs de faisceaux étales avec transferts, on obtient une catégorie munie d'un foncteur d'oubli fidèle. Nous dirons qu'un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}$-module (resp. un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}$-module avec transferts) F est quasi-monoïdal symétrique lorsque ses composantes F_r sont des $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^{r+1}$-modules (resp. $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^{r+1}$-modules avec transferts) quasi-monoïdaux symétriques et que les morphismes de transition sont compatibles avec ces structures.

Preuve du théorème 4.3. On sait d'après la proposition 4.2 que le grand faisceau étale $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^r$ se trouve canoniquement muni de transferts, les morphismes de transition $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^r \to \mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^{r+1}$ étant des morphismes de faisceaux étales avec transferts. On peut donc voir que $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$ est canoniquement un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module avec transferts. En prenant la résolution cosimpliciale de Godement de ce dernier, on obtient un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module cosimplicial

$$\mathcal{G}^*_{\mathrm{Et}}\big[\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*\big] \in \Delta\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*)$$

qui d'après le lemme 3.8 est en fait canoniquement un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module avec transferts cosimplicial. Supposons que X soit un S-schéma de type fini, on dispose alors de deux morphismes de topos

$$X_{\mathrm{et}} \underset{p_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}} S_{\mathrm{Et}} \qquad\qquad p_X \circ \iota_X = \mathrm{id}$$

la restriction d'un faisceau F au petit site étale de X étant donnée par $\iota_X^* F$. Ces morphismes s'étendent naturellement aux topos $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} X_{\mathrm{et}}$ [14] et $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} S_{\mathrm{Et}}$ et sachant que $\iota_X^* \mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^* = \mathbb{Z}_X/\ell^*$, ils induisent un foncteur exact

$$\iota_X^* = p_{X*} : \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X/\ell^*).$$

En désignant par π_X le morphisme structural de X dans S, cela permet d'associer au S-schéma de type fini X le $\mathbb{Z}_S/\ell^*$-module cosimplicial

$$\mathcal{R}_\ell(X) := \pi_{X*} i_X^* \mathcal{G}^*_{\mathrm{Et}}\big[\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*\big]. \tag{36}$$

En prenant le complexe de chaîne associé, on obtient un objet

$$\underline{R}_\ell(X) := \mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(X) = \pi_{X*} i_X^* G^*_{\mathrm{Et}}\big[\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*\big] \tag{37}$$

appartenant à $\mathrm{C}^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$.

Remarque 4.4. Par construction de la résolution de Godement, on peut voir que

$$R_\ell(X) = \pi_{X*} G^{X,*}_{\mathrm{Et}}\big[\mathbb{Z}_X/\ell^*\big].$$

Le passage par les grands faisceaux étales ne sert en fait que dans la mesure où il permet de mettre des transferts.

[14] Il s'agit des systèmes projectifs de faisceaux sur le schéma X muni de la topologie étale, ainsi X_{et} désigne le petit topos étale de X.

Pour la définition des complexes normalisés apparaissant dans le lemme suivant, nous renvoyons à la remarque A.3.

Lemme 4.5. *Les objets (36) et (37) sont fonctoriels par rapport aux correspondances finies, autrement dit on dispose de foncteurs additifs*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\ell &: \operatorname{VarCor}_S^{\mathrm{op}} \to \Delta\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_S/\ell^*) \\ \underline{R}_\ell &: \operatorname{VarCor}_S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}^+(S, \mathbb{Z}_S/\ell^*). \end{aligned}$$

De plus le foncteur $\underline{R}_\ell$ est à valeurs dans la sous-catégorie formée des systèmes projectifs « normalisés » et on a un isomorphisme de foncteurs canonique θ

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SmCor}_S^{\mathrm{op}} \arrow[r, "R_\ell"] & \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell) \\ \mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\overset{\theta}{\Longrightarrow}"] \arrow[r, "R_\ell"'] & \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Supposons plus généralement que F soit un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module avec transferts cosimplicial. En posant pour un S-schéma X

$$\widetilde{F}(X) := \pi_{X*}\iota_X^* F$$

on obtient un préfaisceau avec transferts prenant ses valeurs dans la catégorie $\Delta\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_S/\ell^*)$. En effet lorsque l'on se donne une S-correspondance finie α de X dans Y et un S-schéma étale U, on a un morphisme naturel de $\mathbb{Z}/\ell^*$-modules cosimpliciaux

$$\widetilde{F}(Y)(U) := F(Y_U) \xrightarrow{F(\alpha_U)} F(X_U) =: \widetilde{F}(X)(U)$$

induit par les correspondances α_U construites dans la sous-section 1.2. Ces morphismes nous fournissent un morphisme dans la catégorie de $\mathbb{Z}_S/\ell^*$-modules cosimpliciaux

$$\widetilde{F}(\alpha) : \widetilde{F}(Y) \to \widetilde{F}(X).$$

La compatibilité avec la composition démontrée au lemme 1.9 assure que pour des correspondances finies $\alpha \in c_S(X,Y)$ et $\beta \in c_S(Y,Z)$ on a $(\beta\circ\alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U$ et donc que

$$\widetilde{F}(\alpha) \circ \widetilde{F}(\beta) = \widetilde{F}(\beta \circ \alpha).$$

En particulier ceci assure que les objets (36) et (37) sont fonctoriels par rapport aux correspondances finies. Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que pour un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module F, la résolution de Godement $F \to G^*_{\mathrm{Et}}F$ est une résolution flasque. En particulier si X est un S-schéma de type fini, les morphismes naturels

$$\begin{tikzcd} R\pi_{X*}i_X^*F \arrow[r] & R\pi_{X*}i_X^*G^*_{\mathrm{Et}}F \\ & \pi_{X*}i_X^*G^*_{\mathrm{Et}}F \arrow[u] \end{tikzcd}$$

sont des quasi-isomorphismes. En prenant $F = \mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$, on obtient un isomorphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SmCor}_S^{\mathrm{op}} \arrow[r, "R_\ell"] & \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*) \\
\mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\overset{\theta}{\Longrightarrow}"] \arrow[r, "R_\ell"'] & {} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Pour un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module plat F, les composantes de sa résolution de Godement $G^n_{\mathrm{Et}}F$ sont des $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-modules plats [15] ce qui assure que $G^*_{\mathrm{Et}}F$ est normalisé lorsque F est ℓ-adique. En particulier ceci entraîne que le foncteur considéré prend bien ses valeurs dans les complexes normalisés — voir remarque A.3. □

On a donc un foncteur

$$\underline{R_\ell} : \mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{C^b}\underline{R_\ell}} \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\left[\mathrm{C}^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)\right] \xrightarrow{\mathrm{Tot}} \mathrm{C}^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$$

et donc un foncteur triangulé

$$\underline{R_\ell} : \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$$

prenant en fait ces valeurs dans $\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$. En utilisant l'invariance par homotopie dans le cadre ℓ-adique, la localisation Nisnevich, on obtient un foncteur triangulé

$$R_\ell : \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell).$$

Comme la catégorie triangulée $\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$ est pseudo-abélienne — il s'agit d'une conséquence du lemme 2.4 de [4] — ce dernier nous donne un foncteur

$$R_\ell : DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S) \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell). \tag{38}$$

Il reste à vérifier que ce foncteur est bien compatible aux structures tensorielles de part et d'autre.

Lemme 4.6. *Le foncteur triangulé (38) est quasi-tensoriel*[16] *et pour tout S-schémas X, Y le morphisme induit*

$$\boxtimes_{X,Y} : R_\ell(X) \otimes R_\ell(Y) \to R_\ell(X \times_S Y)$$

coïncide avec le morphisme de Künneth.

[15]On trouvera une preuve de cette propriété classique par exemple dans [25, Part II, Ch. IV, proposition 2.4.3].

[16]Nous renvoyons à la définition B.1 pour ce qui concerne la terminologie utilisée dans cet article.

Démonstration. D'après la proposition 4.2, $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$ est un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module avec transferts quasi-monoïdal symétrique. Le lemme 3.11 assure alors que $\mathcal{G}^*_{\mathrm{Et}}\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$ est en fait un $\mathbb{Z}_{S,\mathrm{Et}}/\ell^*$-module avec transferts quasi-monoïdal symétrique cosimplicial. Cela entraîne que le foncteur

$$\mathcal{R}_\ell : \mathrm{SmCor}_S^{\mathrm{op}} \to \Delta\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_S/\ell^*)$$

du lemme 4.5 est quasi-monoïdal symétrique, autrement dit que l'on dispose d'un morphisme canonique de foncteurs sur $\mathrm{SmCor}_S \otimes \mathrm{SmCor}_S$

$$\boxtimes : \mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{R}_\ell(-) \to \mathcal{R}_\ell(- \times_S -)$$

associatif et commutatif. Ce dernier nous fournit des morphismes de foncteurs associatifs et commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(-) \arrow[d, equal] & \mathcal{C}\big[\mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{R}_\ell(-)\big] \arrow[l, "\boxtimes^{EML}"'] \arrow[r, "\mathcal{C}\boxtimes"] & \mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(- \times_S -) \arrow[d, equal] \\
\underline{R}_\ell(-) \otimes \underline{R}_\ell(-) & & \underline{R}_\ell(- \times_S -)
\end{tikzcd}$$

où $\boxtimes^{EML}$ désigne la transformation d'Eilenberg Mac Lane [10]. On a donc des morphismes de bifoncteurs associatifs et commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^{\mathrm{b}}\Big[\mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(-)\Big] \arrow[d, equal] & \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\Big[\mathcal{C}\big[\mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{R}_\ell(-)\big]\Big] \arrow[l, "\mathrm{C}^{\mathrm{b}}\boxtimes^{EML}"'] \arrow[r, "\mathrm{C}^{\mathrm{b}}\mathcal{C}\boxtimes"] & \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\Big[\mathcal{C}\mathcal{R}_\ell(- \times_S -)\Big] \arrow[d, equal] \\
\underline{R}_\ell(-) \otimes \underline{R}_\ell(-) & & \underline{R}_\ell(- \times_S -)
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs l'augmentation

$$\mathbb{Z}_S/\ell^* \to \underline{R}_\ell(S)$$

est un quasi-isomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{R}_\ell(S) \otimes \underline{R}_\ell(-) & \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\Big[\mathcal{C}\big[\mathcal{R}_\ell(S) \otimes \mathcal{R}_\ell(-)\big]\Big] \arrow[l, "\mathrm{C}^{\mathrm{b}}\boxtimes^{EML}"'] \arrow[r, "\mathrm{C}^{\mathrm{b}}\mathcal{C}\boxtimes"] & \underline{R}_\ell(S \times_S -) \arrow[dl] \\
\mathbb{Z}_S/\ell^* \otimes \underline{R}_\ell(-) \arrow[u] \arrow[r, equal] & \underline{R}_\ell(-). &
\end{tikzcd}$$

Cela nous assure que le foncteur (38) est bien quasi-tensoriel. □

En remarquant que le motif de $\mathbb{P}^1$ a pour image l'objet $\mathbb{Z}_\ell \oplus \mathbb{Z}_\ell(-1)[-2]$ de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S, \mathbb{Z}_\ell)$, on déduit immédiatement de la définition du motif de Tate le résultat suivant.

Lemme 4.7. *Il existe un isomorphisme*

$$\vartheta : R_\ell(\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_\ell(-1).$$

Comme $\mathbb{Z}_\ell(-1)$ est inversible dans $\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$, il résulte du lemme 4.7 que le foncteur (38) se prolonge en un foncteur triangulé quasi-tensoriel sur la catégorie des motifs mixtes géométriques $DM_{gm}(S)$.

Les assertions (a) et (b) du théorème 4.3 découlent du lemme 4.1 compte tenu respectivement du théorème de finitude de P. Deligne [1] et des résultats de P. Deligne sur les conjectures de Weil [7, 8]. □

Remarque 4.8. Lorsque S est de type fini sur un corps, il résulte de [3, exposé III] que la flèche de Künneth

$$\boxtimes_{X,Y} : R_\ell(X) \otimes R_\ell(Y) \to R_\ell(X \times_S Y)$$

du lemme 4.6 est un isomorphisme pour tout S-schéma lisse de type fini X, Y. Cela entraîne que le foncteur de réalisation du théorème 4.3 est en fait tensoriel autrement dit que le morphisme

$$\boxtimes_{M,N} : R_\ell(M) \otimes R_\ell(N) \to R_\ell(M \otimes N)$$

est un isomorphisme pour tout $M, N \in DM_{gm}(S)$.

Remarque 4.9. Soit T un schéma noethérien séparé et $\theta : T \to S$ un morphisme lisse de schémas. Pour tout S-schéma lisse de type fini X, le théorème de changement de base lisse appliqué au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "\pi_{X_T/T}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\pi_{X/S}"] \\ T \arrow[r, "\theta"] & S \end{tikzcd}$$

nous donne un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \theta^* R_\ell(X) &= \theta^* R\pi_{X/S*}\pi_{X/S}^*\mathbb{Z}_S/\ell^* = R\pi_{X_T/T*}\theta_X^*\pi_{X/S}^*\mathbb{Z}_S/\ell^* \\ &= R\pi_{X_T/T*}\pi_{X_T/T}^*\mathbb{Z}_T/\ell^* = R_\ell(X_T). \end{aligned}$$

Il résulte alors de la construction donnée dans la preuve du théorème 4.3 que l'on a un isomorphisme canonique de foncteurs ϕ

$$\begin{tikzcd} DM_{gm}(S) \arrow[r, "R_\ell"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell/\ell^*) \arrow[d, "\theta^*"] \\ DM_{gm}(T) \arrow[r, "R_\ell"] & \mathrm{D}^+(T, \mathbb{Z}_\ell). \end{tikzcd}$$

4.2 Une variante modérée

La généralité correspondant au théorème 4.3 permet de construire dans différentes situations géométriques des variantes modérées du foncteur de réalisation ℓ-adique.

Le résultat essentiel à cet égard réside dans la proposition 4.16 du paragraphe suivant dans lequel nous détaillons le comportement des catégories de motifs mixtes géométriques par rapport à certaines limites projectives.

4.2.1 Commutation aux limites projectives

Les systèmes projectifs de schémas que nous considérons sont les systèmes projectifs de schémas $\lambda \mapsto S_\lambda$ indexés par un ensemble ordonné filtrant Λ et nous notons $u_{\lambda,\mu} : S_\mu \to S_\lambda$ les morphismes de transition. Notre hypothèse est la suivante.

> *Le schéma S est régulier et limite projective d'un système projectif de schémas réguliers $\lambda \mapsto S_\lambda$ dont les morphismes de transition sont plats et affines.*

Comme S et les S_λ sont réguliers, leurs composantes irréductibles coïncident avec leurs composantes connexes. Pour un élément λ de Λ, nous notons dans la suite

$$u_\lambda : S \to S_\lambda$$

le morphisme canonique. Il résulte de notre hypothèse que ce morphisme est plat. Si X_{λ_0} est un S_{λ_0}-schéma, nous posons

$$X_\lambda = S_\lambda \times_{S_{\lambda_0}} X_{\lambda_0} \qquad X = S \times_{S_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}.$$

Proposition 4.10. *Soit X_{λ_0} un S_{λ_0}-schéma de type fini. Les morphismes de changement de base associés aux morphismes de transition induisent un isomorphisme*

$$\operatorname*{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{\mathrm{equi}}(X_\lambda/S_\lambda, 0) = c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0).$$

Démonstration. Il s'agit de voir que le morphisme

$$\operatorname*{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{\mathrm{equi}}(X_\lambda/S_\lambda, 0) \xrightarrow{\operatorname{colim}_{\lambda\geq\lambda_0} u_\lambda^\circledast} c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0)$$

est un isomorphisme. On remarquera que nos hypothèses entraînent que tous les changements de base considérés sont plats. Montrons tout d'abord que le morphisme est surjectif. On sait d'après le corollaire 3.4.6 de [28] que le membre de droite est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres Z de X finis et surjectifs sur une composante connexe de S. Soit Z un tel sous-schéma fermé de X. En utilisant les théorèmes 8.8.2 et 8.10.5 de [14], on peut supposer, quitte à prendre λ_0 un peu plus grand, qu'il existe un sous-schéma fermé Z_{λ_0} de X_{λ_0} tel que

$$Z = S \times_{S_{\lambda_0}} Z_{\lambda_0}.$$

Une nouvelle application du théorème 8.10.5 de *loc.cit.* nous assure, quitte à prendre λ_0 un peu plus grand, que Z_{λ_0} est fini sur S_{λ_0}. Soit C la composante connexe de S dominée par Z. Comme le morphisme u_λ est plat, C domine une composante connexe C_λ de S_λ. Le système projectif $\lambda \mapsto C_\lambda$ étant à morphismes de transition affines dominants, la proposition 8.4.4 de *loc.cit.* assure que la limite projective C' de C est connexe. Par ailleurs, il résulte du théorème 8.10.5 de *loc.cit.* qu'il d'agit d'un ouvert de S. On voit donc que C' est un ouvert connexe de S contenant C, ce qui permet de conclure que C est la limite projective des C_λ. Quitte à prendre λ_0 un peu plus grand, une nouvelle application du théorème 8.10.5 de *loc.cit.* permet de conclure que Z_{λ_0} est surjectif sur la composante connexe C_{λ_0}. Sachant que nous avons supposé les S_λ réguliers, le corollaire 3.4.6 de [28] assure alors que $[Z_{\lambda_0}]$ appartient à $c_{\mathrm{equi}}(X_{\lambda_0}/S_{\lambda_0}, 0)$ et la surjectivité résulte de l'égalité

$$u_{\lambda_0}^{\circledast}[Z_{\lambda_0}] = [S \times_{S_{\lambda_0}} Z_{\lambda_0}] = [Z].$$

Montrons maintenant l'injectivité. Soit $\lambda \geq \lambda_0$ un élément de Λ et α_λ un élément de $c_{\mathrm{equi}}(X_\lambda/S_\lambda, 0)$ dont l'image par $u_\lambda^{\circledast}$ est nulle. En notant Z_μ le support du cycle $\alpha_\mu = u_{\lambda,\mu}^{\circledast}\alpha$, il s'ensuit que la limite projective du système $\mu \mapsto Z_\mu$ est vide. Le théorème 8.10.5 de [14] assure alors que Z_μ est vide pour μ suffisamment grand et donc que $\alpha_\mu = 0$. Cela achève la preuve de la proposition. □

En appliquant le lemme précédent aux correspondances finies entre schémas lisses de type fini, on obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.11. *Soient $\lambda_0 \in \Lambda$ et $X_{\lambda_0}, Y_{\lambda_0}$ des S_{λ_0}-schémas lisses de type fini. Le morphisme canonique*

$$\operatorname*{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \to c_S(X, Y)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Comme les X_λ et Y_λ sont des schémas lisses sur un schéma régulier, ils sont eux-mêmes réguliers. La proposition 4.10 nous donne alors

$$\begin{aligned}\operatorname*{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) &= \operatorname*{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{\mathrm{equi}}(X_\lambda \times_{S_\lambda} Y_\lambda/X_\lambda, 0)\\ &= c_{\mathrm{equi}}(X \times_S Y/X, 0) = c_S(X, Y)\end{aligned}$$

ce qui justifie le corollaire. □

Ce résultat nous donne la propriété de commutation à certaines limites projectives des catégories de schémas lisses munis des correspondances finies. Son énoncé est la reformulation ci-dessous du corollaire 4.11.

Corollaire 4.12. *Le foncteur canonique*

$$2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{SmCor}_{S_\lambda} \to \mathrm{SmCor}_S \qquad (39)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Compte tenu du corollaire 4.11, notre assertion est une conséquence des théorèmes 8.8.2 et 8.10.5 de [14] qui assurent que pour tout S-schéma de type fini X, il existe un λ_0 tel que X provienne d'un S_{λ_0}-schéma de type fini X_{λ_0}, et de la proposition 17.7.8 de [15] qui assure que X_{λ_0} peut-être choisi lisse sur S_{λ_0} lorsque X est lisse sur S. □

Supposons donné un 2-foncteur

$$\mathcal{C}_{-} : \Lambda \to \mathrm{C{\small AT}} \; ; \; \lambda \mapsto \mathcal{C}_\lambda$$

où Cat désigne la 2-catégorie des catégories essentiellement petites et notons $F_{\lambda,\mu} : \mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}_\mu$ le foncteur de transition pour $\mu \geq \lambda$.

Remarque 4.13. Dans la suite il est utile de noter que la 2-colimite $\mathcal{C}$ des $\mathcal{C}_\lambda$ admet la description élémentaire suivante.

– Un objet de $\mathcal{C}$ est la donnée (C, λ) d'un élément $\lambda \in \Lambda$ et d'un objet C de $\mathcal{C}_\lambda$.
– Les morphismes entre deux objets (C, λ) et (C', λ') de $\mathcal{C}$ sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((C, \lambda), (C', \lambda')) = \operatorname*{colim}_{\mu \geq \lambda, \lambda'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mu}(F_{\lambda,\mu}(C), F_{\lambda',\mu}(C')).$$

Lorsque les $\mathcal{C}_\lambda$ sont des catégories additives et que les foncteurs $F_{\lambda,\mu}$ sont additifs, la catégorie $\mathcal{C}$ est naturellement une catégorie additive et il s'agit aussi de la 2-colimite de $\mathcal{C}_\lambda$ dans la 2-catégorie Add des catégories additives.

On dispose du lemme suivant. On remarquera la nécessité dans ce dernier de se restreindre aux complexes bornés.

Lemme 4.14. *Supposons donné un* 2*-foncteur*

$$\mathcal{C}_{-} : \Lambda \to \mathrm{A{\small DD}} \; ; \; \lambda \mapsto \mathcal{C}_\lambda$$

et notons $\mathcal{C}$ *la* 2*-colimite des* $\mathcal{C}_\lambda$*. Le foncteur canonique*

$$2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C}_\lambda) \to \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$$

est une équivalence de catégories triangulées.

Démonstration. Notons F_λ le foncteur additif canonique de $\mathcal{C}_\lambda$ dans $\mathcal{C}$. De la description précédente des 2-colimites, il résulte que le foncteur

$$2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C}_\lambda) \to \mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$$

est une équivalence de catégories. Un morphisme $c : C \to C'$ de complexes d'objets de $\mathcal{C}$ est donc l'image d'un morphisme $c_\lambda : C_\lambda \to C'_\lambda$ de complexes d'objets de $\mathcal{C}_\lambda$ par le foncteur $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(F_\lambda)$. Il suffit alors juste de remarquer que c est une équivalence d'homotopie si et seulement si il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(F_{\lambda,\mu})(c_\lambda)$ soit une équivalence d'homotopie dans $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C}_\mu)$. □

En utilisant le corollaire 4.12, le lemme précédent nous donne le résultat suivant.

Corollaire 4.15. *Le foncteur canonique*

$$\operatorname*{2\text{-}colim}_{\lambda} \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_{S_\lambda}) \to \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S) \tag{40}$$

est une équivalence de catégories triangulées.

Démonstration. Le lemme 4.14 entraîne que le foncteur canonique

$$\operatorname*{2\text{-}colim}_{\lambda} \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_{S_\lambda}) \to \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname*{2\text{-}colim}_{\lambda} \mathrm{SmCor}_{S_\lambda})$$

est une équivalence de catégories. Le fait que le foncteur (40) soit une équivalence de catégories découle du corollaire 4.12 via le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \text{2-colim}_\lambda \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_{S_\lambda}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "(40)"'] & \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\text{2-colim}_\lambda \mathrm{SmCor}_{S_\lambda}) \arrow[r, "\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(39)"] & \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S). \end{tikzcd}$$

□

Proposition 4.16. *La sous-catégorie épaisse $E_{gm}(S)$ est la 2-colimite des sous-catégories $E_{gm}(S_\lambda)$ et les foncteurs canoniques*

$$\operatorname*{2\text{-}colim}_{\lambda} \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda) \to \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S) \tag{41}$$

$$\operatorname*{2\text{-}colim}_{\lambda} DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda) \to DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S) \tag{42}$$

$$\operatorname*{2\text{-}colim}_{\lambda} DM_{gm}(S_\lambda) \to DM_{gm}(S) \tag{43}$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour tout carré distingué élémentaire pour la topologie de Nisnevich sur S_λ

$$\begin{tikzcd} U_\lambda \times_{X_\lambda} V_\lambda \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V_\lambda \arrow[d] \\ U_\lambda \arrow[r] & X_\lambda \end{tikzcd} \tag{44}$$

le carré obtenu par changement de base

$$\begin{tikzcd} (S \times_{S_\lambda} U_\lambda) \times_{(S \times_{S_\lambda} X_\lambda)} (S \times_{S_\lambda} V_\lambda) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S \times_{S_\lambda} V_\lambda \arrow[d] \\ S \times_{S_\lambda} U_\lambda \arrow[r] & S \times_{S_\lambda} X_\lambda \end{tikzcd} \tag{45}$$

est distingué élémentaire pour la topologie de Nisnevich sur S. La définition des catégories épaisses $E_{gm}(S_\lambda)$ et $E_{gm}(S)$ entraîne donc que le foncteur (40) induit un foncteur

$$2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} E_{gm}(S_\lambda) \to E_{gm}(S). \tag{46}$$

D'après le corollaire 4.15 le foncteur (46) est pleinement fidèle, en ce qui concerne la première assertion, il suffit donc de voir que les objets de $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)$ de la forme

$$[\mathbb{A}^1_X] \to [X] \qquad\qquad [U \times_X V] \to [U] \oplus [V] \to [X]$$

où X est un S-schéma lisse de type fini et

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{47}$$

un carré distingué élémentaire pour la topologie de Nisnevich sur S proviennent à isomorphisme près d'éléments de la 2-colimite des $E_{gm}(S_\lambda)$. Pour le premier complexe, il s'agit d'une conséquence immédiate de l'assertion (ii) du théorème 8.2.2 de [14]. Pour le second complexe, il suffit de remarquer que le théorème 8.10.5 de *loc.cit.* entraîne l'existence d'un $\lambda \in \Lambda$ et d'un carré distingué pour la topologie Nisnevich de S_λ de la forme (44) tel que le carré (47) soit isomorphe au carré (45) obtenu par changement de base.

Montrons maintenant que le foncteur (41) est une équivalence de catégories triangulées. On sait déjà grâce au corollaire 4.15 que ce dernier est essentiellement surjectif. Il suffit donc de prouver sa pleine fidélité. Pour simplifier les notations nous posons

$$\mathbb{K}_\lambda = \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_{S_\lambda}) \qquad \mathbb{K} = \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)$$

$$\mathbb{D}_\lambda := \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda) \qquad \mathbb{D} := \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)$$

ainsi que

$$\mathbb{E} := 2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(\lambda).$$

Convenons en outre de noter par $\mathcal{S}_\lambda$ (resp. $\mathcal{S}$) la sous-catégorie de $\mathbb{K}_\lambda$ (resp. $\mathbb{K}$) ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes de $\mathbb{K}_\lambda$ (resp. $\mathbb{K}$) qui deviennent des isomorphismes dans $\mathbb{D}_\lambda$ (resp. $\mathbb{D}$). On peut reformuler l'assertion que nous venons de prouver concernant les catégories E_{gm} en disant que pour tout objet $M \in \mathbb{K}_\lambda$ et tout objet $M' \in \mathbb{K}_{\lambda'}$ on a un isomorphisme naturel

$$\operatorname*{colim}_{\mu \geq \lambda, \lambda'} \mathcal{S}_\mu(F_{\lambda,\mu}(M), F_{\lambda',\mu}(M')) = \mathcal{S}(\Phi(M,\lambda), \Phi(M',\lambda')) \tag{48}$$

où Φ désigne l'isomorphisme (40).

Notons Ψ le morphisme (41) et fixons des objets (M,λ) et (M',λ') de $\mathbb{D}$. En utilisant la description de la remarque 4.13 on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}((M,\lambda),(M',\lambda')) &= \operatorname*{colim}_{\mu} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_\mu}(F_{\lambda,\mu}(M),F_{\lambda',\mu}(M'))\\ &= \operatorname*{colim}_{\mu} \operatorname*{colim}_{\substack{L\in\mathbb{K}_\mu\\ s\in\mathcal{S}_\mu(F_{\lambda',\mu}(M'),L)}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_\mu}(F_{\lambda,\mu}(M),L).\end{aligned}$$

D'autre part en utilisant le corollaire 4.15 ainsi que les isomorphismes (48) on voit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\Psi(M,\lambda),\Psi(M',\lambda')) &= \operatorname*{colim}_{\substack{K\in\mathbb{K}\\ \sigma\in\mathcal{S}(\Phi(M',\lambda'),K)}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Phi(M,\lambda),K)\\ &= \operatorname*{colim}_{\mu} \operatorname*{colim}_{\substack{K\in\mathbb{K}_\mu\\ \sigma\in(\Phi(M',\lambda'),\Phi(K,\mu))}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Phi(M,\lambda),\Phi(K,\mu))\\ &= \operatorname*{colim}_{\mu} \operatorname*{colim}_{\substack{K\in\mathbb{K}_\mu\\ \sigma\in\mathcal{S}_\mu(F_{\lambda',\mu}(M'),K)}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_\mu}(F_{\lambda,\mu}(M),K).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la pleine fidélité recherchée.

Désignons par $(-)^\natural$ le 2-foncteur qui à une catégorie associe son enveloppe pseudo-abélienne. Le morphisme canonique

$$2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda}(\mathcal{C}_\lambda^\natural) \to \mathcal{C}^\natural$$

est une équivalence de catégories comme on le voit à partir de la propriété universelle des 2-colimites et de la pseudo-abélianisation. En particulier le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 2\text{-colim}_\lambda\, \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda)^\natural \arrow[r, "\text{equiv.}"] \arrow[d, equal] & \left[2\text{-colim}_\lambda\, \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda)\right]^\natural \arrow[r, "(41)^\natural"] & \underline{DM}^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)^\natural \arrow[d, equal] \\ 2\text{-colim}_\lambda\, DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda) \arrow[rr, "(42)"'] & & DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S) \end{tikzcd}$$

entraîne que (42) est aussi une équivalence de catégories.

Quant à la dernière assertion, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} DM_{gm}(S_\lambda) &= 2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} 2\text{-}\operatorname*{colim}_{n} \left[DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda)(n)\right]\\ &= 2\text{-}\operatorname*{colim}_{n} 2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \left[DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda)(n)\right]\\ &= 2\text{-}\operatorname*{colim}_{n} \left[2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S_\lambda)\right](n)\\ &= 2\text{-}\operatorname*{colim}_{n} DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(S)(n) = DM_{gm}(S).\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

4.2.2 Réalisation modérée

Dans ce qui suit, nos hypothèses sont légèrement plus restrictives que dans le paragraphe 4.2.1.

> *Le schéma S est régulier et limite projective d'un système projectif de schémas réguliers $\lambda \mapsto S_\lambda$ dont les morphismes de transition sont lisses et affines.*

Il résulte des théorèmes 8.8.2 et 8.10.5 de [14] et de la proposition 17.7.6 de [15] que la catégorie des S-schémas lisses de type fini admet la description suivante

$$\text{2-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{Sm}_{S_\lambda} = \mathrm{Sm}_S.$$

En passant à la 2-colimite sur Λ, les foncteurs de réalisation ℓ-adique

$$\mathrm{Sm}_{S_\lambda}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \qquad \lambda \in \Lambda$$

fournissent donc un foncteur

$$\mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}. \tag{49}$$

La conjonction du théorème 4.3 et de la description de la catégorie des motifs géométriques de la proposition 4.16 nous donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.17. *Le foncteur de réalisation ℓ-adique modérée (49) se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé quasi-tensoriel*

$$R_{md,\ell} : DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}. \tag{50}$$

(a) Lorsque $\lambda \mapsto S_\lambda$ est un système projectif de schémas de type fini sur un schéma nothérien régulier de dimension ≤ 1, le foncteur (50) prend ses valeurs dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$.

(b) Lorsque S lisse de type fini sur un corps de nombres, le foncteur (50) induit un foncteur triangulé tensoriel

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{m}}(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{md}$$

où le second membre désigne la catégorie des coefficients ℓ-adiques mixtes modérés de [17, Definition 3.1].

Démonstration. D'après le théorème 4.3 on a des foncteurs triangulés quasi-tensoriels

$$DM_{gm}(\mathcal{S}_\lambda)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}(\mathcal{S}_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \qquad \lambda \in \Lambda.$$

Compte tenu de la proposition 4.16 et de la remarque 4.9, en passant à la 2-colimite sur Λ on obtient un foncteur triangulé quasi-tensoriel

$$\begin{tikzcd}
\text{2-colim}_\lambda DM_{gm}(\mathcal{S}_\lambda)^{\mathrm{op}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \text{2-colim}_\lambda \mathrm{D}(\mathcal{S}_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \arrow[d, equal] \\
DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \arrow[r, dotted, "R_{md,\ell}"] & \mathrm{D}(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}.
\end{tikzcd}$$

Lorsque $\lambda \mapsto S_\lambda$ est un système projectif de schémas de type fini sur un schéma nothérien régulier de dimension ≤ 1, le théorème 4.3 entraîne également que ce foncteur prend ses valeurs dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$.

On peut appliquer ce résultat au cas où Λ est l'ensemble des ouverts affines non vides d'un schéma intègre régulier S de corps des fonctions F. Cela permet pour tout F-schéma lisse de type fini X d'obtenir une réalisation ℓ-adique

$$DM_{gm}(X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$$

la catégorie de droite étant étudiée dans [17] dans le cas où F est un corps de nombres. En outre les résultats de [7, 8] et le lemme 4.1 assurent que le foncteur précédent induit un foncteur triangulé tensoriel

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{m}}(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{md}$$

lorsque F est un corps de nombres. □

A La catégorie des coefficients ℓ-adiques de T. Ekedahl

Avec cet appendice nous précisons la nature des coefficients ℓ-adiques que nous utilisons pour réaliser les motifs mixtes sur S. Nous en profitons pour fixer les notations que nous utilisons dans la cadre ℓ-adique. Dans son article [8], P. Deligne propose de considérer la catégorie

$$2\text{-}\lim \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^r)$$

2-limite projective du système projectif $r \mapsto \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^r)$ dans lequel
– les morphismes de transition sont fournis par les produits tensoriels

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^s) \xrightarrow{\mathbb{Z}_S/\ell^r \otimes^L_{\mathbb{Z}_S/\ell^s} -} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^r) \qquad r \geq s\ ;$$

– $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^r)$ désigne la sous-catégorie triangulée de la catégorie dérivée $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}_S/\ell^r)$ formée des objets de tor dimension finie et à cohomologie constructible.

Mais cette construction ne fournit pas en toute généralité une catégorie triangulée. En effet la 2-limite projective d'un système projectif de catégories triangulées à morphismes de transition triangulés n'est pas à priori munie d'une structure triangulée. En revanche d'après la proposition 2.2.15 de [5], cette construction devient tout à fait raisonnable lorsque le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^r)}(F, G)$$

est fini pour tout objet F, G de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(S, \mathbb{Z}/\ell^r)$.

En pratique on sait que cette hypothèse est satisfaite par exemple lorsque S est de type fini sur $\mathbb{Z}$ ou sur le spectre d'un corps k tel que, pour toute extension finie séparable de E de k, les groupes de cohomologie Galoisienne $H^i(G_E, \mathbb{Z}/\ell)$

sont finis — ceci inclut notamment le cas où k est un corps fini ou un corps algébriquement clos.

La construction de P. Deligne recouvre donc un grand nombre de situations arithmético-géométriques mais présente un inconvénient majeur relativement à notre approche : il est extrêmement malaisé de travailler « à homotopie près » dans une limite projective de catégories triangulées même lorsque chacune d'entre elle est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne.

A.1 La catégorie de T. Ekedahl

La construction inconditionnelle des catégories $\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$ donnée par T. Ekedahl dans [11] ne présente pas cet inconvénient. Cela tient au fait que le passage àla limite projective n'est pas effectuée au niveau des catégories triangulées mais au niveau des complexes. Naturellement lorsque l'hypothèse de finitude n'est plus satisfaite, le foncteur lim n'est plus exact, et la cohomologie ℓ-adique n'est pas donnée par la simple limite

$$\lim_r H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^r)$$

mais par la cohomologie étale continue de U. Jannsen [23] : en d'autres termes il y a lieu de dériver aussi le foncteur limite projective pour obtenir un résultat raisonnable. Le passage à la limite projective au niveau des complexes permet justement de dériver ce foncteur et la catégorie de T. Ekedahl fournit le « formalisme dérivé » correspondant à la cohomologie étale continue de U. Jannsen.

Nous rappelons maintenant la construction de la catégorie de T. Ekedahl. On peut considérer le topos $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} S_{\mathrm{et}}$ des systèmes projectifs de faisceaux étales sur S ainsi que le faisceau d'anneaux sur ce dernier

$$\mathbb{Z}_S/\ell^* : \cdots \to \mathbb{Z}_S/\ell^{r+1} \to \mathbb{Z}_S/\ell^r \to \cdots \to \mathbb{Z}_S/\ell.$$

La catégorie des $\mathbb{Z}/\ell^*$-modules est une catégorie abélienne de Grothendieck dont on note $\mathrm{D}(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$ la catégorie dérivée. Pour un objet $F \in \mathrm{D}(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$, on pose suivant [11]

$$\widehat{F} := L\pi^* R\pi_* F.$$

où $\pi : \mathbb{N}^{\mathrm{op}} S_{\mathrm{et}} \to S_{\mathrm{et}}$ désigne le morphisme naturel de topos. D'après la proposition 2.2 de *loc.cit.* on dispose du lemme suivant.

Lemme A.1. *Soit F un objet de $\mathrm{D}(X, \mathbb{Z}/\ell^*)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) Le morphisme naturel $\widehat{F} \to F$ est un isomorphisme.

(b) Les morphismes induits par les morphismes de transition

$$\mathbb{Z}_S/\ell^{s+1} \otimes^L_{\mathbb{Z}_S/\ell^{r+1}} F_r \to F_s \qquad r \geq s$$

sont des isomorphismes dans $\mathrm{D}(S, \mathbb{Z}/\ell^{s+1})$.

Définition A.2. Soit $\dagger \in \{\mathrm{b}, +, -, \varnothing\}$. La catégorie triangulée $\mathrm{D}^\dagger(S, \mathbb{Z}_\ell)$ des coefficients ℓ-adiques est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}^\dagger(\mathbb{Z}_S/\ell^*)$ engendrée par les complexes F satisfaisant les conditions équivalentes du lemme A.1. La catégorie des coefficients constructibles $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S, \mathbb{Z}_\ell)$ est donnée par la sous-catégorie triangulée de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S, \mathbb{Z}_\ell)$ formée des objets à cohomologie constructible.

Remarque A.3. Dans [11] les complexes vérifiant les conditions équivalentes du lemme A.1 sont appelés complexes normalisés.

A.2 Coefficients ℓ-adiques modérés

Dans cette section nous donnons la définition de la catégorie des coefficients ℓ-adiques que nous appelons modérés. Nous nous fixons un ensemble ordonné filtrant Λ et nous supposons que S est limite projective d'un système projectif de schémas $\lambda \mapsto S_\lambda$ dont les morphismes de transition sont des morphismes plats affines.

Définition A.4. Nous appellerons catégorie des coefficients ℓ-adiques modérés relativement au système projectif des S_λ la catégorie triangulée

$$\mathrm{D}(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{D}(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell).$$

On pose de même

$$\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{D}^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \quad \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-}\operatorname*{colim}_{\lambda} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell).$$

B Foncteurs monoïdaux

La terminologie concernant les catégories symétriques monoïdales n'étant pas entièrement fixée dans la littérature, nous précisons les conventions valables dans cet article avec la définition ci-dessous.

Définition B.1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories monoïdales symétriques. Un foncteur quasi-monoïdal symétrique consiste en les données suivantes.
– Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
– Une transformation naturelle $\boxtimes : F(-) \otimes F(-) \to F(- \otimes -)$ vérifiant les conditions ci-dessous.
  (a) (Associativité) Pour tout objet A, A', A'' de $\mathcal{A}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes F(A') \otimes F(A'') \arrow[r, "F(A)\otimes \boxtimes_{A',A''}"] \arrow[d, "\boxtimes_{A,A'}\otimes F(A'')"'] & F(A) \otimes F(A' \otimes A'') \arrow[d, "\boxtimes_{A,A'\otimes A''}"] \\
F(A \otimes A') \otimes F(A'') \arrow[r, "\boxtimes_{A\otimes A',A''}"'] & F(A \otimes A' \otimes A'')
\end{tikzcd}$$

  est commutatif.

(b) (Commutativité) Pour tout objet A, A' de $\mathcal{A}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(A)\otimes F(A') \arrow[r] \arrow[d, "\boxtimes_{A,A'}"'] & F(A')\otimes F(A) \arrow[d, "\boxtimes_{A',A}"] \\ F(A\otimes A') \arrow[r] & F(A'\otimes A) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

– Une transformation naturelle $1_{\mathcal{B}} \to F(1_{\mathcal{A}})$ telle que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathcal{B}}\otimes F(A) \arrow[r] \arrow[d] & F(A) \\ F(1_{\mathcal{A}})\otimes F(A) \arrow[r, "\boxtimes_{1_{\mathcal{A}},A}"'] & F(1_{\mathcal{A}}\otimes A) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pour tout objet A de $\mathcal{A}$.

Nous dirons que le foncteur est monoïdal symétrique lorsque le morphisme $1_{\mathcal{B}} \to F(1_{\mathcal{A}})$ est un isomorphisme et que pour tout objet A, A' de $\mathcal{A}'$ le morphisme

$$\boxtimes_{A,A'} : F(A)\otimes F(A') \to F(A\otimes A')$$

est un isomorphisme. Lorsque les catégories $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont additives *i.e.* tensorielles nous parlerons plutôt de foncteur quasi-tensoriel que de foncteur quasi-monoïdal symétrique, et de même de foncteur tensoriel plutôt que de foncteur monoïdal symétrique.

Remerciements. Je remercie Bruno Kahn et Marc Levine pour les discussions que nous avons eus au sujet des résultats contenus dans [21] et dans le présent article ainsi que Joël Riou pour les remarques dont il m'a fait part. Je souhaite également remercier le rapporteur dont la lecture attentive et les remarques m'ont permis de corriger une erreur commise dans la version préliminaire.

Références

[1] *Cohomologie étale*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Lecture Notes in Mathematics, vol. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4. Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1972

[3] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 5. Lecture Notes in Mathematics, vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[4] P. Balmer, M. Schlichting, Idempotent completion of triangulated categories, *J. Algebra* 236 (2001), no. 2, p. 819-834

[5] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, *Astérisque* (1982), no. 100, p. 5-171, Analysis and topology on singular spaces I (Luminy, 1981)

[6] F. Déglise, Finite correspondences and transfers over a regular base, Preprint K-theory/0765/

[7] P. Deligne, La conjecture de Weil I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 43, p. 273-307

[8] P. Deligne, La conjecture de Weil II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 52, p. 137-252

[9] P. Deligne, A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 38 (2005), no. 1, p. 1-56

[10] S. Eilenberg, J.A. Zilber, On products of complexes *Amer. J. Math* 75 (1953), p. 200-204

[11] T. Ekedahl, On the adic formalism, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 197-218

[12] D.R. Grayson, Universal exactness in algebraic K-theory, *J. Pure Appl. Algebra* 36 (1985), no. 2, p. 139-141

[13] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 24

[14] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 28

[15] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. IV, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1967), no. 32

[16] A. Huber, Mixed motives and their realization in derived categories, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1604, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[17] A. Huber, Mixed perverse sheaves for schemes over number fields, *Compositio Math.* 108 (1997), no. 1, p. 107-121

[18] A. Huber, Realization of Voevodsky's motives, *J. Algebraic Geom.* 9 (2000), no. 4, p. 755-799

[19] A. Huber, Corrigendum to « Realization of Voevodsky's motives », *J. Algebraic Geom.* 13 (2004), no. 1, p. 195-207

[20] F. Ivorra, Réalisation ℓ-adique des motifs mixtes, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6 (2005)

[21] F. Ivorra, Réalisation ℓ-adique des motifs triangulés géométriques II, Preprint K-theory/0762

[22] F. Ivorra, Levine's motivic comparison theorem revisited, à paraître dans J. Reine Angew. Math. (2007)

[23] U. Jannsen, Continuous étale cohomology, *Math. Ann.* 280 (1988), no. 2, p. 207-245

[24] J. F. Jardine, Motivic symmetric spectra, *Doc. Math.* 5 (2000), p. 445-553 (electronic)

[25] M. Levine, Mixed motives, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 57, American Mathematical Society (1998)

[26] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lecture notes on motivic cohomology, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society (2006)

[27] A. Suslin, V. Voevodsky, Singular homology of abstract algebraic varieties, *Invent. Math.* 123 (1996), no. 1, p. 61-94

[28] A. Suslin, V. Voevodsky, Relative cycles and Chow sheaves, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000, p. 10-86

[29] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000

[30] V. Voevodsky, Homology of schemes, *Selecta Math. (N.S.)* 2 (1996), no. 1, p. 111-153

[31] V. Voevodsky, Motives over simplicial schemes, www.math.uiuc.edu/K-theory/0638, June 2003

Florian Ivorra
Institut de Mathématiques
de Jussieu
Équipe Théorie des nombres
175-179 rue du Chevaleret
75013 Paris
FRANCE
fivorra@math.jussieu.fr